

УДК 532.582.81

© 1995 г. А. И. ЖУРОВ, А. Д. ПОЛЯНИН, Е. Д. ПОТАПОВ

ОБТЕКАНИЕ ПОРИСТОЙ ЧАСТИЦЫ СДВИГОВЫМ ПОТОКОМ

Исследуется обтекание пористой сферической частицы линейным осесимметричным стоксовым потоком. Получено точное аналитическое решение для компонент скорости жидкости и давления снаружи и внутри пористой частицы. Решение обобщено на случаи произвольного трехмерного линейного сдвигового, а также поступательно-сдвигового стоксовых течений. При стремлении коэффициента проницаемости частицы к нулю полученные решения переходят в соответствующие решения для непроницаемой частицы.

Задача об обтекании сферической капли (в предельных случаях переходящей в газовый пузырь и непроницаемую сферу) поступательным стоксовым потоком рассмотрена, например, в [1, 2]. Решение задачи об обтекании пористой сферической частицы поступательным стоксовым потоком дано в [3]. Обтекание сферической капли линейным деформационно-сдвиговым стоксовым потоком исследовано в [2].

1. Постановка задачи. Произвольное стационарное поле скоростей $v_*(r_*)$ несжимаемой жидкости в окрестности некоторой точки $r_* = 0$, принятой за начало отсчета пространственных координат, приближенно можно представить в виде двух членов разложения в ряд Тейлора [2, 4]

$$v_*(r_*) = v_*(0) + G^* r_*, \quad G^* = \|G_{ij}^*\| = \left\| \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{r_*=0} \right\|, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

где G_{ij}^* — компоненты матрицы сдвига. Вследствие несжимаемости жидкости сумма диагональных элементов равна нулю: $G_{11}^* + G_{22}^* + G_{33}^* = 0$.

Для частиц, размеры которых много меньше характерного пространственного масштаба неоднородности поля течения, распределение скоростей (1.1) при решении задач о вязком обтекании частицы соответствующим потоком жидкости может рассматриваться как распределение скоростей вдали от частицы. Частный случай $G^* = 0$ соответствует однородному поступательному потоку (для пористой сферической частицы этот случай рассмотрен в [3]), а $v_*(0) = 0$ — произвольному линейному сдвиговому потоку.

Рассмотрим задачу о стационарном обтекании пористой сферической частицы радиуса a линейным сдвиговым стоксовым потоком. Исследование будем проводить в безразмерном виде. В качестве характерных масштабов длины, скорости и давления выбираем величины a , v_0 и p_0 (смысл v_0 и p_0 будет объяснен ниже). Считаем, что центр частицы находится в начале координат $r = 0$.

Движение жидкости снаружи частицы (внешняя задача) описывается уравнениями Стокса

$$\Delta v = \text{grad } p, \quad \text{div } v = 0 \quad (1.2)$$

где $v = v_*/v_0$ и $p = p_*/p_0$ — безразмерные скорости и давление жидкости вне частицы. Для фильтрационного течения внутри частицы (внутренняя задача) справедлив закон Дарси

$$V = -k \text{ grad } P, \quad \text{div } V = 0 \quad (1.3)$$

где V и P — безразмерные скорость и давление жидкости внутри частицы, k — коэффициент проницаемости частицы, обезразмеренный на a^2 .

Вдали от частицы должны удовлетворяться соответствующие (1.1) безразмерные граничные условия

$$r \rightarrow \infty, \quad v = v(0) + Gr, \quad G = \|G_{ij}\| \quad (1.4)$$

где $g = g_*/a$, $G_{ij} = aG_{ij}^*/v_0$ — безразмерные компоненты матрицы сдвига. Далее будем рассматривать только деформационно-сдвиговые течения [4], которые задаются симметричной матрицей сдвига ($G_{ij} = G_{ji}$) и соответствуют отсутствию вращательной составляющей скорости жидкости на бесконечности.

