

УДК 532.59:537.2

© 1995 г. С. В. НЕСТЕРОВ, А. Ю. ЯКИМОВ

ЗАДАЧА КОШИ — ПУАССОНА В ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКЕ

Решается задача Коши — Пуассона о распространении волнового движения на границе раздела двух жидкостей, подверженных воздействию электрического поля в случае, когда напряженность электрического поля ниже критического значения, при котором наступает потеря устойчивости горизонтальной границы раздела. Верхний слой жидкости является идеальным диэлектриком, а нижний идеальным проводником. Задача решается в линейной постановке. Для формы возвышения получен интеграл. Приведены результаты численных расчетов пространственно-временной картины волнового поля.

В электродинамике достаточно подробно исследована устойчивость границы раздела двух жидкостей, подверженных воздействию электрического поля. Число статей, посвященных этому вопросу, составляет несколько десятков. Упомянем здесь лишь основополагающие работы Релея [1], Тейлора [2], Френкеля, изложение результатов которого приведено в общедоступной книге [3]. Однако до сих пор не опубликовано решение задачи Коши — Пуассона о распространении волнового движения на границе раздела двух жидкостей, подверженных воздействию электрического поля.

Предположим, что слои жидкости имеют плотности ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$), между жидкостями действуют силы поверхностного натяжения, коэффициент которого T . На частицы жидкостей действует сила тяжести, ускорение которой g . Верхняя жидкость — идеальный диэлектрик с проницаемостью ϵ , нижняя — идеальный проводник. Обе жидкости несжимаемы, диссипация отсутствует.

Перпендикулярно к границе раздела жидкостей приложено постоянное однородное электрическое поле, напряженность которого E_0 . Жидкости в вертикальном и горизонтальном направлениях неограниченны. В дальнейшем считаем, что движения жидкостей являются двумерными. Описанная конфигурация схематически изображена на фиг. 1.

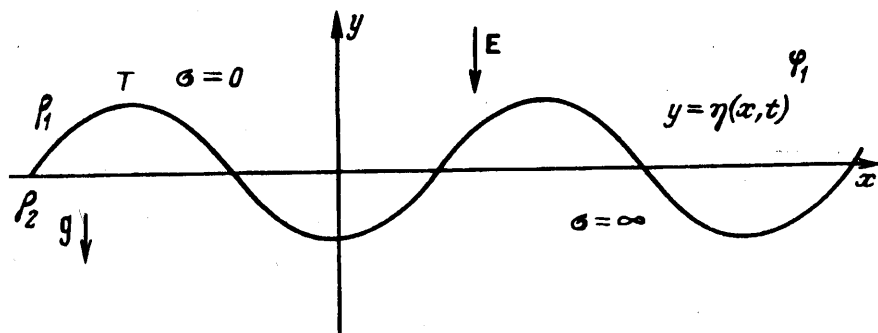
Пусть в начальный момент времени граница раздела возмущена так, что ее возвышение $y = \eta(x, 0)$, а начальные скорости частиц жидкостей равны нулю. Требуется найти последующее движение жидкостей и, в частности, форму границы раздела.

Обозначим через φ_1 и φ_2 потенциалы скоростей для верхней и нижней жидкостей, $y = \eta(x, t)$ — уравнение границы раздела жидкостей, Φ — потенциал электрического поля.

Движение жидкости, по предположению, совершается с малой амплитудой так, что его можно описывать с помощью линеаризованных уравнений гидродинамики. Прежде чем сформулировать задачу гидродинамики, необходимо решить задачу электростатики и вычислить пондеромоторные силы электрического поля, действующие на границе раздела двух жидкостей.

Рассмотрим задачу электростатики. Потенциал электрического поля Φ в области $y > 0$ ищем в виде

$$\Phi = -E_0 y + \Phi_1 \tag{1}$$



Фиг. 1

где Φ_1 — потенциал электрического поля, вызванный деформацией поверхности раздела. Потенциал Φ должен удовлетворять краевому условию $\Phi = 0$ при $y = \eta(x, t)$. В силу малости $\eta(x, t)$ это условие принимает вид

$$\Phi_1(x, 0) = E_0 \eta(x, t) \quad (2)$$

Будем считать, что выполняются условия

$$\left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| \leq M \ll 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx < B \quad (3)$$

Решение задачи Дирихле (1.2) в силу сделанных предположений записывается в виде

$$\Phi = -E_0 y + \frac{E_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi, t) \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi \quad (4)$$

Давление поперомоторных сил электрического поля на границе раздела двух жидкостей рассчитывается по формуле

$$P = -\varepsilon \frac{E^2}{8\pi}, \quad E = -\text{grad } \Phi \quad (5)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость [3].

