МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1995

УДК 532.5.59

© 1995 г. Л. Д. АКУЛЕНКО

# УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СОСУДА С ТЯЖЕЛОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В линейной постановке исследуется задача об управлении внутренними волнами тяжелой двухслойной жидкости, целиком заполняющей прямоугольную полость. Жидкость предполагается устойчиво стратифицированной, идеальной и несжимаемой. К твердому телу, содержащему полость, прилагается управляющее силовое воздействие в горизонтальном направлении. Предполагается, что в начальный момент времени относительные колебания жидкости отсутствуют, поверхность раздела горизонтальна. Ставится задача о приведении сосуда в состояние заданного прямолинейного движения как целого, без относительных волновых движений жидкости.

При помощи метода Фурье построены решение задачи Коши — Пуассона и самосогласованное интегродифференциальное уравнение движения сосуда с учетом реакции внутренних волн. Предложены подходы к решению задачи управления на основе анализа соответствующей обобщенной проблемы моментов. Показано, что управляющее воздействие достаточно высокого класса гладкости по Стеклову обеспечивает приближенное решение задачи управления с требуемой степенью точности по всем характеристикам движения рассматриваемой гибридной колебательной системы.

**1. Постановка задачи.** Условия движения предполагаются таковыми, что можно ограничиться исследованием плоской картины потенциальных волновых движений в линейном приближении [1].

Пусть в начальный момент времени сосуд и жидкость покоятся. Требуется посредством силового воздействия, приложенного к телу, например к стенке сосуда, привести гибридную систему в состояние заданного движения как целое таким образом, чтобы относительные колебания жидкости (внутренние волны) в конце процесса управления отсутствовали. Состоянием, представляющим определенный интерес также для приложений, является равноускоренное движение. В частности, это может быть движение с постоянной скоростью или состояние покоя [2, 3]. Существенным в данной постановке задачи управления является требование отсутствия волновых (колебательных) движений жидкости до и после процесса силового воздействия на сосуд.

Перейдем к математической постановке задачи. Для описания движения жидкости в прямоугольной полости введем подвижную, связанную с телом систему координат $xy$ [3]. Ось $x$ направим вдоль невозмущенной поверхности раздела жидкостей, а ось $y$ свяжем с левой вертикальной стенкой полости. Обозначим через $h_{1,2}$ толщины слоев, плотности которых соответственно $\rho_{1,2}$, причем $0 \leq \rho_1 < \rho_2$, т. е. жидкость устойчиво стратифицирована. Пусть длина полости (вдоль оси $x$) равна $l$; тогда ее сечение вертикальной плоскостью $xy$ есть прямоугольник, определяемый неравенствами: $0 < x < l$, $-h_2 < y < h_1$. Отметим, что координата $z$ и ширина полости $r$ не существенны для рассматриваемой постановки гидродинамической части задачи [1—3].

Для описания движения жидкостей введем потенциалы относительных скоростей $\Phi_{1,2}(x, y, t)$ и возвышение границы раздела $\eta(x, t)$. Получим совместную начально-краевую задачу для неизвестных $\Phi = \Phi_{1,2}$ и $\eta$ (задачу Коши — Пуассона)

$$\Delta\Phi = 0; \quad \Phi = \Phi_1, \quad h_1 > y > 0; \quad \Phi = \Phi_2, \quad 0 > y > -h_2 \tag{1.1}$$

$$(\rho_2\dot{\Phi}_2 - \rho_1\dot{\Phi}_1)_{y=0} - g(\rho_2 - \rho_1)\eta = (\rho_2 - \rho_1)\dot{c}x, \quad \dot{\eta} = -\Phi_y'|_{y=0} \tag{1.2}$$

$$\Phi_x'|_{x=0,\,l} = 0, \quad \Phi_y'|_{y=h_1,\,-h_2} = 0 \tag{1.3}$$

$$\Phi(x, y, 0) = 0, \quad \eta(x, 0) = 0 \tag{1.4}$$

Здесь $\Delta$ — оператор Лапласа по $x$, $y$; точкой обозначено дифференцирование по времени $t$, $t \geq 0$; штрихами с индексами $x$, $y$ внизу обозначены частные производные по $x$, $y$ соответственно; $c = c(t)$ — абсолютная или относительная скорость перемещения сосуда, $\dot{c}(t)$ — абсолютное ускорение, удовлетворяющее сильному неравенству $|\dot{c}| \ll g$, где $g$ — ускорение сил тяготения [1].

Уравнение состояния (1.1) является следствием несжимаемости обеих жидкостей. Первое условие (1.2) задано на невозмущенной границе раздела (линейное приближение) и характеризует взаимодействие гравитационных и инерционных сил; второе условие — кинематическое и отражает тот факт, что частицы жидкости движутся вместе с этой поверхностью. Равенства нулю нормальных проекций скоростей (1.3) на границе полости отвечают условию непроницаемости стенок. Тривиальные начальные условия (1.4) соответствуют состоянию покоя и отсутствию импульсивных давлений в начальный момент времени $t = 0$. При заданной достаточно гладкой функции $\dot{c}(t) = w(t)$ постановка гидродинамической задачи (1.1)—(1.4) полностью определена и ее решение может быть построено методом Фурье [1—3].

Для неизвестных $\Phi$, $\eta$ получаются следующие представления в виде одномерных рядов [1, 3]:

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cos n\xi \operatorname{ch} n(\zeta^* - \zeta) \tag{1.5}$$

$$\xi = \pi x l^{-1}, \quad \zeta = \pi y l^{-1}, \quad \zeta^* = \pm\pi h_{1,2} l^{-1}$$

$$\varphi_n(t) = \frac{4l^2\alpha_n\omega_n^2}{\pi^3 g n^3 \operatorname{sh} n\zeta^*} \int_0^t w(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)\,d\tau, \quad \alpha_n = \frac{1}{2}[1 - (-1)^n]$$

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)\cos n\xi, \quad \psi_n(t) = -\frac{4l\alpha_n\omega_n}{\pi^2 g n^2}\int_0^t w(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$\omega_n^2 = (\rho_2 - \rho_1) g l^{-1} n \operatorname{th} n\zeta_1^* \operatorname{th}|\zeta_2^*|(\rho_2 \operatorname{th} n\zeta_1^* + \rho_1 \operatorname{th} n|\zeta_2^*|)^{-1}$$

