

УДК 532.546—2

© 1995 г. В. Ф. ПИВЕНЬ

## ДВУМЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В СЛОЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ПРОВОДИМОСТИ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ КООРДИНАТ

Исследованы в конечном виде граничные задачи двумерной фильтрации в широком классе слоев гармонической проводимости. Показана конформная ковариантность поставленной задачи сопряжения. Это позволило свести ее к канонической задаче, решения которой представлены квадратурами. Полученные решения применены к новым задачам о работе скважины в пластах грунта при усложненных геологических условиях.

Известны решения плоских задач фильтрации в слоях переменной проницаемости, а также двумерных краевых задач в слоях переменной толщины и постоянной проницаемости [1, 2]. В данной работе ставятся и решаются в конечном виде на основе теории осесимметричных обобщенных аналитических функций [3, 4] новые граничные задачи сопряжения двумерной фильтрации в широком классе слоев, проводимость которых моделируется гармонической функцией координат. Показывается конформная ковариантность задачи сопряжения, что позволяет свести ее к канонической задаче фильтрации в слое с линейным законом изменения толщины. Решения канонической задачи представляются посредством квадратур, используя известные и найденные системы функций, являющиеся аналогом тригонометрических функций комплексного переменного. Полученные комплексные потенциалы выражаются через заданный комплексный потенциал, особые точки которого моделируют произвольные течения в слоях гармонической проводимости. Найденные решения применяются к новым задачам о работе скважины в слоях грунта при усложненных геологических условиях.

1. Рассмотрим двумерную стационарную фильтрацию в неоднородном слое с коэффициентом проницаемости  $k$  и толщиной  $h$ , расположенном на плоскости, где выбраны декартовы координаты  $\xi, \eta$ . Течение описывается квазипотенциалом скорости  $\varphi$  и функцией тока  $\psi$ , которые удовлетворяют представленной в безразмерном виде системе уравнений [2]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (1.1)$$

где  $P = kh$  — проводимость слоя,  $P = P(\xi, \eta) > 0$ .

Вводя комплексный потенциал  $W = \varphi + i\psi/P$ , уравнения (1.1) запишем в плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  следующим образом [4]:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + A(\zeta, \bar{\zeta})(W - \bar{W}) = 0 \quad (1.2)$$

$$A(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \ln \sqrt{P(\zeta, \bar{\zeta})} \quad \left( 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

Для нахождения решений уравнений (1.2) воспользуемся тем, что оно конформно-ковариантно, и рассмотрим слой, для которого  $P = f(\xi, \eta)$  — положительная гармоническая функция координат (гармонический закон изменения проводимости слоя).

Выберем связывающее плоскости  $z$  и  $\zeta$  конформное преобразование

$$z = F(\zeta) \quad (y = \text{Im } F(\zeta) = f(\xi, \eta)), \quad \zeta = F_1(z) \quad (1.3)$$

При этом граница  $f(\xi, \eta) = 0$  области фильтрации в плоскости  $\zeta$  перейдет в линию  $y=0$ . Фильтрация будет происходить в полуплоскости  $z(\text{Im } z \geq 0)$  и описываться в ней следующим из (1.2) уравнением [3]

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} - \frac{W - \bar{W}}{2(z - \bar{z})} = 0 \quad \left( 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) можно рассматривать как уравнение фильтрации в слое проводимости  $P = y$  либо осесимметричной пространственной фильтрации.

Таким образом, исследование граничной задачи в слоях с гармоническим законом проводимости сводится к решению соответствующей задачи в слое  $P = y$ .

2. Одним из методов решения граничных задач является разложение в обобщенные ряды по формальным степеням  $Z^{(n)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). [3,5]. Получим удовлетворяющие уравнению (1.4) функции, которые можно рассматривать как разложения по положительным степеням  $Z^{(n)}$ .

Учитывая для функций Бесселя формулу [6]

$$I_n'(z) + \frac{n}{z} I_n(z) = I_{n-1}(z)$$

нетрудно убедиться, что уравнениям (1.1) в декартовых координатах  $x, y$  ( $\xi = x, \eta = y$ ) при  $P = y$  удовлетворяют функции

$$\varphi = I_0(\alpha y) \begin{cases} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{cases}, \quad \psi = y I_1(\alpha y) \begin{cases} -\sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{cases}$$

где  $\alpha$  — вещественная постоянная.

Тогда для комплексного потенциала  $W$  имеем две функции

$$C(\alpha, z) = \cos \alpha x I_0(\alpha y) - i \sin \alpha x I_1(\alpha y) \quad (2.1)$$

$$S(\alpha, z) = \sin \alpha x I_0(\alpha y) + i \cos \alpha x I_1(\alpha y)$$

которые являются решениями уравнения (1.4).