В силу условий (3) квадратичные члены, содержащие $\eta(x, t)$, $\partial \eta / \partial x$, в формуле (5) можно отбросить и получить выражение для давления поперомоторных сил электрического поля на границе раздела двух жидкостей

$$P = -\varepsilon \frac{E^2}{8\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi, t) \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi \right), \quad y = 0 \quad (6)$$

Рассмотрим задачу гидродинамики. Потенциалы скоростей φ_1 , φ_2 , удовлетворяют уравнению и краевым условиям

$$\Delta \varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left(\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) - g(\rho_2 - \rho_1) \eta - T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \\ & = \varepsilon \frac{E^2}{8\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi, t) \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi \right) + C, \quad y = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad y = 0 \quad |\varphi_1| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty; \quad |\varphi_2| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty \quad (9)$$

Поскольку (8) справедливо во всей жидкости, выберем постоянную интегрирования $C = -\varepsilon E^2/8\pi$.

Краевое условие (8) выражает равенство разности давлений в жидкостях, приложенных к границе раздела. Условие (9) является кинематическим и выражает равенство нормальных скоростей на границе раздела двух жидкостей.

Начальные условия для неизвестных функций η , φ_1 , φ_2 записываются так

$$\eta(x, 0) = f(x); \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad t = 0 \quad (10)$$

Решение краевой задачи (7)—(10) ищем с помощью преобразования Фурье, которые определяются формулами

$$F\varphi_i(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\varphi_i(x, y, t) dx = \varphi_i^*(k, y, t) \quad (11)$$

$$F^{-1}\varphi_i(k, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\varphi_i^*(k, y, t) dk = \varphi_i(x, y, t) \quad (12)$$

Используя свойства преобразования Фурье, получим

$$\begin{aligned} F \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi, t) \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} dy \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[F \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi, t) \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} dy \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} [\pi\eta^*(k, t) e^{-|k|y}] = -\pi|k|\eta(k, t^*), \quad y = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Задача (7)—(10) после преобразования Фурье примет вид

$$\frac{d^2\varphi_i^*}{dy^2} - k^2\varphi_i^* = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

$$\rho_1 \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial\varphi_2^*}{\partial t} - g(\rho_2 - \rho_1)\eta^* + Tk^2\eta^* = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi} |k|\eta^* \quad (y = 0) \quad (15)$$

$$\frac{\partial\eta^*}{\partial t} = -|k|\varphi_1^* = |k|\varphi_2^* \quad (16)$$

Решения уравнений (14), удовлетворяющее условиям при $y \rightarrow \pm \infty$, таковы

$$\varphi_1^* = \alpha_1(t) e^{-|k|y}; \quad \varphi_2^* = \alpha_2(t) e^{|k|y} \quad (17)$$

которые следует подставить в (15) и (16). Исключая неизвестные функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, получим уравнение, описывающее изменение функции $\eta^*(x, t)$ во времени

$$\eta'' + \omega^2(k)\eta = 0, \quad (18)$$

$$\omega^2 = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} |k| \left[1 + \frac{Tk^2}{g(\rho_2 - \rho_1)} - \frac{\varepsilon E^2 |k|}{4\pi g(\rho_2 - \rho_1)} \right] \quad (19)$$

В дальнейшем предполагается, что горизонтальная граница раздела устойчива (электрическое поле докритическое), т. е. при всех k выполняется условие $\omega^2 > 0$, что обеспечивается неравенством

$$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi \sqrt{g(\rho_2 - \rho_1)} T} < 1 \quad (20)$$

Решение уравнения (18) с учетом начальных условий (10) записывается так

$$\eta^*(k, t) = A_1 \cos \omega t; \quad A_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad (21)$$

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k) \cos \omega t e^{-ikx} dk$$

Для дальнейшего исследования границы раздела двух жидкостей не требуется явного выражения потенциалов φ_1 и φ_2 , поэтому они здесь не приводятся.