Отметим, что ряды (1.5) для $\Phi$, $\eta$ содержат коэффициенты только с нечетными индексами $n = 2j + 1$, $j = 0, 1, \ldots$, поскольку $\alpha_{2j} = 0$. Частоты $\omega_n$ собственных колебаний при $n \to \infty$ имеют асимптотику $\omega_n \sim \sqrt{n}$; поэтому ряды (1.5) абсолютно и равномерно сходятся. Сходимость производных будет иметь место при условии достаточно высокой гладкости функции $w(t)$, $t \geq 0$. Коэффициенты $\Phi_{01}$, $\Phi_{02}$ в (1.5) связаны дифференциальным соотношением [3]

$$\rho_2\dot{\Phi}_{02} - \rho_1\dot{\Phi}_{01} = \tfrac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1) l w, \quad \Phi_{01,2}(0) = 0 \tag{1.6}$$

Таким образом, выражения для искомых функций $\Phi$, $\eta$ есть интегральные операторы с разностными ядрами типа Вольтерра от неизвестной $w(t)$. Для ее определения нужно построить и решить уравнение движения сосуда с учетом сил реакции жидкости на боковые стенки (при $x = 0$, $l$) и воздействия внешних (управляющих) и, возможно, других (возмущающих) сил [4]. Ускорение $w(t)$ должно быть найдено с учетом требований, предъявляемых к перемещению твердого тела $s(t)$ ($\dot{s} = c$ — скорость). После определения функции $w(t)$ по формулам (1.5) и другим однозначно находятся характеристики волновых движений жидкости.

Следует отметить, что постановка гидродинамической задачи (Коши — Пуассона) для случая однородной жидкости со свободной поверхностью и ее решение получаются из приведенных выше при $\rho_1 = 0$ и даются выражением для потенциала скоростей $\Phi = \Phi_2$ и возвышения $\eta$ согласно (1.5) (см. [1, 2]).

**2. Уравнение движения твердого тела.** Определим результирующую сил давления $P$ жидкости на тело в горизонтальном направлении $x$. При помощи линеаризованного интеграла Бернулли и потенциалов скоростей $\Phi_{1,2}$ (1.5) получаем искомые представления для давлений $P = P_{1,2}$ в каждой точке с эйлеровыми координатами $(x, y, z)$ (см. [1, 4])

$$P_{1,2} = P_{1,2}(x, y, t, [w]) = \rho_{1,2}(\dot{\Phi}_{1,2} - gy - \dot{c}x) \tag{2.1}$$

Давление $P_{1,2}$ от координаты $z$ не зависит (плоская постановка). Суммарная результирующая сила $X$ сил давления $P$ (2.1) находится интегрированием по $y$ при $x = 0,\ l$ по формуле

$$X = X(t, [w]) = r\int_{-h_2}^{h_1} [-P(0, y, t, [w]) + P(l, y, t, [w])]\,dy \tag{2.2}$$

В выражениях (2.1), (2.2) отмечено то обстоятельство, что $P$, $X$ есть интегральные операторы типа Вольтерра от неизвестной $w(t)$ вследствие зависимости $\Phi$ (см. (1.5)). Проводя элементарное интегрирование по $y$ с учетом представлений (1.5) для $\Phi$ и (2.1) для $P$, получим

$$X(t, [w]) = -(M_l + M_a)\,w(t) - Q(t, [w]) \tag{2.3}$$

$$Q(t, [w]) = \int_0^t Q(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau, \quad Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \omega_n t$$

$$M_a = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \quad \mu_n = \frac{8}{\pi^4}\frac{rl^3}{g}(\rho_2 - \rho_1)\frac{\omega_n^2}{n^4}\alpha_n, \quad q_n = \mu_n\omega_n$$

$$M_l = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)\,rl$$

Здесь $M_l$ — масса жидкости в полости, $M_a$ — «присоединенная» масса, обусловленная внутренними волнами: она исчезает при $\rho_2 = \rho_1$. Ряд в (2.3), т. е. интегральный оператор от $w(t)$, также обусловлен волновыми движениями стратифицированной жидкости. Таким образом, первое слагаемое, пропорциональное $w$, имеет смысл сил инерции, действующих со стороны жидкости на сосуд.

Составим уравнение движения типа Ньютона для одномерного движения твердого тела с учетом реакции колеблющейся жидкости. Учитывая все силы, получим интегродифференциальное уравнение с разностным ядром вида

$$M_b\ddot{s} = F - (M_l + M_a)\,\ddot{s} - \int_0^t Q(t-\tau)\,\ddot{s}(\tau)\,d\tau \tag{2.4}$$

Здесь $M_b$ — масса твердого тела, $F$ — внешняя, например управляющая, сила, приложенная к телу вдоль оси $x$. При сделанных предположениях относительно начального состояния системы начальные условия для $s$, $c = \dot{s}$ могут быть тривиальными: $s(0) = 0$, $c(0) = 0$.

Задача управления движением твердого тела с полостью, заполненной стратифицированной жидкостью, заключается в том, чтобы выбором управляющей силы $F(t)$ за конечное время $t$, $t \in [0, T]$, $T < \infty$, привести гибридную систему (1.1)—(1.4), (2.4) в другое состояние, но при этом относительные волновые движения должны отсутствовать. Например, $\varphi_n(t) = \psi_n(t) \equiv 0$ при $t \geq T$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$; $k_s^2 (s(T) - s_T)^2 + k_c^2 (c(T) - c_T)^2 = 0$, $k_s^2 + k_c^2 > 0$.

На основе (1.5), (1.6), (2.4) задача сводится к обобщенной проблеме моментов. Классическая проблема моментов получается в частном случае, если считать управлением функцию $w(t)$ [2, 3, 5]. Это означает, что силовое воздействие $F(t)$ должно выбираться, согласно (2.4), по заданному ускорению $w(t)$.

Заметим, что классическая и обобщенная проблемы не имеют точного решения для любого конечного значения $T$. Выбором одной управляющей функции $w(t)$ или $F(t)$ невозможно погасить все моды колебаний жидкости. Неуправляемость бесконечной системы осцилляторов обусловлена поведением собственных частот колебаний ($\omega_n \sim \sqrt{n}$ при $n \to \infty$), поскольку $|\omega_{n+k} - \omega_n| \sim 1/\sqrt{n}$, т. е. имеет место резонанс между высокими модами колебаний [6, 7], причем ширина резонансной зоны растет как $\sqrt{n}$.

