

УДК 532.59

© 1995 г. С. И. ГОРЛОВ

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ О РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ВИХРЕИСТОЧНИКА В МНОГОСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Предложен метод решения линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости, имеющей произвольное конечное число слоев. В качестве примера решена задача о движении вихреисточника заданной интенсивности в трехслойной жидкости. Получены формулы для комплексных скоростей и гидродинамических реакций.

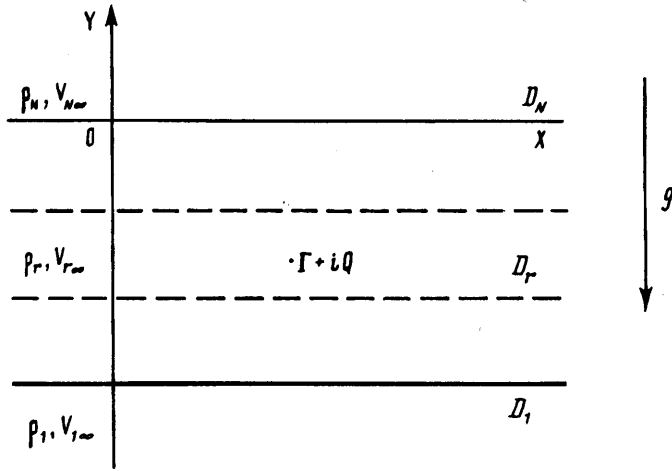
Поверхностные и внутренние волны, генерируемые погруженным в жидкость телом, являются предметом исследований многих авторов. В работе [1] содержится обширный обзор литературы, посвященный данному вопросу. Задача о движении вихреисточника в многослойной жидкости — основная в этой области, так как позволяет решать широкий класс краевых задач о движении тела вблизи границ раздела сред. Решение задачи о генерации поверхностных и внутренних волн движущимся с постоянной скоростью вихреисточником получено до сих пор лишь в некоторых частных случаях. Н. Е. Кочиным исследовано движение вихреисточника вблизи границы раздела двух сред [2], М. Д. Хаскинд и А. Н. Тихонов рассмотрели вопрос о движении вихреисточника под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины [3, 4], В. С. Войценья решил задачу для вихря, движущегося вблизи границы раздела двух сред, одна из которых имеет свободную поверхность [5, 6].

1. Рассмотрим задачу о движении вихреисточника интенсивности $\Gamma + iQ$ с постоянной скоростью в многослойной жидкости. Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, тяжелая и однородная в каждом слое D_k ($k = 1, \dots, N$, нумерация слоев начинается снизу). Слои D_1 и D_N полубесконечны. Введем инерциальную систему координат, связанную с вихреисточником, располагая ось x вдоль невозмущенной нижней границы верхнего слоя (фиг. 1). Задачу будем рассматривать в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Введем обозначения: g — ускорение силы тяжести, ρ_k , $V_{k\infty}$ — плотность и скорость жидкости на бесконечности перед вихреисточником в слое D_k , H_k — отстояние невозмущенной границы раздела областей D_k и D_{k+1} от оси x .

Пусть вихреисточник расположен в слое D_r в точке $z_0 = x_0 - iy_0$ ($r = 1, \dots, N$).

Для описания возмущенного движения жидкости в слое D_k введем комплексные скорости $\bar{V}_k(z)$. Потребуем, чтобы функции $\bar{V}_k(z)$ были аналитичны в области D_k , за исключением точки z_0 при $k = r$, и удовлетворяли условиям непрерывности нормальной составляющей скорости и давления при переходе через границу раздела областей D_k и D_{k+1} и затухания возмущенных скоростей в бесконечности перед вихреисточником

$$\operatorname{Im} \bar{V}_k(z) = \operatorname{Im} \bar{V}_{k+1}(z) \quad z = x - iH_k \quad (k = 1, \dots, N) \quad (1.1)$$