На поверхности частицы внешнее нормальное напряжение равно внутреннему давлению, а нормальная составляющая скорости непрерывна [3, 5—7]. В сферической системе координат r , θ , φ соответствующие граничные условия имеют вид

$$r = 1, \quad p - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} = P; \quad r = 1, \quad v_r = V, \quad (1.5)$$

В работах [5, 6] экспериментально показано, а в [7] теоретически обосновано, что на границе жидкость — пористая среда касательная компонента скорости терпит разрыв, пропорциональный величине ее производной по внешней нормали

$$r = 1, \quad \lambda \sqrt{k} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = v_\theta - V_\theta; \quad r = 1, \quad \lambda \sqrt{k} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = v_\varphi - V_\varphi \quad (1.6)$$

где λ — безразмерная постоянная, определяемая эмпирически. По данным [5—7] имеем $0,25 \leq \lambda \leq 10$. Например, для алоксита $\lambda = 10$ ($ka^2 = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2$), а для некоторых образцов пенометаллов $\lambda = 0,25; 0,69; 1,28$ ($ka^2 = 8,2 \cdot 10^{-4}; 3,9 \cdot 10^{-4}; 0,97 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$). При этом λ зависит как от физической природы пористого материала, так и от геометрии его поверхности.

Таким образом, рассматривается задача об обтекании пористой частицы, которая описывается уравнениями (1.2), (1.3) с граничными условиями (1.4) — (1.6).

2. Двухмерное деформационное течение. Рассмотрим частный случай, когда $v_*(0) = 0$, $G_{ij}^* = 0$ при $i \neq j$, $G_{11}^* = G_{22}^* = -1/2 G$, $G_{33}^* = G$, что соответствует осесимметричному деформационному течению. Здесь G — мера интенсивности осевого растяжения ($G > 0$) или сжатия ($G < 0$). В дальнейшем без ограничения общности считаем $G > 0$. Положим параметры обезразмеривания $v_0 = aG$, а $p_0 = \mu G$ (μ — динамическая вязкость жидкости).

В сферической системе координат условие (1.4) преобразуется к виду

$$r \rightarrow \infty, \quad v_r = \frac{1}{2} r (3 \cos^2 \theta - 1), \quad v_\theta = -\frac{3}{2} r \sin \theta \cos \theta, \quad v_\varphi = 0 \quad (2.1)$$

В силу структуры течения (2.1) имеем двухмерную задачу, соответствующую $v_\varphi = 0$, $\partial/\partial\varphi = 0$. Вид уравнений (1.2) и (1.3), а также граничных условий (1.4) — (1.6) остается неизменным. Второе условие (1.6) выполняется тождественно.

Вследствие осевой симметрии задачу можно решать с помощью функции тока $\psi(r, \theta)$, которая вдали от частицы имеет вид

$$r \rightarrow \infty, \quad \psi(r, \theta) = -\frac{1}{2} r^3 \sin^2 \theta \cos \theta \quad (2.2)$$

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0$$

Функция тока ψ обезразмерена на $a^2 G$. Для внешней задачи (1.2), (2.2)

функцию тока будем искать в виде $\psi(r, \theta) = 1/2 h(r) \sin^2 \theta \cos \theta$, где $h(r)$ — неизвестная функция. В [1] показано, что решением является

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2} (Ar^5 + Br^3 + C + Dr^{-2}) \sin^2 \theta \cos \theta$$

где A, B, C, D — постоянные, определяемые из граничных условий. Из (2.2) следует, что $A=0, B=-1$. Тогда для v_r, v_θ, p находим

$$v_r = \frac{1}{2} (r - Cr^{-2} - Dr^{-4}) (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{2} (3r + 2Dr^{-4}) \sin \theta \cos \theta \quad (2.3)$$

$$p = -Cr^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Давление указано с точностью до несущественной аддитивной постоянной. Применяя оператор div , из (1.3) получаем $\Delta P = 0$, или