Однако рассматриваемая задача управления допускает эффективное приближенное решение посредством выбора функций $w(t)$ или $F(t)$ определенного класса гладкости по Стеклову [8, 9] или в результате конечно-модового ограничения постановки задачи.

Далее основное внимание будет уделяться анализу и решению интегрального уравнения (2.4). Для этой цели вводятся масштабы длины $d$ и времени $\Omega^{-1}$, где $d$ — характерное расстояние, например $d = l$, а $\Omega$ — характерная частота, например $\Omega = \omega_1$ — низшая частота собственных колебаний жидкости в сосуде (см. (1.5)). Представим уравнение (2.4) в безразмерном виде

$$w = u - \varepsilon \int_0^t Q(t - \tau)\, w(\tau)\, d\tau, \quad w = \dot{c}, \quad c = \dot{s} \tag{2.5}$$

$$u = F(Md\Omega^2)^{-1}, \quad M = M_b + M_l + M_a, \quad t^* = \Omega t$$

$$w^*(t^*) = w(t^*\Omega^{-1})(d\Omega^2)^{-1}, \quad c^*(t^*) = c(t^*\Omega^{-1})(d\Omega)^{-1}, \quad s^*(t^*) = sd^{-1}$$

$$Q^*(t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^* \sin \nu_n t^*, \quad \nu_n = \frac{\omega_n}{\Omega}, \quad q_n^* = \frac{\nu_n^3}{n^4}\alpha_n$$

$$\varepsilon = \frac{8}{\pi^4}\frac{rl^3\Omega^2}{gM}(\rho_2 - \rho_1)$$

В интегральном уравнении (2.5) звездочки опущены для сокращения записи; введены безразмерные управляющая функция $u$ и числовой параметр $\varepsilon$, характеризующий влияние волновых движений стратифицированной жидкости. Обсудим содержательный аспект введенной замены переменных, аргумента и параметров системы (2.5) в уравнении движения сосуда (2.4).

По постановке задачи предполагается малость ускорения $w^*(t^*)$, $w^* \ll f(d\Omega^2)^{-1}$, чтобы выполнялись требования линейной теории гидродинамики [1]. Аналогичному условию должна удовлетворять функция управления $u(t^*)$ для $0 \leq t^* \leq T^* = \Omega T$.

Далее, заметим, что система содержит в качестве характерной постоянной времени период $T_1 = 2\pi/\omega_1$ первой моды колебаний. Время процесса управления $T$ естественно измерять в этих единицах; тогда величина $T^*/(2\pi)$ определяет количество колебаний (циклов) низшей моды.

Для теории и приложений представляется интересным наряду с общей ситуацией $\varepsilon \sim 1$ рассмотреть случай асимптотически малых значений $\varepsilon \ll 1$. Малость параметра $\varepsilon$ (см. (2.5)) может быть вызвана как величиной отношения $M_l/M$ (масса жидкости $M_l$ относительно мала), так и близостью $\rho_1$ и $\rho_2$. Первый случай достаточно очевиден. Во втором варианте должно быть малым отношение

$\Delta M/M_l \ll 1$, где $\Delta M = \Delta\rho V$, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$; величина $V = rlh$ есть объем прямоугольной полости, причем $h_{1,2} \sim h$. Этот случай допускает малость массы сосуда $M_b$ по сравнению с массой жидкости $M_l$. Следует, однако, отметить, что, согласно (2.5), (1.5), при $\Omega = \omega_1$ имеют место оценки $\varepsilon \sim (\Delta M/M)^2$, $\Omega \sim (\Delta M/M)^{1/2} \sim \varepsilon^{1/4}$. Поэтому для асимптотически малых значений $\varepsilon \to 0$ безразмерный аргумент — время $t^*$ — становится «медленным» ($t^* \sim \varepsilon^{1/4} t$), а размерное время $T$ окончания процесса растет как $O(\varepsilon^{-1/4})$ по отношению к $T^*$. Величина $T^*$ может быть выбрана асимптотически большой, например $T^* \sim \varepsilon^{-1}$ (см. п. 2 в разд. 3); тогда $T \sim \varepsilon^{-5/4}$. Конечные значения $s_T^*$, $c_T^*$ и величины $u$, $T^*$ должны быть согласованы по отношению к порядкам параметра $\varepsilon$ и оценкам погрешности решения. Аналогичные оценки следует провести в терминах размерных переменных системы, что будет сделано далее.

Применим к уравнению (2.5) операционные методы [10]. При помощи преобразования Лапласа получим для изображения $\varepsilon R_L(p, \varepsilon)$ резольвенты $\varepsilon R(t, \varepsilon)$ и искомого решения $w(t, \varepsilon)$ представления вида ($\varepsilon \sim 1$)

$$\varepsilon R_L(p, \varepsilon) = \frac{-\varepsilon Q_L(p)}{1 + \varepsilon Q_L(p)}, \quad Q_L(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \nu_n}{p^2 + \nu_n^2} \tag{2.6}$$

$$w(t, \varepsilon) = u(t) + \varepsilon \int_0^t R(t - \tau, \varepsilon)\, u(\tau)\, d\tau, \quad R(t, \varepsilon) \doteqdot \frac{-Q_L(p)}{1 + \varepsilon Q_L(p)}$$

Индекс $L$ внизу означает преобразование Лапласа с параметром $p$ ($\mathrm{Re}\, p > 0$); функция $R(t, \varepsilon)$ (2.6) есть резольвента уравнения (2.5) с точностью до множителя $\varepsilon \sim 1$. В общем случае выражения (2.6) не пригодны для исследования решения вследствие трудностей анализа свойств резольвенты $\varepsilon R(t, \varepsilon)$. Предполагается рассмотреть конечно-модовые (в частности, одно- и двухмодовое) приближения и асимптотическое приближенное решение (случай малых и плавных управлений, характеризуемых параметром $\varepsilon \ll 1$).