Фиг. 1

$$\operatorname{Re} \left\{ m_{k k+1}^k \frac{d\bar{V}_k(z)}{dz} - m_{k k+1}^{k+1} \frac{d\bar{V}_{k+1}(z)}{dz} + i v_k \bar{V}_k(z) \right\} = 0,$$

$$z = x - iH_k \quad (k = 1, \dots, N) \quad (1.2)$$

$$m_{k k+1}^k = \frac{\rho_k V_{k\infty}}{\rho_k V_{k\infty} + \rho_{k+1} V_{k+1\infty}}, \quad m_{k k+1}^{k+1} = \frac{\rho_{k+1} V_{k+1\infty}}{\rho_k V_{k\infty} + \rho_{k+1} V_{k+1\infty}} \quad (1.3)$$

$$v_k = \frac{g}{V_{k\infty}} \frac{\rho_k - \rho_{k+1}}{\rho_k V_{k\infty} + \rho_{k+1} V_{k+1\infty}}, \quad m_{k k+1} = m_{k k+1}^k - m_{k k+1}^{k+1}$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \bar{V}_k(z) = 0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (1.4)$$

Полубесконечные области D_1 и D_N могут быть либо вакуумом, либо твердой недеформируемой средой. В этих случаях условия (1.1), (1.2) принимают вид

$$\operatorname{Im} \bar{V}_k(z) = 0 \quad z = x - iH_k \quad (k = 2, N - 1)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{d\bar{V}_k(z)}{dz} + i v \bar{V}_k(z) \right\} = 0 \quad (z = x - iH_k \quad k = 2, N - 1), \quad v = \frac{g}{V_{N-1\infty}^2}$$

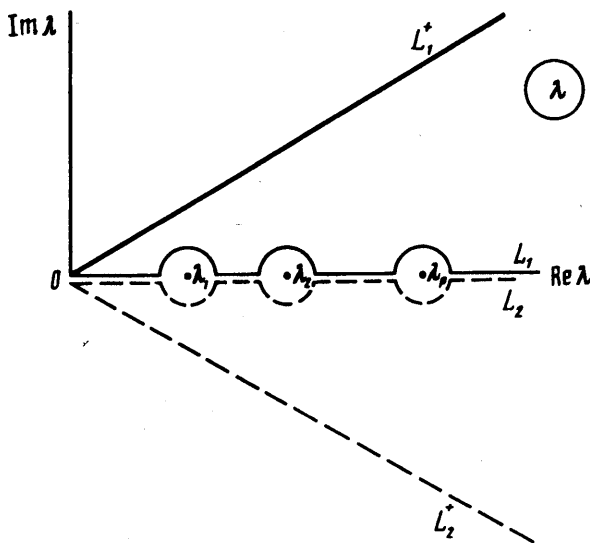
2. Будем искать комплексные скорости $\bar{V}_k(z)$ в виде $\bar{V}_k(z) = \bar{V}_k^\circ(z) + \bar{V}_k^1(z)$, где $\bar{V}_k^\circ(z)$, $\bar{V}_k^1(z)$ удовлетворяют соотношениям (1.1), (1.2), а функции $\bar{V}_k^1(z)$, кроме того, обеспечивают выполнение условия (1.4).

Построим сначала решение задачи о движении вихря заданной интенсивности Γ . Поставленная краевая задача для функций $\bar{V}_k^\circ(z)$ позволяет применить метод Фурье. С этой целью будем искать неизвестные функции $\bar{V}_k^\circ(z)$ в виде

$$\bar{V}_1^\circ(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\delta_{1r}}{z - z_0} + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty C_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} d\lambda \quad (2.1)$$

$$\bar{V}_k^\circ(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\delta_{kr}}{z - z_0} + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty (C_k(\lambda) e^{-\lambda z_1} + D_k(\lambda) e^{\lambda z_2}) d\lambda \quad (k = 2, \dots, N - 1) \quad (2.2)$$

$$\bar{V}_N^\circ(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\delta_{Nr}}{z - z_0} + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty D_N(\lambda) e^{\lambda z_2} d\lambda \quad (2.3)$$



Фиг. 2

Здесь коэффициенты $C_k(\lambda) = A_k(\lambda) + iB_k(\lambda)$, $D_k(\lambda) = E_k(\lambda) + iF_k(\lambda)$, где $k = 1, \dots, N$, а $A_k(\lambda)$, $B_k(\lambda)$, $E_k(\lambda)$, $F_k(\lambda)$ — вещественные функции, $z_1 = z - \bar{z}_0$, $z_2 = z - z_0$. Воспользовавшись тем, что [3]

$$\frac{1}{z_2} = -i\beta \int_0^{\infty} e^{\beta \lambda z_2} d\lambda, \quad \beta = \text{sign}(y - y_0)$$

