

УДК 532.59

© 1995 г. А. Е. БУКАТОВ, Д. Д. ЗАВЬЯЛОВ

НАБЕГАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА КРОМКУ СЖАТОГО ЛЬДА

Рассмотрено набежание поверхностных волн малой амплитуды на кромку сплошного сжатого ледяного покрова в бассейне конечной постоянной глубины. Дан анализ влияния цилиндрической жесткости и величины сжимающего усилия на зависимость амплитудных коэффициентов отражения и прохождения от периода набегающей волны.

Исследованию изгибно-гравитационных волн в жидкости с однородным ледяным покровом, моделируемым тонкой упругой пластинкой, посвящены работы [1, 2]. Рассеяние волн на неоднородностях тонкой упругой пластинки, покрывающей всю поверхность бесконечно глубокой жидкости, изучалось в [3, 4]. Дифракция набегающих из бесконечности волн на неподвижный твердый док рассмотрена в [5]. Влияние кромки битого льда на распространение гравитационных волн анализировалось в [6]. Набежание волн по нормали на кромку сплошного льда в бесконечно глубоком бассейне изучалось в [7]. Задачи о нормальном и косом падении волн на кромку сплошного льда для бассейна конечной глубины без оценки влияния ледового сжатия рассмотрены соответственно в [8, 9] и [10].

1. Пусть из области свободной поверхности бассейна конечной глубины H по нормали к прямолинейной кромке плавающего сплошного сжатого льда набегают плоская прогрессивная волна заданной частоты ω . Движение жидкости будем считать потенциальным. Выберем начало координат на дне бассейна, направив ось Z вертикально вверх. Слева от вертикальной оси ($x < 0$) расположена область открытой воды с потенциалом скорости $\Phi_1(x, z, t) = \varphi_1(x, z) e^{i\omega t}$, а справа ($x > 0$) — область, покрытая льдом, с потенциалом скорости $\Phi_2(x, z, t) = \varphi_2(x, z) e^{i\omega t}$. Рассмотрим зависимость распределений амплитудных коэффициентов отражения и прохождения возмущений по периоду набегающей волны от глубины бассейна, нормальной упругости льда и величины сжимающего усилия.

В выбранной системе координат имеем следующую задачу:

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < z < H \quad (1.1)$$

$$\Delta \varphi_2 = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < z < H \quad (1.2)$$

$$z = H: g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \omega^2 \varphi_1 = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (1.3)$$

$$D_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z \partial x^4} - Q_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z \partial x^2} + (1 - \kappa_1 \omega^2) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi_2 = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (1.4)$$

$$z = 0: \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

$$D_1 = \frac{Eh^3}{12\rho g(I - \nu^2)}, \quad \kappa_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}$$

Здесь E , h , ρ_1 , ν — модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда, Q — усилие ледового сжатия, ρ — плотность воды,

g — ускорение свободного падения. Кроме того, на границе контакта областей удовлетворим условиям непрерывности потенциалов и скоростей горизонтальных волновых течений, а на кромке льда — условиям свободного края, заключающимся в равенстве нулю изгибающего момента и перерезывающей силы [11]

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad 0 < z < H, \quad x = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z \partial x^2} = \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial z \partial x^3} = 0, \quad z = H, \quad x = 0 \quad (1.7)$$

Применяя метод разделения переменных к (1.1), (1.3), (1.5) и (1.2), (1.4), (1.5), получим дисперсионные соотношения

$$\omega^2 = rg \operatorname{th}(rH) \quad (1.8)$$

$$\omega^2 = \frac{(D_1 k^4 - Q_1 k^2 + 1) kg \operatorname{th}(kH)}{1 + \alpha_1 kg \operatorname{th}(kH)} \quad (1.9)$$