**3. Приближенное решение задачи управления конечным состоянием.** Непосредственное применение разработанных подходов [9], см. также [2, 3, 5], затруднено, так как сохранение заданного состояния движения (например, покоя или равномерного движения как целого) при $t > T$ требует силового воздействия $u(t)$, согласно (2.5). Это управление должно компенсировать волновые движения жидкости, чтобы сохранить состояние заданного движения тела, поскольку система описывается интегральным уравнением, т. е. обладает «неограниченной памятью». При этом колебания жидкости могут быть значительными, так что основное требование в постановке задачи управления не будет выполнено.

*1. Конечно-модовое приближение к решению задачи управления движением посредством силового воздействия.* Чтобы получить классическую проблему моментов, необходимо разрешить интегральное уравнение (2.5) относительно $w = \ddot{s}$. Поскольку ряды (2.5), (2.6) довольно быстро сходятся (они мажорируются числовыми рядами с оценками членов $(2j+1)^{-3}$), эффективным может оказаться применение конечномодового приближения. Учет первых $j$ членов разложения приводит к относительной погрешности $(2j+1)^{-2}$.

Практически можно ограничиться учетом первой и третьей мод колебаний жидкости: $n = 1, 3$. Пусть $n = 1$, $j = 0$; тогда для резольвенты и решения в одномодовом приближении получаются выражения ($\varepsilon \sim 1$ и $\varepsilon \ll 1$)

$$\varepsilon R^{(1)}(t, \varepsilon) = -\varepsilon q_1 \nu_1 \lambda_1^{-1} \sin \lambda_1 t \tag{3.1}$$

$$\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) = \nu_1 \left(1 + \varepsilon \frac{q_1}{\nu_1}\right)^{1/2} = \nu_1 + \frac{1}{2}\varepsilon q_1 + O(\varepsilon^2)$$

$$w^{(1)}(t, \varepsilon) = u(t) - \varepsilon \frac{q_1 \nu_1}{\lambda_1} \int_0^t \sin \lambda_1 (t - \tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

Вычислим теперь резольвенту $\varepsilon R^{(3)}(t, \varepsilon)$ с учетом первой и третьей гармоник колебаний жидкости. Согласно (2.6), для трансформанты $\varepsilon R_L^{(3)}(p, \varepsilon)$ получим выражение ($\varepsilon \sim 1$)

$$\varepsilon R_L^{(3)}(p, \varepsilon) = \frac{\varepsilon R_1(p^2)}{R_2(p^2, \varepsilon)}, \quad R_1(z) = -(q_1\nu_1 + q_3\nu_3)z - (q_1\nu_1\nu_3^2 + q_3\nu_3\nu_1^2) \tag{3.2}$$

$$R_2(z, \varepsilon) = z^2 + (\nu_1^2 + \nu_3^2 + \varepsilon q_1\nu_1 + \varepsilon q_3\nu_3)z + \nu_1^2\nu_3^2 + \varepsilon(q_1\nu_1\nu_3^2 + q_3\nu_3\nu_1^2)$$

Здесь $R_1$, $R_2$ — полиномы первой и второй степени относительно $z$ соответственно. Корни знаменателя $R_2(z, \varepsilon) = 0$ отрицательны, т. е. соответствующие значения параметра $p = \pm i\lambda_{1,3}$ чисто мнимы. Элементарными преобразованиями получим

$$R_L^{(3)}(p, \varepsilon) = -q_1^{(3)}(p^2 + \lambda_1^2)^{-1} - q_3^{(3)}(p^2 + \lambda_3^2)^{-1}, \quad \varepsilon \sim 1 \tag{3.3}$$

$$R^{(3)}(t, \varepsilon) = -q_1^{(3)}\lambda_1^{-1}\sin\lambda_1 t - q_3^{(3)}\lambda_3^{-1}\sin\lambda_3 t$$

$$w^{(3)}(t, \varepsilon) = u(t) - \varepsilon\int_0^t \left[\frac{q_1^{(3)}}{\lambda_1}\sin\lambda_1(t-\tau) + \frac{q_3^{(3)}}{\lambda_3}\sin\lambda_3(t-\tau)\right]u(\tau)\,d\tau$$

Коэффициенты $q_{1,3}^{(3)}$ в (3.3) определяются через коэффициенты полиномов $R_{1,2}$ (3.2) (метод Остроградского). При $\varepsilon > 0$ достаточно малом с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ имеем

$$\lambda_{1,3}(\varepsilon) = \nu_{1,3} + \tfrac{1}{2}\varepsilon q_{1,3} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon q_{1,3}^{(3)} = \varepsilon q_{1,3}\nu_{1,3} + O(\varepsilon^2) \tag{3.4}$$

$$w^{(3)}(t, \varepsilon) = u(t) - \varepsilon\int_0^t [q_1\sin\lambda_1(t-\tau) + q_3\sin\lambda_3(t-\tau)]\,u(\tau)\,d\tau + O(\varepsilon^2)$$

Выражение (3.4) для $w^{(3)}(t, \varepsilon)$ справедливо, если $t \sim 1$ или $u = u(\varepsilon t)$, $t \sim 1/\varepsilon$, где $\varepsilon$ — малый параметр. По аналогии с (3.3), (3.4) может быть выписано выражение для резольвенты и решения в любом конечно-модовом приближении $(2k+1)$-го порядка ($\varepsilon \sim 1$ и $\varepsilon \ll 1$)

$$\varepsilon R^{(2k+1)}(t, \varepsilon) = -\varepsilon\sum_{j=0}^{k}\frac{q_{2j+1}^{(2k+1)}}{\lambda_{2j+1}}\sin\lambda_{2j+1}t, \quad \varepsilon \sim 1 \tag{3.5}$$

$$w^{(2k+1)}(t, \varepsilon) = u(t) + \varepsilon\int_0^t R^{(2k+1)}(t-\tau, \varepsilon)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$\lambda_{2j+1} = \nu_{2j+1} + \tfrac{1}{2}\varepsilon q_{2j+1} + O(\varepsilon^2), \quad \frac{q_{2j+1}^{(2k+1)}}{\lambda_{2j+1}} = q_{2j+1} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1$$

Подстановка найденного приближенного решения $w^{(2k+1)}(t, \varepsilon)$ (3.5) в выражения для $\varphi_n$, $\psi_n$ (1.5) (с учетом преобразования аргумента $t$) позволяет построить классическую конечномерную проблему моментов [5, 11]. Заметим, что соответствующие интегральные операторы от $u(t)$ будут иметь также разностные ядра. Однако выражения для этих ядер значительно усложнятся. Частотный базис помимо значений $\nu_{2j+1}$ будет содержать величины $\lambda_{2j+1}$. Далее, для больших значений $j$ частоты $\nu_{2j+1}$ сближаются и, кроме того, сближаются значения $\nu_{2j+1}$ и $\lambda_{2j+1}$. Поэтому счетномерная система неуправляема на конечном интервале времени $t \in [0, T]$, $T < \infty$ [7]. Конечномерная система в нерезонансном случае управляема [6, 11]. Построение соответствующего управления и его оптимизация проводятся при помощи разработанных методов [6, 11, 12 и др.].