и подставляя выражения (2.1)—(2.3) в граничные условия (1.1)—(1.2), получим две независимые системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_k(\lambda)$, $E_k(\lambda)$ и $B_k(\lambda)$, $F_k(\lambda)$ соответственно. Решение второй системы дает $B_k(\lambda) = F_k(\lambda) = 0$. Первая система определяет функции $A_k(\lambda)$ и $E_k(\lambda)$, не равные нулю в общем случае. При этом определитель системы $T_k(\lambda)$ может обращаться в нуль при некоторых значениях $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_p$. Коэффициенты $A_k(\lambda)$ и $E_k(\lambda)$ в этом случае принимают бесконечные значения и интеграл в выражении (2.1)—(2.3) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Перейдем к построению функций $\bar{V}_k(z)$. Рассмотрим вспомогательные интегралы, удовлетворяющие условиям (1.1), (1.2)

$$I_1(z) = \frac{\Gamma}{\pi} \int_{L_1} A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} d\lambda$$

$$I_k(z) = \frac{\Gamma}{\pi} \int_{L_1} A_k(\lambda) e^{-\lambda z_1} d\lambda + \frac{\Gamma}{\pi} \int_{L_2} E_k(\lambda) e^{\lambda z_2} d\lambda \quad k = 2, \dots, N-1 \quad (2.4)$$

$$I_N(z) = \frac{\Gamma}{\pi} \int_{L_2} E_N(\lambda) e^{\lambda z_2} d\lambda$$

В этих выражениях контур L_1 состоит из отрезков $(0, \lambda_1 - \varepsilon)$, $(\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_2 - \varepsilon)$, \dots , $(\lambda_p + \varepsilon, +\infty)$ и полуокружностей бесконечно малого радиуса ε с центрами в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, лежащих в верхней полуплоскости. Контур L_2 представляет собой зеркальное отражение L_1 относительно оси λ . В силу аналитичности подынтегральных функций в (2.4) контуры L_1, L_2 заменим на

лучи L_1^+ , L_2^+ и соответствующие дуги окружности бесконечно большого радиуса (фиг. 2). Совершая соответствующий предельный переход в (2.4), имеем

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} I_k(z) = 0 \quad (k = 1, \dots, N)$$

Полагая теперь $\varepsilon \rightarrow 0$, из (2.4) получим

$$I_1(z) = \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} d\lambda - \Gamma i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1})$$

$$I_k(z) = \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty A_k(\lambda) e^{-\lambda z_1} d\lambda - \Gamma i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (A_k(\lambda) e^{-\lambda z_1}) + \\ + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty E_k(\lambda) e^{\lambda z_2} d\lambda + \Gamma i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (E_k(\lambda) e^{\lambda z_2}) \quad (k = 2, \dots, N-1)$$

$$I_N(z) = \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty E_N(\lambda) e^{\lambda z_2} d\lambda + \Gamma i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (E_N(\lambda) e^{\lambda z_2})$$

Последние члены в этих выражениях выбираем в качестве функций $\bar{V}_k(z)$. Можно показать, что они удовлетворяют условиям (1.1), (1.2), а для суммы $\bar{V}_k^\circ(z) + \bar{V}_k(z)$ выполняется условие (1.4). Появление функций $\bar{V}_k(z)$ обусловлено наличием свободных волн.

Окончательное решение задачи (1.1)–(1.4) имеет вид

$$\bar{V}_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\delta_{1r}}{z - z_0} + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} d\lambda - \Gamma i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (A_1(\lambda) e^{-\lambda z_1})$$

$$\bar{V}_k(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\delta_{kr}}{z - z_0} + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty (A_k(\lambda) e^{-\lambda z_1} + E_k(\lambda) e^{\lambda z_2}) d\lambda -$$

$$- \Gamma i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (A_k(\lambda) e^{-\lambda z_1}) + \Gamma i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (E_k(\lambda) e^{\lambda z_2})$$

(2.5)

$$\bar{V}_N(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\delta_{Nr}}{z - z_0} + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty E_N(\lambda) e^{\lambda z_2} d\lambda + \Gamma i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (E_N(\lambda) e^{\lambda z_2})$$

Решение задачи для источника находится аналогичным образом.