Используя выражение степени  $Z^{(n)}$  в полярных координатах  $r, \theta$  полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$  [3]

$$Z^{(n)}(z) = r^n \left[ P_n(\cos \theta) + i \frac{\sin \theta}{n+1} P_n'(\cos \theta) \right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где  $P_n(\cos \theta)$  — полиномы Лежандра, представим, следуя [5], функции (2.1) обобщенными рядами Тейлора

$$C(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} Z_{(z)}^{(n)}, \quad S(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} Z_{(z)}^{(n)}$$

Эти равенства аналогичны соответствующим представлениям аналитических функций  $\cos \alpha z$  и  $\sin \alpha z$  в виде рядов по  $(\alpha z)^n$ . Поэтому функции  $C(\alpha, z)$  и  $S(\alpha, z)$  можно рассматривать как аналоги  $\cos \alpha z$  и  $\sin \alpha z$ .

Если в формулах (2.1) функции Бесселя  $I_0$  и  $I_1$  заменить на функции Макдональда  $K_0$  и  $-K_1$ , то получим функции

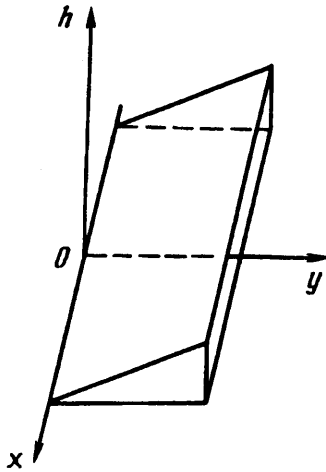
$$C_1(\alpha, z) = \cos \alpha x K_0(\alpha y) + i \sin \alpha x K_1(\alpha y) \quad (2.2)$$

$$S_1(\alpha, z) = \sin \alpha x K_0(\alpha y) - i \cos \alpha x K_1(\alpha y)$$

которые, как нетрудно убедиться, удовлетворяют уравнениям (1.1) в координатах  $x, y$  при  $P = y$ , а значит, являются решениями уравнения (1.4).

Введем функции  $T(\alpha, z)$  и  $T_1(\alpha, z)$  как линейные суперпозиции функций (2.1) и (2.2)

$$T(\alpha, z) = AC(\alpha, z) + BS_1(\alpha, z) = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) I_0(\alpha y) - i(A \sin \alpha x - B \cos \alpha x) I_1(\alpha y) \quad (2.3)$$



Фиг. 1

$$T_1(\alpha, z) = AC_1(\alpha, z) + BS_1(\alpha, z) = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) K_0(\alpha y) + i(A \sin \alpha x - B \cos \alpha x) K_1(\alpha y)$$

где  $A, B$  — вещественные постоянные. Функции  $T(\alpha, z)$  и  $T_1(\alpha, z)$  удовлетворяют уравнению (1.4).

Укажем свойство функций  $T(\alpha, z)$  и  $T_1(\alpha, z)$ , имеющее значение при решении граничных задач. Учитывая асимптотическое поведение функций  $I_n, K_n(n=0,1)$  [6], можно утверждать, что при любых фиксированных  $x$   $|T(\alpha, z)|$  экспоненциально возрастает, а  $|T_1(\alpha, z)|$  — экспоненциально убывает при  $y \rightarrow \infty$ ;  $|T(\alpha, z)|$  ограничено, а  $|T_1(\alpha, z)| \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow 0$ . Отсюда следует линейная независимость функций  $T(\alpha, z)$  и  $T_1(\alpha, z)$ , а значит, возможность представления решения  $W$  уравнения (1.4) через линейную комбинацию этих функций. В частности, если решение  $W$  ограничено при  $y=0$ , то  $W$  выражается через функцию  $T(\alpha, z)$ ; если  $W$  ограничено на бесконечности, то  $W$  представляется через  $T_1(\alpha, z)$ .

3. Переменная проводимость  $P$  слоя обусловлена изменением его коэффициента проницаемости  $k$  и толщины  $h$ . Для определенности полагаем, что  $h$  изменяется непрерывно, а  $k$  — скачком вдоль кривой  $\Gamma'$ . Эта кривая делит плоскость  $\zeta$  на области  $D_1'$  и  $D_2'$  с коэффициентами проницаемостей сред  $k_1$  и  $k_2$ , течения в которых описывают комплексные потенциалы

$$W_\nu = k_\nu \varphi_\nu + i\psi_\nu/h \quad (\nu = 1, 2) \quad (3.1)$$

удовлетворяющие уравнению (1.2) при  $P = h$ .

На границе  $\Gamma'$  выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости [1, 2]

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n'} = k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n'}, \quad \zeta \in \Gamma' \quad (3.2)$$

где  $n'$  — нормаль к  $\Gamma'$ .

Таким образом, в плоскости  $\zeta$  необходимо решать граничную задачу (1.2), (3.2).