Изложим на примере одномодового подхода ($k = 0$) процедуру построения стандартной управляемой колебательной системы, постановки задач управления и оптимизации, а также укажем на некоторые точные и приближенные методы их решения. По аналогии приведем окончательные выводы для произвольного конечного значения $k \geq 1$.

Итак, рассмотрим одномодовое приближение (3.1) для резольвенты $R^{(1)}$, ускорения $w^{(1)}$ и коэффициентов $\varphi_1$, $\psi_1$ (1.5) (индекс 1 будем далее опускать ради сокращения записи). Кроме того, в выражениях $\varphi$, $\psi$ введем безразмерные переменные и параметры, согласно (2.5), а сами величины нормируем на $d^2\omega$ и $d$ соответственно. В результате подстановки $w$ (3.1) в $\varphi$, $\psi$ (1.5) с учетом равенства $\nu = 1$ (при $\Omega = \omega_1$) после применения формулы повторного интегрирования получим классическую проблему моментов

$$\psi = k_\psi^\nu \int_0^t u(\tau) \sin(t-\tau)\, d\tau + k_\psi^\lambda \int_0^t u(\tau) \sin\lambda(t-\tau)\, d\tau \tag{3.6}$$

$$\varphi = -\frac{k_\varphi}{k_\psi}\dot\psi, \quad w = u - \varepsilon k_w \int_0^t u(\tau)\sin\lambda(t-\tau)\, d\tau$$

$$k_\psi^\nu = -k_\psi - \lambda k_\psi^\lambda, \quad k_\psi^\lambda = -\varepsilon k_\psi k_w (\lambda^2 - 1)^{-1}$$

$$k_w = \frac{q}{\lambda}, \quad k_\varphi = \frac{4}{\pi^2}\frac{l\omega^2}{g}, \quad k_\psi = \frac{4}{\pi^3}\frac{l\omega^2}{g\,\mathrm{sh}\,\zeta^*}$$

Требуется выбрать такую кусочно-гладкую функцию управления $u(t)$, $0 \leq t \leq T < \infty$, чтобы

$$\psi(T) = \varphi(T) = 0, \quad k_s^2 (s(T) - s_T)^2 + k_c^2 (c(T) - c_T)^2 = 0$$

Тогда, полагая $u(t) \equiv 0$ для $t \geq T$, получим, что $\psi(t) = \varphi(t) \equiv 0$, $t \geq T$, а сосуд будет приближенно совершать движение с заданной скоростью $c_T$ из положения $s_T$, если $k_{s,c}^2 > 0$. Если один из коэффициентов, например $k_s^2 > 0$, а $k_c^2 = 0$, то в момент времени $T$ координата $s(T) = s_T$, а скорость $c(T)$ может быть произвольной; в противном случае, наоборот, скорость движения принимает заданное значение $c(T) = c_T$ ($k_s^2 = 0$, $k_c^2 > 0$), а положение $s(T)$ не фиксируется. При движении в сосуде будут происходить колебания жидкости более высоких мод.

Проблема моментов (3.6) сводится к стандартной задаче управления, описываемой линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений [6, 11]

$$\ddot\psi^\nu + \psi^\nu = k_\psi^\nu u, \quad \ddot\psi^\lambda + \lambda^2\psi^\lambda = k_\psi^\lambda \lambda u, \quad \psi = \psi^\nu + \psi^\lambda \tag{3.7}$$

$$\dot s = c, \quad \dot c = u - k_c \psi^\lambda, \quad k_c = k_w / k_\psi^\nu$$

Начальные и конечные условия для $\psi^{\nu,\lambda}$, $\dot\psi^{\nu,\lambda}$ нулевые; для $s$ и $c$ они также заданы. Система (3.7) имеет три степени свободы; к ней могут быть применены конструктивные методы теории управления и оптимизации. В частности, может быть рассмотрена популярная задача оптимального быстродействия при помощи ограниченной «силы» $|u(t)| \leq u_0$. Весьма просто, хотя и громоздко, можно получить решение линейно-квадратической задачи на фиксированном интервале времени или определяемом методом штрафов [6, 11, 12 и др.].

Отметим, что при $k \geq 1$ классическая проблема моментов (3.6) соответственно обобщается

$$\psi_n = k_\psi^{(\nu,n)} \int_0^t u(\tau)\sin\nu_n(t-\tau)\, d\tau + \sum_{l=0}^{k} k_{\psi,l}^{(\lambda,n)} \int_0^t u(\tau)\sin\lambda_{2l+1}(t-\tau)\, d\tau \tag{3.8}$$

$$w^{(2k+1)} = u - \varepsilon \sum_{l=0}^{k} k_{w,l}^{(n)} \int_0^t u(\tau)\sin\lambda_{2l+1}(t-\tau)\, d\tau$$

$$\varphi_n = -\frac{k_{\varphi,n}}{k_{\psi,n}}\dot\psi_n, \quad \dot s = c, \quad \dot c = w^{(2k+1)}, \quad n = 1, 3, \ldots, 2k+1$$

Здесь коэффициенты $k_{\psi}^{(\nu,n)}$, $k_{\psi,i}^{(\lambda,n)}$, $k_{w,i}^{(n)}$ определяются по аналогии с (3.6). Система (3.8) содержит $2(k+1)$ частот и один двукратный нулевой характеристический показатель. Она сводится к $2(k+2)$ уравнениям вида (3.7) с соответствующими начальными и конечными условиями. В изложенном выше подходе существенную трудность представляет решение вопроса о выборе конечного значения $k$.