связывающие фазовые характеристики волновых возмущений в областях $x < 0$ и $x > 0$ соответственно. Решением уравнения (1.8) являются два действительных $\pm r$ и счетное множество мнимых $\pm ir_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ корней. Уравнение (1.9) кроме двух действительных $\pm k$ имеет две пары комплексно-сопряженных $\pm \beta \pm i\alpha$ и счетное множество мнимых $\pm ik_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ корней. Учитывая ограниченность потенциалов Φ_1 при $x \rightarrow \infty$, Φ_2 при $x \rightarrow -\infty$ и отсутствие набегающей на кромку незатухающей волны из области, покрытой льдом, запишем

$$\varphi_1 = Ie^{-irx} \operatorname{ch}(rz) + R^* e^{irx} \operatorname{ch}(rz) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{r_n x} \cos(r_n z) \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & T^* e^{-ikx} \operatorname{ch}(kz) + T_1 e^{-(\alpha+i\beta)x} \cos[(\alpha+i\beta)z] + T_2 e^{-(\alpha-i\beta)x} \cos[(\alpha-i\beta)z] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k_n x} \cos(k_n z) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Все амплитудные коэффициенты потенциалов φ_1, φ_2 — комплексные. Из них I, R^*, T^* представляют падающую, отраженную и прошедшую незатухающие прогрессивные волны, характеризуемые корнями $-r, r$ и $-k$ соответствующих дисперсионных уравнений. Коэффициенты $T_{1,2}$ отвечают затухающим прогрессивным волнам, обусловленным изгибной жесткостью льда. Их определяют корни $\pm \beta + i\alpha$ уравнения (1.9). Краевые волны [1, 8], существующие по обе стороны от кромки и экспоненциально затухающие с удалением от нее, представлены корнями $-ir_n, ik_n$ уравнений (1.8), (1.9) и коэффициентами A_n, B_n в областях $x < 0$ и $x > 0$ соответственно.

2. Будем удовлетворять граничным условиям (1.6) (1.7) с помощью минимизации функционала ошибок. Для перехода к поиску безусловного экстремума запишем функционал ошибок [8] в виде

$$\begin{aligned} \epsilon = & \delta \int_0^H |\varphi_1 - \varphi_2|^2 dz + \mu \int_0^H \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|^2 dz + \\ & + \gamma \left\{ \left(\frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z \partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial z \partial x^3} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

После подстановки (1.10), (1.11) в (2.1) и вычисления имеющихся там интегралов задача минимизации при условии единичной амплитуды потенциала падающей волны сводится к решению матричного уравнения

$$(\delta Q_p + \mu Q_d + \gamma Q_e + \eta K) c = \eta r \quad (2.2)$$

Здесь c — вектор-столбец реальных и мнимых частей искоемых амплитудных коэффициентов потенциалов (1.10), (1.11), матрицы Q_p , Q_d и Q_e характеризуют соответственно невязки при склейке потенциалов, их производных и при выполнении условий свободного края на кромке льда, v — вектор, элементы которого расставлены так, что амплитуде I соответствует единица, а остальным коэффициентам — нули, K — квадратичная матрица, для которой $Kc = v$, δ , μ , γ , η — множители Лагранжа.

Так как матрица в левой части (2.2) слабообусловленная и разреженная, то реализация прямых методов решения линейных систем уравнений типа (2.2) может привести к чрезмерным вычислительным затратам [12] и в данном случае неэффективна. Наиболее целесообразным представляется использование итерационных методов, в частности метода сопряженных градиентов [13]. Применяя его к решению системы (2.2), получим потенциалы скорости (1.10), (1.11) волновых возмущений в свободной от льда области бассейна и в области, покрытой льдом. Из соответствующих кинематических соотношений определим теперь амплитудные коэффициенты отражения волн от кромки и прохождения через нее

$$R = \frac{|R^*|}{|I|}, \quad T = \frac{k \operatorname{sh}(kH)}{r \operatorname{sh}(rH)} \frac{|T^*|}{|I|}$$