3. В качестве примера рассмотрим трехслойную жидкость, полагая, что вихреисточник интенсивности $C = \Gamma + iQ$ движется в среднем слое толщины H . В соответствии с (2.5) решение этой задачи имеет вид

$$\bar{V}_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_1(\lambda) e^{-\lambda z_1} d\lambda - i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (G_1(\lambda) e^{-\lambda z_1})$$

$$\bar{V}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{C}{z - z_0} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (G_2(\lambda) e^{-\lambda z_1} + G_3(\lambda) e^{\lambda z_2}) d\lambda -$$

$$- i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (G_2(\lambda) e^{-\lambda z_1}) + i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (G_3(\lambda) e^{\lambda z_2})$$

(3.1)

$$\bar{V}_3(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_4(\lambda) e^{\lambda z_2} d\lambda + i \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} (G_4(\lambda) e^{\lambda z_2})$$

$$G_1(\lambda) = m_{12}^2 \lambda (\bar{C} (\lambda m_{23} + v_2) + C (\lambda - v_2) e^{2\lambda v_0}) e^{2\lambda H} / T(\lambda)$$

$$G_2(\lambda) = 1/2 (\lambda m_{23} + v_2) (\bar{C} (\lambda - v_1) e^{2\lambda H} - C (\lambda m_{12} - v_1) e^{2\lambda v_0}) / T(\lambda)$$

$$G_3(\lambda) = 1/2 (\lambda m_{12} - v_1) (\bar{C} (\lambda - v_2) e^{2\lambda v_0} + C (\lambda m_{23} + v_2)) / T(\lambda)$$

$$G_4(\lambda) = m_{23}^2 \lambda (\bar{C} (\lambda m_{12} - v_1) e^{2\lambda v_0} - C (\lambda - v_1) e^{2\lambda H}) / T(\lambda)$$

$$T(\lambda) = (\lambda m_{12} - v_1) (\lambda m_{23} + v_2) + (\lambda - v_1) (\lambda - v_2) e^{2\lambda H}$$

В выражениях (3.1) λ_j — корни уравнения $T(\lambda) = 0$. Анализ данного уравнения показывает, что оно имеет либо один, либо два корня. Два корня, отличных от нуля, существуют лишь в том случае, когда $v_1(1 + m_{23}) + v_2(1 - m_{12}) - 2Hv_1v_2 < 0$.

Воспользовавшись методом, указанным в [7], получим формулу для волнового сопротивления R_x и подъемной силы R_y вихреисточника, движущегося в трехслойной жидкости

$$R_x = -\rho_2 Q V_{2\infty} + \sum_{j=1}^p \frac{\rho_2}{T'(\lambda_j)} \left[\frac{\Gamma^2 + Q^2}{2} (\lambda_j m_{23} + v_2) (\lambda_j - v_1) \times \right. \\ \times e^{2\lambda_j(H-v_0)} - (\Gamma^2 - Q^2) (\lambda_j m_{23} + v_2) (\lambda_j m_{12} - v_1) - \\ \left. - \frac{\Gamma^2 + Q^2}{2} (\lambda_j m_{12} - v_1) (\lambda_j - v_2) e^{2\lambda_j v_0} \right] \quad (3.2)$$

$$R_y = -\rho_2 \Gamma V_{2\infty} -$$

$$- \frac{\rho_2}{2\pi} (\Gamma^2 + Q^2) \int_0^\infty \frac{(\lambda m_{23} + v_2) (\lambda - v_1) e^{2\lambda(H-v_0)} + (\lambda m_{12} - v_1) (\lambda - v_2) e^{2\lambda v_0}}{(\lambda m_{12} - v_1) (\lambda m_{23} + v_2) + (\lambda - v_1) (\lambda - v_2) e^{2\lambda H}} d\lambda$$

4. Рассмотрим некоторые предельные случаи задачи о движении вихреисточника в трехслойной жидкости.

Пусть вихреисточник движется под границей раздела двух сред. В этом случае $H = \infty$, а слой $k = 1$ вырождается в бесконечно удаленную точку.