2. *Квазистационарное приближенное управление.* Одним из основных приемов управления сложными многочастотными системами, часто применяемом в прикладных задачах, является гладкое и плавное силовое воздействие [9, 12]. Оно приводит к существенному изменению состояния движения и практическому отсутствию относительных колебаний в конце процесса, имеющего квазистатический характер. Релейные управления, обладающие максимальным быстродействием, весьма затруднительны для построения и реализации при наличии высокочастотных степеней свободы в системе. Более предпочтителен подход, связанный с выбором управляющих функций определенного класса гладкости [8, 9], не приводящих к возбуждению относительных колебаний, в частности, волновых движений жидкости в сосуде с требуемой степенью точности по некоторому малому параметру, в частности, параметру $\varepsilon$, введенному в (2.5). Такой прием управления разработан в случае классической проблемы моментов [9]. Представляется целесообразным развить приближенный подход квазистационарного гладкого управления для более общего случая системы, описываемой соотношениями (1.5), (2.5).

Будем выбирать управление $u(t)$ таковым, чтобы ускорение $w(t)$ сосуда было достаточно гладкой функцией. Применим к (2.5) многократную процедуру интегрирования по частям; для оператора $Q(t, [w])$ получим представление

$$Q(t, [w]) = \int_0^t Q(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau = \sum_{i=1}^{k} [w^{(i-1)}(0)\, Q_i^*(t) + Q_i^0 w^{(i-1)}(t)] +$$

$$+ \int_0^t Q_k^*(t-\tau)\, w^{(k)}(\tau)\, d\tau, \quad Q_k(t) = \int_0^t Q_{k-1}^*(\tau)\, d\tau \tag{3.9}$$

$$Q_k^0 = \langle Q_k(t)\rangle_t, \quad Q_k^*(t) = Q_k(t) - Q_k^0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$Q_0^*(t) = Q(t)$$

Здесь $w^{(i)}(t)$ — производная $w$ по $t$ порядка $i$, $k \geq i \geq 0$; угловые скобки означают среднее почти периодической функции $Q_k(t)$. Таким образом, функция $Q_k^*(t)$ имеет нулевое среднее; нулевое среднее имеют также $Q_k(t)$ при $k$ четном. Отметим, что при интегрировании скорость сходимости рядов увеличивается: $q_{nk} \sim n^{-(5+k)/2}$, причем $|q_{nk}| = |q_{n,k-1}|\nu_n^{-1}$. Вычисление $q_{nk}$ элементарно: $q_{nk} = q_n \nu_n^{-k} \sin(\pi k/2)$.

Потребуем, чтобы некоторая заданная функция $w = w_0(\sigma)$ была медленной, т. е. зависела от медленного времени $\sigma = \delta t$, где $\delta \ll 1$ — малый параметр, например $\delta = \varepsilon \ll 1$. Тогда $i$-я производная $w_0(\sigma)$ по $t$ имеет оценку $O(\delta^i)$ и, в случае равномерно ограниченной кусочно-гладкой $k$-й производной, для интеграла в (3.9) имеет место равномерная оценка $O(\delta^k)$ на рассматриваемом промежутке времени. Выберем функцию $w_0(\sigma)$ такой, чтобы $w_0(0) = w_0'(0) = \ldots$ $\ldots = w_0^{(k)}(0) = 0$, где штрихами обозначены производные по аргументу $\sigma$. Эти требования приведут к следующему представлению для управляющей функции $u$

$$u(\sigma, \delta, t, \varepsilon) = w_0(\sigma) + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \delta^{i-1} Q_i^0 w_0^{(i-1)}(\sigma) + \tag{3.10}$$

$$+ \varepsilon\delta^k \int_0^t Q_k^*(t-\tau)\, w_0^{(k)}(\delta\tau)\, d\tau \equiv u_k(\sigma, \delta) + \varepsilon\delta^k U$$

Итак, чтобы сосуд двигался предписанным образом с ускорением $w_0(\sigma)$, управление $u$ должно удовлетворять условию (3.10). При управлении системой (2.5) ограничимся главной медленной составляющей $u_k(\sigma, \delta)$ функции $u$ (3.10), т. е. отбросим малые быстрые вибрации $O(\varepsilon\delta^k)$

$$w = w_0(\sigma) + \sum_{i=1}^{k} \delta^{i-1} Q_i^0 w_0^{(i-1)}(\sigma) - \varepsilon \int_0^t Q(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau \tag{3.11}$$

Выпишем тождество для $w_0(\sigma)$ согласно (2.5), (3.10)

$$w_0(\sigma) \equiv u(\sigma, \delta, t, \varepsilon) - \varepsilon \int_0^t Q(t-\tau)\, w_0(\delta\tau)\, d\tau$$

Пусть $w_*(\sigma, \delta, t, \varepsilon)$ — решение интегрального уравнения (3.11) с гладкой и медленной управляющей функцией $u_k(\sigma, \delta)$; в общем случае оно неизвестно. Оценим разность между $w_*$ и известной (заданной) функцией $w_0$; на основе леммы Гронуолла получим

$$|w_* - w_0| \le \varepsilon\delta^k U_* \exp(\varepsilon Q_* t) \tag{3.12}$$

$$U_* = \max_t |U|, \quad Q_* = \max_t |Q|$$

Заметим, что, согласно (3.10), оценка $U_*$ (3.12) зависит от величины задаваемого ускорения $w_0(\sigma)$, см. далее. Тогда из (3.12) следует, что достаточно гладкое и плавное управление $u_k(\sigma, \delta)$ приводит сосуд в состояние ускоренного движения $\dot{s} = c$, $\dot{c} = w_*$, сколь угодно близкого к заданному с ускорением $w_0(\sigma)$. При этом интервал времени $t \in [0, T(\varepsilon, \delta)]$ может быть взят значительным, так что система как целое существенно изменит состояние движения.

Для удобства и простоты ограничимся случаем $\delta = \varepsilon$; возможна более сложная взаимосвязь между параметром «медленности» $\delta$ и параметром «малости» $\varepsilon$. Обратим внимание, что все построения п. 2 разд. 3 проведены в безразмерном «медленном» времени $t^* = \omega_1 t$, где $\omega_1 \sim \varepsilon^{1/4}$, $t$ — исходное «размерное» время. Далее будем различать обозначения для времени $t$ и фазы $t^*$ низшей моды колебаний, а также для других размерных переменных.