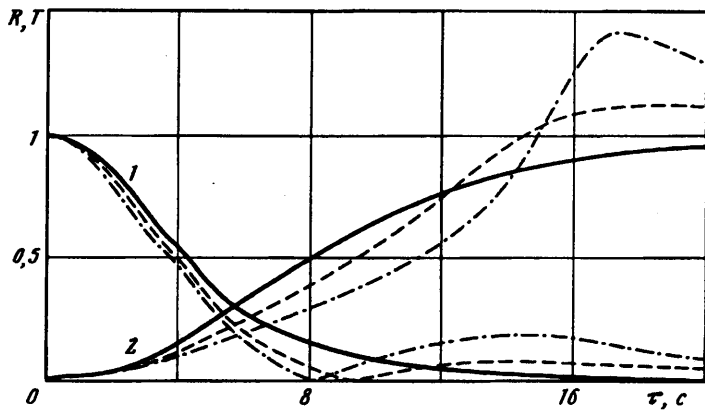
3. Для количественной оценки влияния ледового сжатия на волновые возмущения, формируемые при набегаении прогрессивной волны на кромку льда, проводились численные расчеты при значениях $h = 1\text{ м}$; $\rho = 1025\text{ кг/м}^3$; $\rho_l = 870\text{ кг/м}^3$; $\nu = 0,33$. Глубина бассейна, модуль нормальной упругости и величина Q_1 , характеризующая степень сжимающего усилия, менялись в пределах $10\text{ м} < H < 75\text{ м}$, $3 \cdot 10^5\text{ Н/м}^2 < E < 3 \cdot 10^9\text{ Н/м}^2$, $0 < Q_1 < 1,4\sqrt{D_1}$ соответственно. Выбранная предельная величина $Q_1 = 1,4\sqrt{D_1}$ не превосходит значения Q_0 , в окрестности которого происходит смена структуры волновых возмущений и при определенных условиях возможен разлом льда [14, 15].

Количество учитываемых краевых мод при численных расчетах выбиралось из условия удовлетворения заданной точности соблюдения баланса плотности потоков энергии через замкнутую поверхность, ограничивающую выделенный объем жидкости. Объем ограничен частью поверхности бассейна, участком непроницаемого дна и вертикальными границами, равноудаленными от кромки. Учет плотности потока энергии J в упругом равномерно сжатом ледяном покрове при его изгибных колебаниях с амплитудой ξ осуществлялся [11] по формуле

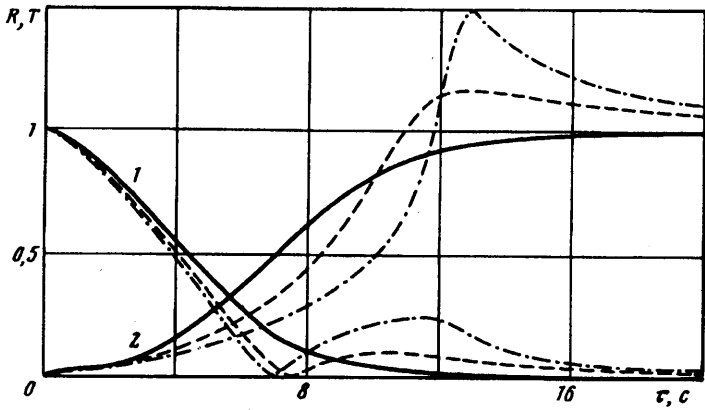
$$J = \rho g \left[D_1 \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \right) - Q_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right]$$

Графики на фиг. 1—3 иллюстрируют распределения амплитудных коэффициентов отражения R (линии 1) и прохождения T (линии 2) по периоду τ набегающей волны. Влияние степени ледового сжатия на $R(\tau)$ и $T(\tau)$ характеризуют кривые на фиг. 1—3, приведенные для глубин бассейна 10, 25, 75 м соответственно при $E = 3 \cdot 10^9\text{ Н/м}^2$. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии отвечают здесь величинам $Q_1/\sqrt{D_1}$, равным 0; 1,0; 1,4. Существует такое значение периода колебаний $\tau = \tau_1$, при котором ледовое сжатие не оказывает влияния на амплитуду прошедшей волны. Увеличение Q приводит к росту τ_1 , в то время как увеличение глубины бассейна уменьшает его. Существует также период τ_2 , когда ледовое сжатие не меняет и амплитуду отраженной волны. С ростом Q величина τ_2 уменьшается. Влияние изменения H на τ_2 качественно аналогично влиянию на τ_1 . Отметим, что $\tau_1 > \tau_2$. Рост Q приводит к уменьшению T при $0 < \tau < \tau_1$ и R при $0 < \tau < \tau_2$.