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Решение ищем в виде $P(r, \theta) = 1/2 g(r) (3 \cos^2 \theta - 1)$, где $g(r)$ — неизвестная функция. Подставляя выражение для P в (2.4), находим: $g(r) = C_1 r^2 + C_2 r^{-2}$, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поскольку давление при $r=0$ ограничено, то $C_2=0$. Первое условие (1.5) дает $C_1 = -2(1 + 3C + 4D)$. С учетом этого и (1.3) получаем

$$V_r = 2k(1 + 3C + 4D)r(3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$V_\theta = -6k(1 + 3C + 4D)r \sin \theta \cos \theta \quad (2.5)$$

$$P = -(1 + 3C + 4D)r^2(3 \cos^2 \theta - 1)$$

Второе граничное условие (1.5) и первое (1.6) с учетом (2.3) и (2.5) приводят к системе уравнений для постоянных C и D

$$(1 + 12k)C + (1 + 16k)D = 1 - 4k$$

$$36kC - 2(1 + 4\lambda\sqrt{k} - 24k)D = 3(1 - \lambda\sqrt{k} - 4k)$$

откуда находим $C = 5/2K_1(k), D = -3/2K_2(k)$, где

$$K_1(k) = \frac{1 + \lambda\sqrt{k} - 4k - 16\lambda k\sqrt{k}}{1 + 4\lambda\sqrt{k} + 6k + 48\lambda k\sqrt{k}}, \quad K_2(k) = \frac{1 - \lambda\sqrt{k} - 4k - 12\lambda k\sqrt{k}}{1 + 4\lambda\sqrt{k} + 6k + 48\lambda k\sqrt{k}} \quad (2.6)$$

Таким образом, задача имеет следующее решение:

$$v_r = \frac{1}{2} \left(r - \frac{5}{2} K_1 r^{-2} + \frac{3}{2} K_2 r^{-4} \right) (3 \cos^2 \theta - 1)$$

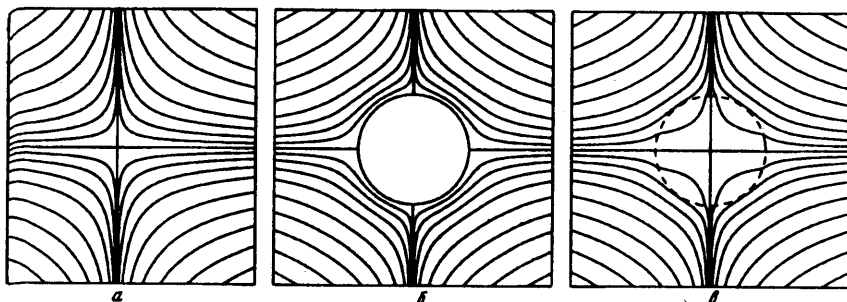
$$v_\theta = -\frac{3}{2} (r - K_2 r^{-4}) \sin \theta \cos \theta$$

$$p = -\frac{5}{2} K_1 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

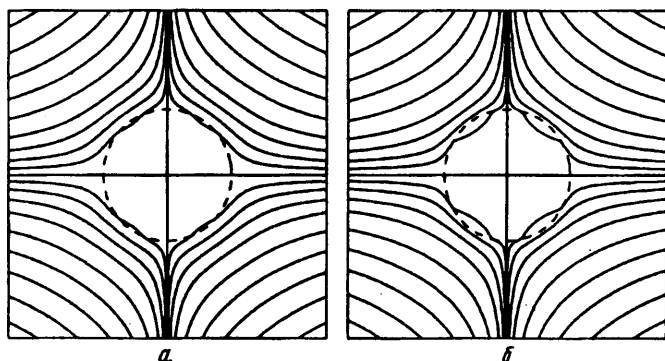
$$\psi = -\frac{1}{2} \left(r^2 - \frac{5}{2} K_1 + \frac{3}{2} K_2 r^{-2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (2.7)$$