Ускорение $w(t)$ в размерных переменных строится на основе функции $w^*$ согласно (2.5): $w(t) = w^*(\omega_1 t)\, d\omega_1^2$. Задаваемое $w_0$ и реализующееся $w_*$ ускорения сосуда определяются на основе соответствующих безразмерных $w_0^*$, $w_*{}^*$

$$w_0(\sigma, \varepsilon) = d\omega_1^2 w_0^*(\varepsilon\omega_1 t), \quad w_*(t, \varepsilon) = d\omega_1^2 w_*^*(\varepsilon\omega_1 t, \varepsilon, \omega_1 t, \varepsilon) \tag{3.13}$$

Оценка типа (3.12) для разности $w_*$ и $w_0$ (3.13) примет вид

$$|w_* - w_0| \le \varepsilon^{k+1} U_0 \exp(\varepsilon^{5/4} Q_0 t), \quad U_0, \ Q_0 = \text{const} \tag{3.14}$$

Здесь величины $U_0$, $Q_0$ определяются аналогично $U_*$, $Q_*$ (3.10), (3.12), причем $U_0$ оценивается на основе $w_0 = d\omega_1^2 w_0^*$. Таким образом, степенная оценка точности по $\varepsilon$ имеет место на интервале исходного времени $t \sim \varepsilon^{-5/4}$.

Будем далее предполагать, что задаваемое ускорение $w_0$ достаточно мало; в силу (3.14) таковым будет и реализующееся ускорение $w_*$, так что требования линейной теории будут выполнены. Желательно, чтобы при этом произошло существенное изменение состояния движения сосуда; оценим его. Пусть $w_0/g \sim \sim \varepsilon^{1/2} \ll 1$, т. е. $w_0^* \sim 1$, $U_0 \sim \varepsilon^{1/2}$; тогда величины $w_*/g$, $f = F/(Mg)$ имеют порядок $O(\varepsilon^{1/2})$, и на рассматриваемом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-5/4}(d/g)^{1/2}$ происходят асимптотически большие изменения положения $s' \sim w_0 t^2 \sim d\varepsilon^{-2}$ и скорости $c \sim w_0 t \sim$

$\sim \varepsilon^{-3/4}(dg)^{1/2}$. Возьмем теперь более сильное ограничение сверху $w_0/g$, $w_*/g$, $f \sim \varepsilon \ll 1$, т. е. $w_0^* \sim \varepsilon^{1/2}$, $U_0 \sim \varepsilon$; аналогично получим оценки $s \sim d\varepsilon^{-3/2}$, $c \sim \sim \varepsilon^{-1/4}(dg)^{1/2}$, которые асимптотически велики по $\varepsilon$. Таким образом, указанный выбор величины $w_0$ обеспечивает существенное, асимптотически большое по $\varepsilon$ изменение состояния движения сосуда с жидкостью как целого с пренебрежимо малыми внутренними волнами на рассматриваемом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-5/4}$, допускаемом оценкой (3.14).

Профиль функции $w_0(\sigma)$, удовлетворяющий условиям гладкости, можно принять, например, в виде

$$w_0(\sigma, \varepsilon) = \alpha |s_2|^{k-1} s_2 + \beta s_1^k, \quad s_j \equiv \sin jp\sigma, \quad j = 1, 2 \tag{3.15}$$

$$0 \le p\sigma \le \pi, \quad \sigma = \varepsilon\omega_1 t; \quad w_0 \equiv 0, \quad \sigma < 0, \quad \sigma > \pi/p$$

Здесь коэффициент $p \sim 1$ либо задается, либо определяется согласно (3.15). Малые коэффициенты $\alpha$, $\beta \sim \varepsilon^{1/2}$ или $\alpha$, $\beta \sim \varepsilon$ (см. выше) находятся из граничных условий для $s$, $c$

$$\alpha = S_k^{-1}(s_T T^{-2} - D_k c_T T^{-1}), \quad \beta = C_k^{-1} c_T T^{-1}, \quad T = \frac{\pi}{\varepsilon\omega_1 p} \tag{3.16}$$

$$\alpha, \beta \sim \varepsilon^{1/2}, \quad s_T \sim \varepsilon^{-2}, \quad c_T \sim \varepsilon^{-3/4}; \quad \alpha, \beta \sim \varepsilon, \quad s_T \sim \varepsilon^{-3/2}, \quad c_T \sim \varepsilon^{-1/4}$$

$$S_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)|\sin z|^{k-1}\sin z\, dz, \quad D_k = \frac{1}{\pi C_k}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\sin^k z\, dz$$

$$C_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^k z\, dz; \quad f_k(\sigma, \varepsilon) = w_0(\sigma, \varepsilon) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i Q_i^0 w_0^{(i-1)}(\sigma, \varepsilon)$$

Коэффициенты $S_k$, $D_k$, $C_k$ в (3.16) вычисляются явно, однако получающиеся выражения весьма громоздки и не приводятся. Случаи, когда требуется заданным образом изменить только положение $s_T$ или только скорость $c_T$, получаются на основе формул (3.16).

Соответствующее гладкое и плавное управление $f_k(\sigma, \varepsilon) = d\omega_1^2 u_k(\sigma, \varepsilon)$ вычисляется при помощи формулы (3.10)

$$f_k(\sigma, \varepsilon) = w_0(\sigma, \varepsilon) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i Q_i^0 w_0^{(i-1)}(\sigma, \varepsilon), \quad f = \frac{F}{M} \tag{3.17}$$

$$Q_i^0 = \sin \pi \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n^*}{\nu_n^i}, \quad w_0^{(2j+2)} = (w_0^{(2j)})''$$

$$w_0'' = k(2p)^2\alpha\,[(k-1)|s_2|^{k-3}s_2c_2^2 - |s_2|^{k-1}s_2] + kp^2\beta\,[(k-1)\, s_1^{k-2}c_1^2 - s_1^k],$$

$$c_j \equiv \cos jp\sigma, \quad j = 1, 2$$

Заметим, что для вычисления управлений $f_k$ (3.17) нужны только четные производные $w_0^{(2j)}$ по $\sigma$, поскольку $Q_{2j}^0 = 0$.