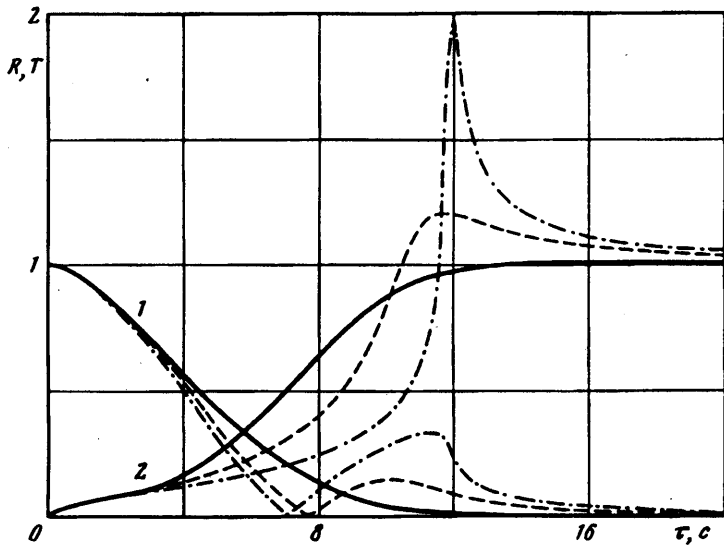
Вне этих интервалов значений периодов набегающей волны соответствующие амплитудные коэффициенты отражения и прохождения увеличиваются с усилением ледового сжатия. Причем амплитуда как прошедшей, так и отраженной



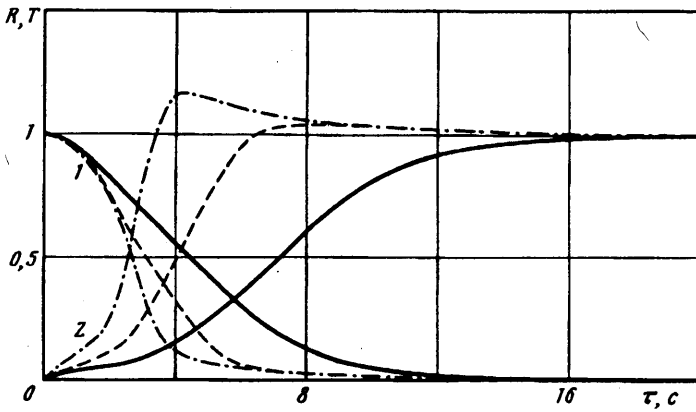
Фиг. 1



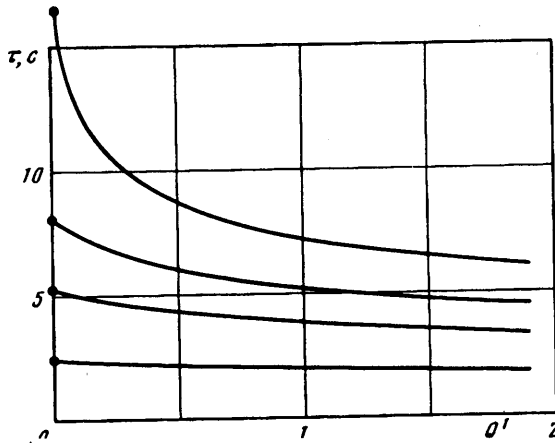
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

прогрессивных волн имеет максимум на указанных интервалах периодов. Он располагается вблизи точки перегиба дисперсионной кривой $\tau(k)$ для свободных изгибно-гравитационных волн. Его величина растет с увеличением степени ледового сжатия и глубины бассейна. Кроме того, имеется период набегающей волны, при котором практически отсутствует отражение от кромки сжатого льда. Он меньше величины τ_2 и убывает с ростом Q и H .