Конформными преобразованиями (1.3) задачу (1.2), (3.2) в слое на плоскости  $\zeta$  толщины  $h = f(\xi, \eta)$  сведем к соответствующей граничной задаче в слое толщины  $h = y$  (фиг. 1). При этих преобразованиях уравнение (1.2) переходит в уравнение (1.4). Кривая  $\Gamma'$  преобразуется в кривую  $\Gamma$ , делящую полуплоскость  $\text{Im } z \geq 0$  на области  $D_1$  и  $D_2$ . Производная по нормали  $n'$  к  $\Gamma'$  выражается через производную по нормали  $n$  к  $\Gamma$ :

$$\frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial n'} = n'e' |\nabla \varphi(\zeta)| = ne \left| \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right| |\nabla \varphi(z)| = \left| \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right| \frac{\partial \varphi(z)}{\partial n} \quad (3.3)$$

Тогда условия (3.2) на границе  $\Gamma$  запишем в виде

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \quad z \in \Gamma \quad (3.4)$$

Равенства (3.2) и (3.4) свидетельствуют о конформной ковариантности условий на границе раздела двух сред. Из (3.3) следует, что при конформных преобразованиях скорости фильтрации по обе стороны этой границы изменяются по величине и не меняют свое направление к нормали границы.

Итак, используя конформную ковариантность задачи (1.2), (3.2) для слоев толщины  $h = f(\xi, \eta)$ , ее можно надлежащим выбором преобразований свести к канонической задаче (1.3), (3.4) в слое толщины  $h = y$  с простейшими границами  $\Gamma$ .

Рассмотрим случаи, когда граница  $\Gamma$  в полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$  представляет собой полуокружность и прямые, параллельные координатным осям. В этих случаях решения задач выражаются в виде квадратур.

Пусть в однородном слое  $h = y$  с коэффициентом проницаемости  $k_0$ , принимаемого за единицу измерения проницаемостей сред ( $k_0 = 1$ ), течение описывает комплексный потенциал

$$W_0 = \varphi_0 + i\psi_0/h \quad (3.5)$$

особые точки которого располагаются произвольно относительно кривой  $\Gamma$ . Полагаем, что  $W_0 = W_{01} + W_{02}$ , где функции  $W_{01}$  и  $W_{02}$  имеют особые точки в областях  $D_1$  и  $D_2$ .

Пусть  $\Gamma$  — полуокружность радиуса  $a$  ( $z = ae^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ), разделяет области  $D_1$  ( $|z| > a$ ) и  $D_2$  ( $|z| < a$ ) с коэффициентами проницаемостей сред  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда течения в этих областях определяют комплексные потенциалы [3]:

$$W_1 = W_0 + \lambda \left[ \frac{a}{2|z|} \int_0^1 H_1 \left( \frac{a^2 \tau}{z} \right) \frac{d\tau}{\tau^{(1-\lambda)/2}} + \int_{\infty}^1 G_2(z\tau) \frac{d\tau}{\tau^{(1+\lambda)/2}} \right]$$

$$W_2 = W_0 - \lambda \left[ \frac{a}{2|z|} \int_{\infty}^1 H_2 \left( \frac{a^2 \tau}{z} \right) \frac{d\tau}{\tau^{(1+\lambda)/2}} + \int_0^1 G_1(z\tau) \frac{d\tau}{\tau^{(1-\lambda)/2}} \right] \quad (3.6)$$

$$H_v \left( \frac{a^2 \tau}{z} \right) = 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \overline{W_{0v} \left( \frac{a^2 \tau}{z} \right)} + \overline{W_{0v} \left( \frac{a^2 \tau}{z} \right)} - W_{0v} \left( \frac{a^2 \tau}{z} \right)$$

$$G_v(z\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [\tau W_{0v}(z\tau)], \quad \lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad v = 1, 2$$

Когда граница  $\Gamma$  есть полупрямая  $x = d = \text{const}$  ( $y \geq 0$ ), то комплексные потенциалы течений в областях  $D_1$  ( $x > d$ ) и  $D_2$  ( $x < d$ ) задаются выражениями

$$W_1 = W_0(z-d) + \lambda [\overline{W_{01}(-\bar{z}-d)} + W_{02}(z-d)] \quad (3.7)$$

$$W_2 = W_0(z-d) - \lambda [W_{01}(z-d) + \overline{W_{02}(-\bar{z}-d)}]$$

Пусть  $\Gamma$  — прямая  $y = b = \text{const}$ , разделяющая области  $D_1$  ( $y > b$ ) и  $D_2$  ( $y < b$ ). Так как эти области неограниченно простираются в направлении оси  $x$ , то решение задачи будем искать в виде [4]

$$W_1 = W_0 + \int_0^{\infty} \Lambda_1 T_1(\alpha, z) d\alpha, \quad W_2 = W_0 + \int_0^{\infty} \Lambda_2 T(\alpha, z) d\alpha \quad (3.8)$$