Рассмотрим для примера случаи нечетных значений $k = 2j + 1$. Тогда на основе (3.16), (3.17) получим явные выражения для $j = 0, 1$

$$f_1(\sigma, \varepsilon) = (1 + \varepsilon Q_1^0)(\alpha s_2 + \beta s_1), \quad f_k \equiv 0, \quad \sigma > \pi/p \tag{3.18}$$

$$f_3(\sigma, \varepsilon) = (1 + \varepsilon Q_1^0)(\alpha s_2^3 + \beta s_1^3) + 3\varepsilon^3 p^2 Q_3^0\,[4\alpha(2s_2c_2^2 - s_2^3) + \beta(2s_1c_1^2 - s_1^3)]$$

Функции управления $f_{1,3}$ (3.18) приводят к погрешностям по ускорению $\Delta w_1 \sim \varepsilon^{5/2}$, $\varepsilon^3$ и $\Delta w_3 \sim \varepsilon^{9/2}$, $\varepsilon^5$ при заданных $w_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon$ соответственно.

Могут быть выбраны другие виды профилей управляющей функции $f_k(\sigma, \varepsilon)$, которые строятся полуобратным методом по заданным профилям ускорения $w_0(\sigma, \varepsilon)$, например трапециевидные с достаточно сглаженными угловыми участками. В частности, при $k = 0$ получаем релейное управление в медленном времени $\sigma$, приводящее, согласно (3.14), к погрешностям по ускорению $\Delta w \sim \varepsilon^{3/2}$ и $\Delta w \sim \varepsilon^2$ при $w_0 \sim \varepsilon^{1/2}$ и $w_0 \sim \varepsilon$ соответственно. При этом оценки абсолютных погрешностей по перемещению $s_T$ составят величины $\Delta s_T \sim \varepsilon^{-1}$ и $\Delta s_T \sim \varepsilon^{-1/2}$, а по скорости $c_T - \Delta c_T \sim \varepsilon^{1/4}$ и $\Delta c_T \sim \varepsilon^{3/4}$. Относительные погрешности будут асимптотически малыми. Трапециевидные (с угловыми точками), т. е. кусочно-гладкие, управления приведут к погрешностям $\Delta w \sim \varepsilon^{5/2}$ и $\Delta w \sim \varepsilon^3$, на порядок меньшим по $\varepsilon$ для указанных оценок $w_0$. Аналогично устанавливаем, что погрешности реализации положения $\Delta s_T \sim 1$, $\Delta s_T \sim \varepsilon^{1/2}$, а скорости $\Delta c_T \sim \varepsilon^{5/4}$, $\Delta c_T \sim \varepsilon^{7/4}$ для $w_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, $w_0 \sim \varepsilon$ соответственно.

Представляет интерес реализация описанных законов управления движением при помощи электромеханических приводов [12].

Оценим теперь остаточные значения потенциала скоростей $\Phi(x, y, t)$ и возвышения границы раздела жидкостей $\eta(x, t)$ для $t \geq T$. При заданных гладких функциях $w_0(\sigma, \varepsilon) \sim \varepsilon^{1/2}$ искомые оценки равны: $\Phi = O(\varepsilon^{k+3/4})$, $\eta = O(\varepsilon^{k+1/2})$; если же $w_0(\sigma, \varepsilon) \sim \varepsilon$, то имеем $\Phi = O(\varepsilon^{k+5/4})$, $\eta = O(\varepsilon^{k+1})$ для значений $t \geq T$.

Заметим, что с погрешностью $O(\varepsilon^{k+1} w_0)$ систему можно привести в состояние квазистационарного ускоренного движения с ускорением $w_0(\sigma, \varepsilon)$, в частности равноускоренного: $w_0 = \text{const}$. Указанные выше состояния движения сосуда будут сохраняться на асимптотически большом интервале времени $t - T \sim \varepsilon^{-5/4}$ при $t > T$.

3. *Сравнение режимов управления и движения и выводы.* Основное различие двух подходов к задаче управления — конечно-модового и асимптотического, описанных выше, заключается в следующем. При конечно-модовой трактовке движений в распределенной колебательной системе пренебрегается модами, высшими по отношению к $(k+1)$-й. В качестве оправдательного довода, часто используемого на практике, полагается, что высшие моды колебаний слабо возбуждаются вследствие быстрого убывания коэффициентов Фурье (1.5) и, кроме того, они имеют бóльшую тенденцию к разрушению вследствие влияния малой диссипации и других возмущающих факторов. Отметим, что этот подход не связан с ограничительным предположением о малости параметра $\varepsilon$, т. е. малости влияния внутренних волн на движение сосуда как целого. Медленность управляемых движений по сравнению с волновыми процессами в общем случае не предполагается и могут быть рассмотрены задачи типа оптимального быстродействия, приводящие к быстропеременным релейным законам управления, имеющими резонансный характер и учитывающими фазы колебаний внутренних волн.

Квазистационарное управление движением сосуда осуществляется плавно на асимптотически большом интервале времени. При таком подходе учитывается весь счетный спектр внутренних волн. Конечно, подход пригоден также и в случае конечно-модового приближения системы. Такое управление не возбуждает внутренних волн с требуемой степенью точности по малому параметру $\varepsilon$, а относительные движения жидкости в сосуде носят квазистационарный характер. При плавном «включении» и «выключении» управляющего воздействия возбуждения волн не происходит, хотя квазистационарные отклонения жидкости могут быть значительными. Такие законы управления не имеют резонансного характера и не требуют учета фаз всех мод колебаний жидкости.

Итак, аналогично случаю «кинематического управления» [2, 3] установлено, что прямоугольный сосуд с относительно покоящейся стратифицированной жидкостью можно приближенно привести в состояние заданного движения как целое.

Соответствующие условия и управление конструктивно определены в терминах параметров системы и задачи управления. Требуемое состояние движения может быть сохранено достаточно длительное время.

Отметим, что изложенные подходы применимы также к некоторым задачам управления движением гибридных колебательных систем более общего вида, приводящих к аналогичной обобщенной проблеме моментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01368).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. *Акуленко Л. Д.* О кинематическом управлении движением сосуда с идеальной тяжелой жидкостью//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 39—46.
3. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Управление колебаниями неоднородной тяжелой жидкости в подвижном сосуде//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 27—35.
4. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 27—36.
5. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
6. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
7. *Полтавский Л. Н.* О финитной управляемости бесконечных систем маятников//Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 6. С. 1318—1321.
8. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
9. *Акуленко Л. Д.* Квазистационарное финитное управление движением гибридных колебательных систем//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 183—192.
10. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975. 304 с.
11. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
12. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.II.1994