Проведем вычисления для конкретной начальной формы границы раздела, а именно примем, что

$$\eta(x, 0) = f(x) = \frac{A_0}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \quad (22)$$

Вычисляя A_1 , найдем

$$A_1 = A_0 a \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{4}\right) \quad (23)$$

$$\eta(x, t) = \frac{aA_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 k^2/4} \cos\left[\left(gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right)^{1/2} (1 + a^2 k^2 A - akB)^{1/2} t\right] \cos kx dk \quad (24)$$

$$A = \frac{T}{a^2 g (\rho_2 - \rho_1)}; \quad B = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi g a (\rho_2 - \rho_1)} \quad (25)$$

С помощью метода стационарной фазы можно получить асимптотическое выражение интеграла (25) при больших x и t , однако это выражение является малообозримым и не дает полного представления о развитии волнового движения, вызванного начальным отклонением границы раздела от равновесного положения.

Вычисляя групповую скорость волн, частота которых определяется равенством (20), найдем

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} [1 - 2Bk + 3Ak^2] \quad (26)$$

Если $B^2 < 3A$ при всех k , начальное возмущение генерирует волновой пакет, ширина которого по мере увеличения времени t монотонно возрастает.

Для устойчивости границы раздела необходимо выполнение условия $B^2/A < 4$. Если $4 > B^2/A > 3$, то имеется две корня: k_1 и k_2

$$k_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 3A}}{3A} \quad (27)$$

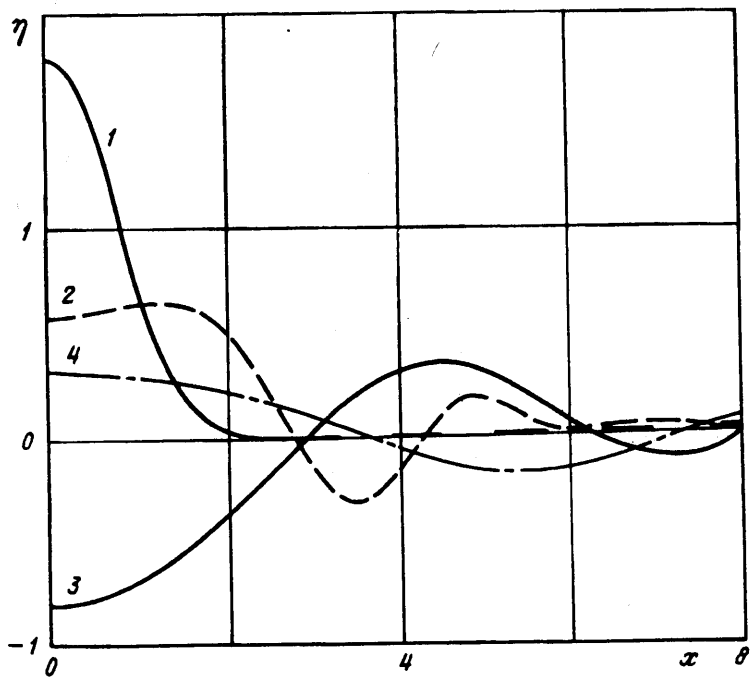
Начальное возмущение генерирует волновой пакет, ширина которого по мере удаления от начала координат изменяется немонотонно. Общая пространственно-временная картина водного поля существенно отличается от случая капиллярно-гравитационных волн.

Для того, чтобы исследовать пространственно-временную картину возвышения $\eta(x, t)$, определяемого интегралом (25), были проведены численные расчеты.