Совершая предельный переход в (3.1), получим

$$\bar{V}_1(z) = 0$$

$$\bar{V}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{C}{z - z_0} + \frac{m_{23}}{2\pi i} \frac{\bar{C}}{z - \bar{z}_0} + \frac{\bar{C} v_2 m_{23}^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z_1}}{\lambda - v_2} d\lambda - \bar{C} v_2 m_{23}^2 i e^{-v_2 z_1}$$

$$\bar{V}_3(z) = \frac{m_{23}^2}{\pi i} \frac{1}{z - z_0} - \frac{C v_2 m_{23}^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z_2}}{\lambda - v_2} d\lambda - C v_2 m_{23}^2 i e^{v_2 z_2} \quad (4.1)$$

В этом случае $T(\lambda)$ имеет два корня: $\lambda = v_1$ и v_2 . Однако особенность в подынтегральных выражениях (4.1) возникает только при $\lambda = v_2$, так как функции $G_k(\lambda)$ непрерывны при $\lambda = v_1$. Это решение полностью соответствует результатам, приведенным в [8], а формулы (3.2) переходят в выражения, аналогичные [7].

Другой предельный случай — движение вихреисточника под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. В этом случае $\rho_3/\rho_2 = 0$, $\rho_2/\rho_1 = 0$, $v_2 = v = g/V_{2\infty}^2$. Совершая соответствующий предельный переход в (3.1), получим

$$\bar{V}_1(z) = \bar{V}_3(z) = 0$$

$$\bar{V}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{C}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \frac{\bar{C}}{z - \bar{z}_0 + 2Hi} -$$

$$- \int_0^{\infty} \frac{\lambda + \nu \operatorname{sh} \lambda(H - y_0) \cos \lambda(z - x_0 + iH) \Gamma - \operatorname{ch} \lambda(H - y_0) \sin \lambda(z - x_0 + iH) Q}{\lambda \operatorname{ch} \lambda H - \nu \operatorname{sh} \lambda H} e^{-\lambda H} d\lambda +$$

$$+ \frac{\Gamma \nu \operatorname{sh} \lambda_1 (H - y_0) \sin \lambda_1 (z - x_0 + iH) + Q \nu \operatorname{ch} \lambda_1 (H - y_0) \cos \lambda_1 (z - x_0 + iH)}{\nu H - \operatorname{ch}^2 \lambda_1 H}$$

Здесь λ_1 — корень уравнения $\nu \operatorname{th} \lambda H = \lambda$, который существует при $\nu H > 1$. Полученные результаты совпадают с решениями [3, 4].

В заключение рассмотрим вихреисточник в канале с твердыми стенками, когда $\rho_2/\rho_3 = 0$ и $\rho_2/\rho_1 = 0$. Совершая в (3.1) предельный переход и преобразуя несобственные интегралы с учетом [9], получим

$$\bar{V}_1(z) = \bar{V}_3(z) = 0$$

$$\bar{V}_2(z) = \frac{1}{4H} \left[C \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \bar{z}_0)}{2Hi} - \bar{C} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - z_0)}{2Hi} \right]$$

Результат совпадает с решением, приведенным в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степаняц Ю. А., Стурова И. В., Теодорович Э. В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. МЖГ. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 92—179.
2. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел: Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. С. 105—182.
3. Тихонов А. Н. Плоская задача о движении крыла под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. ОТН. 1940. № 4. С. 57—78.
4. Хаскинд М. Д. О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 1. С. 67—78.
5. Войцены В. С. Плоская задача о поступательном движении тела под поверхностью раздела двух жидкостей // Тр. Новочеркас. политехн. ин-та. 1959. № 104. С. 95—111.
6. Войцены В. С. О поступательном движении тела над поверхностью раздела двух жидкостей // Изв. вузов. Математика. 1963. № 2. С. 20—30.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1. 583 с.
8. Басин М. А., Шадрин В. П. Гидроаэродинамика крыла вблизи границы раздела сред. Л.: Судостроение, 1980. 304 с.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
10. Целищев В. А. Вывод интегрального уравнения краевой задачи о движении тонкого профиля в канале конечной глубины // Гидродинамика подводного крыла. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. С. 28—35.

Омск

Поступила в редакцию
4. III. 1994