$$V_r = 5kK_3 r (3 \cos^2 \theta - 1), \quad V_\theta = -15kK_3 r \sin \theta \cos \theta$$

$$P = -\frac{5}{2} K_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1), \quad \Psi = -5kK_3 r^3 \sin^2 \theta \cos \theta$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где Ψ — функция тока, определенная внутри частицы ($r \leq 1$), а

$$K_3 = \frac{1}{5} (2 + 15K_1 - 12K_2) = \frac{1 + 7\lambda\sqrt{k}}{1 + 4\lambda\sqrt{k} + 6k + 48\lambda k\sqrt{k}} \quad (2.8)$$

Отметим, что при $k=0$ ($K_1 = K_2 = 1$) v_r , v_θ , p и ψ в решении (2.7) совпадают, как и следовало ожидать, с решением задачи об обтекании непроницаемой сферы [2].

Поле течения осесимметричного деформационного потока вокруг пористой сферы симметрично относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$. Суммарная сила сопротивления пористой сферы, как и для непроницаемой сферы, равна нулю.

Вычислим величину Q , характеризующую количество жидкости, просачивающейся в единицу времени внутрь частицы через ее поверхность ($r=1$)

$$Q = - \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_S v_r|_{r=1} \, dS$$

где $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ — скалярное произведение вектора скорости на единичный вектор внешней нормали к поверхности частицы, S — часть поверхности сферы, где нормальная компонента скорости отрицательна. С учетом выражения для v_r из (2.7) имеем

$$Q = \frac{40\sqrt{3}}{9} \pi k K_3 \quad (2.9)$$

Как и следовало ожидать, величина Q пропорциональна коэффициенту проницаемости частицы k и при $k=0$ (непроницаемая частица) $Q=0$.

На основании численных расчетов на фиг. 1 построены линии тока (сплошные линии) в плоскости r, θ для осесимметричного деформационного течения при отсутствии частицы (фиг. 1, а), в присутствии непроницаемой (фиг. 1, б) и пористой (фиг. 1, в) соответственно значениями $k=0,02$, $\lambda=1$ сферической частицы. Граница непроницаемой сферы изображена сплошной линией, а граница пористой

частицы — штриховой линией. Заметим, что при $k = 0,001$ и меньше картина течения визуально практически неотличима от случая непроницаемой частицы, а уже при $k = 0,1$ картина течения почти такая же, как и при отсутствии частицы.

Результаты расчетов показывают, что поле течения слабо зависит от параметра λ . На фиг. 2, а и б изображены линии тока, соответствующие крайним значениям $\lambda = 0,25$ и 10 ($k = 0,006$). Заметим, что при $0,25 \leq \lambda \leq 1$ картина течения практически неотличима от случая $\lambda = 0,25$.

3. Трехмерное линейное деформационно-сдвиговое течение. Рассмотрим сначала случай $v_*(0) = 0$, $G_{ij}^* = 0$ при $i \neq j$, где G_{11}^* , G_{22}^* — произвольны ($G_{11}^* + G_{22}^* + G_{33}^* = 0$), что соответствует трехмерному течению. Положим параметры обезразмеривания $v_0 = aG$, а $p_0 = \mu G$, где $G = \sqrt{I_2}$, I_2 — квадратичный инвариант тензора G^* , определяемый в данном случае как $I_2 = [(G_{11}^*)^2 + (G_{22}^*)^2 + (G_{33}^*)^2]/2$.