Ледовое сжатие обуславливает превышение амплитуды прошедшей волны над амплитудой падающей, начиная с некоторого ее периода $\tau = \tau_*$. Превышение может достигать 2 раз и сопровождается уменьшением длины прошедшей волны, которая при $\tau > \tau_0$ короче, чем длина падающей. Коэффициент прохождения T может быть больше единицы и при отсутствии сжимающих усилий в случае малой жесткости льда. Зависимость $R(\tau)$ при $Q = 0$ монотонно убывает для любых значений модуля упругости. Это иллюстрируют графики распределения R и T по τ , приведенные на фиг. 4 при отсутствии сжатия ($Q = 0$) сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями для значений модуля нормальной упругости $3 \cdot 10^9$; $3 \cdot 10^7$; $3 \cdot 10^5$ Н/м² соответственно. Период набегающей волны $\tau = \tau_*$, при котором ее амплитуда совпадает с амплитудой прошедшей, находится между величинами $\tau_0 = 2\pi/\omega(k_0)$, $\tau_3 = 2\pi/\omega(k_3)$, где k_0 и k_3 — положительные корни уравнений

$$D_1 k^4 - Q_1 k^2 - \kappa_1 k g \operatorname{th}(kH) = 0, \quad \omega''(k) = 0 \quad (3.1)$$

где $\omega(k)$ определяется формулой (1.9), штрих означает производную по k , $\tau_3 > \tau_0$. В приближении длинных ($kH \ll 1$) и коротких ($kH \gg 1$) волн значение k_0 определяется соответственно по формулам

$$k_0 = \sqrt{2aH + Q_1/D_1}, \quad k_0 = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b} \quad (3.2)$$

$$a = \frac{\kappa_1 g}{2D_1}, \quad b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{Q_1}{3D_1}\right)^3}$$

Если $Q = 0$, то для длинных волн $k_0 = \sqrt{2aH}$, а для коротких $k_0 = \sqrt[3]{2a}$.

Зависимость τ_0 от степени ледового сжатия $Q' = Q_1/\sqrt{D_1}$ при различных значениях модуля упругости льда характеризуют графики на фиг. 5. Линии по порядку снизу вверх соответствуют здесь значениям E (Н/м^2), равным $3 \cdot 10^5$; $3 \cdot 10^7$; $3 \cdot 10^8$; $3 \cdot 10^9$. Видно, что τ_0 убывает с увеличением степени ледового сжатия и растет с увеличением упругости льда.

Часть энергии падающей волны расходуется на возбуждение затухающих прикромочных возмущений. Поэтому пренебрежение прикромочными модами в формулах (1.10), (1.11) при оценке отражающей и пропускной способностей кромки сплошного сжатого льда может привести к существенным погрешностям на средних периодах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
2. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Влияние ледяного покрова на волновые движения//Мор. гидрофиз. исследования. Севастополь, 1971. № 2(52). С. 113—144.
3. Красильников В. Н. Рассеяние изгибных волн на неоднородностях упругой пластины//Акуст. журн. 1962. Т. 2. Вып. 8. С. 183—188.
4. Слепян Л. И., Фадеев В. М. Отражение, преломление и излучение волн в кусочно-однородной упругой системе, взаимодействующей с жидкостью//Докл. АН СССР. 1988. Т. 229. № 2. С. 325—329.
5. Витюк В. Ф. Дифракция поверхностных волн на доке конечной ширины//ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 32—40.
6. Weitz M., Keller J. B. Reflection of water waves from floating ice in water of finite depth//Comm. Pure and Appl. Math. 1950. V. 3. P. 305—318.
7. Гольдштейн Р. В., Марченко А. В. Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова//ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 924—930.
8. Fox C., Squire V. A. Reflection and transmission characteristics at the edge of shore fast sea ice//J. Geophys. Res. 1990. V. 95. № C7. P. 11629—11639.
9. Марченко А. В., Прохоров И. В. О линейных волнах в потоке жидкости с постоянной завихренностью, находящейся под ледяным покровом//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 242—249.
10. Марченко А. В. Дифракция поверхностных волн на трещине в ледяном покрове//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 93—102.
11. Красильников В. Н. Влияние тонкого упругого слоя на распространение звука в жидком полупространстве//Акуст. журн. 1960. Т. 6. С. 220—228.
12. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991. 354 С.
13. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 446 с.
14. Смирнов В. Н., Линьков Е. М. Сейсмические и наклономерные методы исследования ледяного покрова//Тр. ААНИИ. 1975. Т. 326. С. 137—142.
15. Букатов А. Е. Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости//Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 1. С. 93—98.