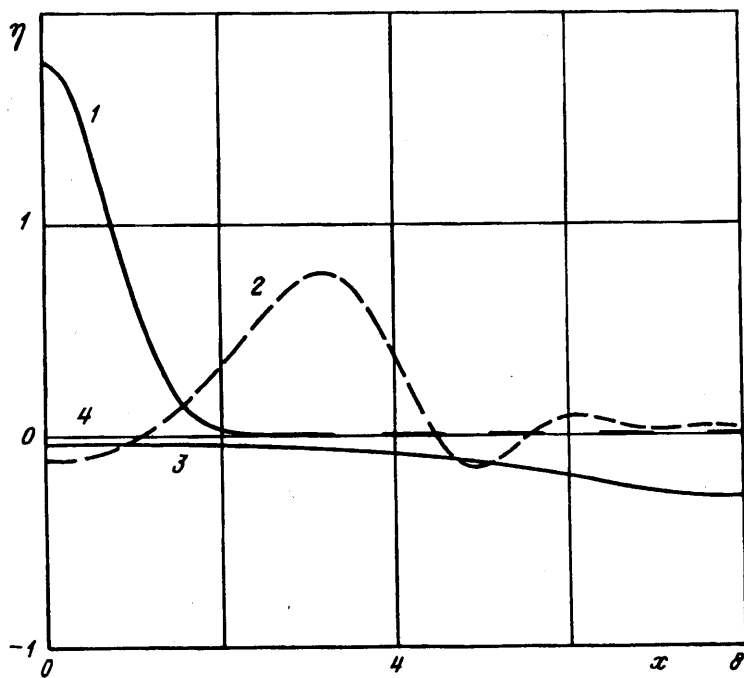
Табулированию подлежат интеграл

$$\frac{2\pi\eta(x, t)}{A} = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2/4} \cos\left[\left(\xi + A\xi^2 - B\xi^2\right)^{1/2} \tau\right] \cos \xi X dx \quad (28)$$

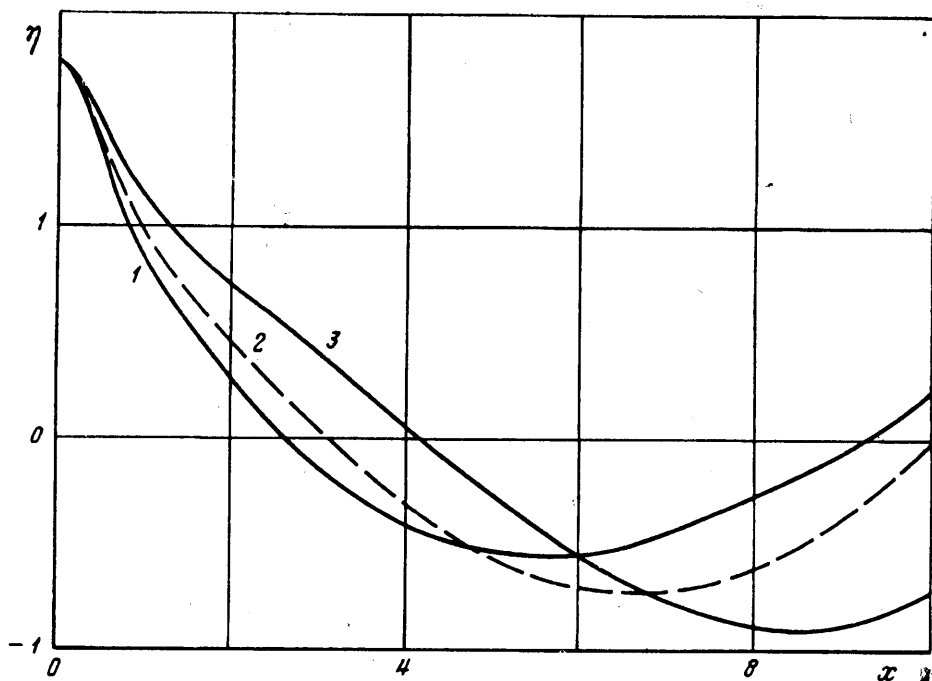
$$\tau = \left(\frac{g}{a} - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right)^{1/2} t; \quad \xi = ak; \quad X = \frac{x}{a}$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 2 представлена форма свободной поверхности в зависимости от безразмерного времени при $A=1$ и $B=1,8$. Кривые 1—4 фиг. 2 соответствуют безразмерному времени $\tau=0; 1,2; 5; 12$.

Видно, что из первоначального поднятия развивается волновой пакет, причем в центре ($x=0$) имеет место затухающий волновой процесс, обусловливаемый тем, что энергия первоначального поднятия распространяется на все большие расстояния. Представленная пространственно-временная картина существенно отличается от случая капиллярно-гравитационных волн, который приведен на фиг. 3 для тех же значений τ .

На фиг. 4 представлено значение $\eta(0, t)$ в зависимости от параметра B . Кривые 1—3 фиг. 3 соответствуют значениям $B=1,5; 1,8; 1,9$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17594).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lord Rayleigh*. On the equilibrium of liquid conducting masses charges with electricity//*Phil. Mag.* 1882. V. 14. P. 184—186.
2. *Taylor G. I., McEwan A. D.* The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field// *J. Fluid Mech.* 1965. V. 22. Pt 1. P. 1—15.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.XII.1993