По аналогии с решением задачи об обтекании сферической капли деформационно-сдвиговым потоком [2] (записанным в сферической системе координат) решение задачи (1.2), (1.3) с граничными условиями (1.4) — (1.6) будем искать в виде

$$\begin{aligned} v_r &= f_1(r) \Phi_r(\theta, \varphi), & v_\theta &= f_2(r) \Phi_\theta(\theta, \varphi), & v_\varphi &= f_3(r) \Phi_\varphi(\theta, \varphi) \\ V_r &= F_1(r) \Phi_r(\theta, \varphi), & V_\theta &= F_2(r) \Phi_\theta(\theta, \varphi), & V_\varphi &= F_3(r) \Phi_\varphi(\theta, \varphi) \\ p &= f_4(r) \Phi_r(\theta, \varphi), & P &= F_4(r) \Phi_r(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $f_1, f_2, f_3, f_4, F_1, F_2, F_3, F_4$ — неизвестные функции r , а $\Phi_r, \Phi_\theta, \Phi_\varphi$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \Phi_r(\theta, \varphi) &= (G_{11} - G_{33}) \cos^2 \theta - G_{11} + (G_{11} - G_{22}) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \\ \Phi_\theta(\theta, \varphi) &= - [G_{22} - G_{33} + (G_{11} - G_{22}) \cos^2 \varphi] \sin \theta \cos \theta \\ \Phi_\varphi(\theta, \varphi) &= (G_{11} - G_{22}) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.2)$$

Опуская утомительные выкладки, выпишем сразу искомое решение

$$\begin{aligned} v_r &= \left(r - \frac{5}{2} K_1 r^{-2} + \frac{3}{2} K_2 r^{-4} \right) \Phi_r(\theta, \varphi), & v_\theta &= (r - K_2 r^{-4}) \Phi_\theta(\theta, \varphi) \\ v_\varphi &= (r - K_2 r^{-4}) \Phi_\varphi(\theta, \varphi), & p &= -5K_1 r^{-3} \Phi_r(\theta, \varphi) \\ V_r &= 10kK_3 r \Phi_r(\theta, \varphi), & V_\theta &= 10kK_3 r \Phi_\theta(\theta, \varphi) \\ V_\varphi &= 10kK_3 r \Phi_\varphi(\theta, \varphi), & P &= -5K_3 r^2 \Phi_r(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где K_1, K_2, K_3 так же, как и ранее, определяются выражениями (2.6) и (2.8). Обратим внимание, что в решении (3.3), как и в двухмерном случае (2.7), зависимость от r осталась прежней, изменились лишь сомножители, зависящие от угловых координат.

Рассмотрим теперь случай, когда недиагональные элементы матрицы G могут быть отличны от нуля. Перепишем решение (3.3) в декартовых координатах

$$\begin{aligned} v &= \left(1 - K_2 \frac{1}{r^3} \right) Gr - \frac{5}{2} \left(K_1 - K_2 \frac{1}{r^2} \right) \frac{r \cdot Gr}{r^3} r, & p &= -5K_1 \frac{r \cdot Gr}{r^3} \\ V &= 10kK_3 Gr, & P &= -5K_3 r \cdot Gr \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $r \cdot Gr$ — скалярное произведение векторов r и Gr . Непосредственная проверка показывает, что запись решения в виде (3.4) универсальна, т. е. верна и для G с ненулевыми недиагональными элементами. Отметим, что решение (3.4) вне пористой частицы совпадает при $k = 0$ с аналогичным решением для твердой частицы [2, 4].

Как и в случае осесимметричного деформационного течения, сила сопротивления сферической частицы трехмерному сдвиговому потоку ($G_{ij} = G_{ji}$), равна нулю.

Величина, характеризующая количество жидкости, просачивающейся в единицу времени внутрь частицы через ее поверхность ($r = 1$)

$$Q = -10kK_3 \int_S \Phi_r(\theta, \varphi) dS$$

Интегрирование ведется по той части сферы S , где функция $\Phi_r(\theta, \varphi)$ отрицательна. Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведем сразу конечный результат ($G_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

$$Q = \frac{80}{3} kK_3 q(\gamma), \quad q(\gamma) = \frac{q'(\gamma)}{\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}} \quad (3.5)$$

где $\gamma = G_2/G_1$, а $q'(\gamma)$ выражается через эллиптические интегралы первого и второго рода

$$F = F\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \xi}},$$

$$E = E\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - v^2 \sin^2 \xi} d\xi, \quad 0 \leq v \leq 1$$

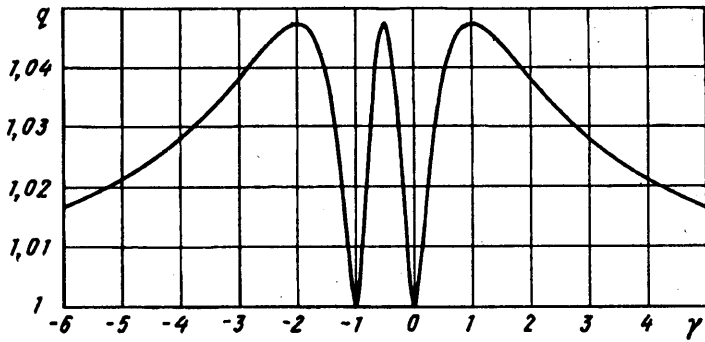
следующим образом:

$$\begin{aligned} -\infty < \gamma \leq -2: \quad v^2 &= \frac{\gamma(2 + \gamma)}{\gamma^2 - 1}, \quad q' = \sqrt{\gamma^2 - 1} E - \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} F \\ -2 \leq \gamma \leq -1: \quad v^2 &= \frac{\gamma(2 + \gamma)}{1 + 2\gamma}, \quad q' = \sqrt{|1 + 2\gamma|} E - \frac{|1 + \gamma|}{\sqrt{|1 + 2\gamma|}} F \\ -1 \leq \gamma \leq -\frac{1}{2}: \quad v^2 &= \frac{1 + 2\gamma}{\gamma(2 + \gamma)}, \quad q' = \sqrt{|\gamma(2 + \gamma)|} E - (1 + \gamma) \sqrt{\left|\frac{\gamma}{2 + \gamma}\right|} F \\ -\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 0: \quad v^2 &= \frac{1 + 2\gamma}{1 - \gamma^2}, \quad q' = \sqrt{1 - \gamma^2} E - |\gamma| \sqrt{\left|\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}\right|} F \\ 0 \leq \gamma \leq 1: \quad v^2 &= \frac{1 - \gamma^2}{1 + 2\gamma}, \quad q' = \sqrt{1 + 2\gamma} E - \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\gamma}} F \\ 1 \leq \gamma < +\infty: \quad v^2 &= \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma(2 + \gamma)}, \quad q' = \sqrt{\gamma(2 + \gamma)} E - \sqrt{\frac{\gamma}{2 + \gamma}} F \end{aligned}$$

На фиг. 3 изображен график функции $q(\gamma)$. Отметим, что функция ограничена на всем интервале $-\infty < \gamma < +\infty$ и имеет три максимума $q = \pi/3$ при $\gamma = -2, -1/2, 1$ и два минимума $q = 1$ при $\gamma = -1, 0$, а также $q \rightarrow 1$ при $\gamma \rightarrow \pm\infty$. График функции $q(\gamma)$ симметричен относительно прямой $\gamma = -1/2$. Таким образом, величина Q максимальна при $G_1 = G_2, G_1 = -2G_2, G_2 = -2G_1$ и минимальна при $G_1 = 0, G_2 = 0, G_1 = -G_2$. Заметим, что при $\gamma = 1$ получаем рассмотренный выше случай осесимметричного деформационного течения (2.9) (с учетом нормировочного множителя $\sqrt{3}/2$).

Следует отметить, что поскольку функция $q(\gamma)$ испытывает слабые относительные изменения ($1 \leq q \leq \pi/3$ при $-\infty < \gamma < +\infty$), то на практике для оценки Q можно использовать приближенную формулу

$$Q \approx \frac{80}{3} kK_3, \quad -\infty < \gamma < +\infty$$



Фиг. 3

4. Поступательно-сдвиговое течение. Рассмотрим теперь сложное течение, для которого $v_*(0) \neq 0$, $G^* \neq 0$. Поскольку уравнения (1.2), (1.3) и граничные условия (1.4)—(1.6) линейны по компонентам скорости, давлению и координатам, то данное течение можно рассматривать как суперпозицию поступательного течения с постоянной скоростью $u_* = v_*(0)$ на бесконечности и линейного деформационно-сдвигового течения. Следовательно, решение есть сумма решений для каждого из двух потоков в отдельности.

Положим параметры обезразмеривания $v_0 = u_*$, $p_0 = \mu u_*/a$, где $u_* = |u_*|$. Решение об обтекании пористой частицы однородным поступательным потоком с граничным условием $v_*(r_*) = u_*$ при $r_* \rightarrow \infty$ приведено в [3].

Учитывая сказанное, получим решение для поступательно-сдвигового потока

$$v = \left(1 - \frac{3}{4} L_1 \frac{1}{r} - \frac{1}{4} L_2 \frac{1}{r^3}\right) u - \frac{3}{4} \left(L_1 - L_2 \frac{1}{r^2}\right) \frac{u \cdot r}{r^3} r +$$

$$+ \left(1 - K_2 \frac{1}{r^3}\right) Gr - \frac{5}{2} \left(K_1 - K_2 \frac{1}{r^2}\right) \frac{r \cdot Gr}{r^3} r$$

$$p = -\frac{3}{2} L_1 \frac{u \cdot r}{r^3} - 5K_1 \frac{r \cdot Gr}{r^3} \quad (4.1)$$

$$V = \frac{3}{2} kL_3 u + 10kK_3 Gr, \quad P = -\frac{3}{2} L_3 u \cdot r - 5K_3 r \cdot Gr$$

$$L_1 = \frac{1 + \lambda \sqrt{k}}{1 + 2\lambda \sqrt{k} + 3k/2 + 15\lambda k \sqrt{k}/2}, \quad L_2 = \frac{1 - \lambda \sqrt{k}}{1 + 2\lambda \sqrt{k} + 3k/2 + 15\lambda k \sqrt{k}/2}$$

$$L_3 = 3L_1 - 2L_2 = \frac{1 + 5\lambda \sqrt{k}}{1 + 2\lambda \sqrt{k} + 3k/2 + 15\lambda k \sqrt{k}/2}$$

Напомним, что $u = u_*/u_*$ — ненулевой постоянный вектор, произвольно ориентированный по отношению к выбранной системе координат, а $G = aG^*/u^*$ — безразмерная симметричная матрица сдвига.

В заключение отметим, что при решении рассмотренных здесь задач использованы символичные вычисления на ЭВМ с помощью системы Reduce. Они позволили облегчить работу по проведению громоздких аналитических выкладок, в частности связанных с вычислением коэффициентов K_1 , K_2 и K_3 , а также с преобразованием выражений из сферических координат в декартовы и наоборот, вычислением интегралов для величины Q , проверкой удовлетворимости решений (3.4) и (4.1) исходным уравнениям и граничным условиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
3. Потапов Е. Д., Серебрякова Н. Г., Трошин В. Г. Взаимодействие пористых сферических тел, обтекаемых медленным потоком вязкой жидкости//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 3. С. 181—183.
4. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.
5. Beavers G. S., Joseph D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall//J. Fluid Mech. 1967. V. 30. № 1. P. 197—207.
6. Beavers G. S., Sparrow E. M., Magnuson R. A. Experiments on coupled parallel flows in a channel and boundary porous medium//Trans. ASME J. Basic Eng. 1970. V. 92. № 4. P. 843—848.
7. Saffman P. G. On the boundary condition at the surface of a porous medium//Stud. Appl. Math. 1971. V. 50. № 2. P. 93—101.

Москва

Поступила в редакцию
8. II. 1994