где  $T(\alpha, z)$  и  $T_1(\alpha, z)$  определяются равенствами (2.3). Полагаем, что функция  $\varphi_0(x, y) = \operatorname{Re} W_0$  на границе  $y = b$  непрерывна и ее можно разложить в ряд Фурье

$$\varphi_0(x, b) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha \quad (3.9)$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t, b) \cos \alpha t dt, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t, b) \sin \alpha t dt \quad (3.10)$$

Тогда, подставляя (3.8) в условия (3.4) ( $n$  совпадает с  $y$ ), находим

$$\Lambda_1 = I_1(\alpha b) \Lambda(\alpha b), \quad \Lambda_2 = -K_1(\alpha b) \Lambda(\alpha b) \quad (3.11)$$

$$\Lambda(\alpha b) = (k_1 - k_2) [k_1 I_0(\alpha b) K_1(\alpha b) + k_2 I_1(\alpha b) K_0(\alpha b)]^{-1} \quad (3.12)$$

Учитывая (2.3), (3.9)–(3.11), решение (3.8) запишем в виде

$$W_1 = W_0 + \int_0^{\infty} \Lambda(\alpha b) I_1(\alpha b) [\omega(\alpha, x) K_0(\alpha y) + i\omega_1(\alpha, x) K_1(\alpha y)] d\alpha \quad (3.13)$$

$$W_2 = W_0 - \int_0^{\infty} \Lambda(\alpha b) K_1(\alpha b) [\omega(\alpha, x) I_0(\alpha y) + i\omega_1(\alpha, x) I_1(\alpha y)] d\alpha$$

$$\omega(\alpha, x) = A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t, b) \cos \alpha(t - x) dt \quad (3.14)$$

$$\omega_1(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \omega(\alpha, x)}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t, b) \sin \alpha(t - x) dt$$

где  $\Lambda(\alpha, b)$  определяется формулой (3.12).

Решения (3.6), (3.7) и (3.13), в частности, определяют комплексные потенциалы течений в случаях, когда одна из областей  $D_1$  или  $D_2$  непроницаема (коэффициенты проницаемости  $k_1$  или  $k_2$  равны нулю) либо заполнена свободной жидкостью ( $k_1$  или  $k_2$  бесконечны).

Решения (3.6), (3.7) и (3.13) можно трактовать в пространстве как комплексные потенциалы осесимметричных течений в средах, границами раздела однородности которых являются соответственно сферическая, плоская и цилиндрическая поверхности.

4. Входящие в комплексные потенциалы (3.6), (3.7) и (3.13) функция  $W_0$  имеет особые точки, моделирующие произвольные течения. Среди функций  $W_0$  принципиальную значимость имеют фундаментальные решения уравнения (1.4) [3], одним из которых является кольцевой источник. Течение от источника с плотностью мощности  $q$ , расположенного в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  полуплоскости  $\operatorname{Im} z \geq 0$ , описывается комплексным потенциалом

$$W_0 = -\frac{qy_0}{\pi R_*} \left\{ K(k) + i \frac{x - x_0}{2y} [m' \Pi(-m^2, k) - K(k)] \right\} \quad (4.1)$$

$$k = \frac{2\sqrt{yy_0}}{R_*}, \quad m = \frac{2\sqrt{yy_0}}{y + y_0}, \quad m^2 + m'^2 = 1, \quad R_* = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода модуля  $k$ ,  $\Pi(-m^2, k)$  — полный эллиптический интеграл третьего рода параметра  $m$  и модуля  $k$ . Полная мощность источника  $Q = 2\pi y_0 q$ .

Подставляя (4.1) в решения (3.6), (3.7) и (3.13), получаем комплексные потенциалы течений от источника в слоях с соответствующими границами  $\Gamma$  раздела их однородности. Входящие в решение (3.13) функции  $\omega(\alpha, x)$  и

$\omega_1(\alpha, x)$  находим следующим образом. Согласно (3.5) и (4.1), имеем потенциал скорости источника

$$\varphi_0 = -\frac{qy_0}{\pi R_*} K(k) \quad (4.2)$$

который, используя формулу (6.672(8)) из [7], представим в виде

$$\varphi_0 = -\frac{qy_0}{\pi} \begin{cases} \int_0^\infty K_0(\alpha y_0) I_0(\alpha y) \cos \alpha (x - x_0) d\alpha & (y < y_0) \\ \int_0^\infty I_0(\alpha y_0) K_0(\alpha y) \cos \alpha (x - x_0) d\alpha & (y > y_0) \end{cases} \quad (4.3)$$

Из равенств (3.9), (3.14) и (4.3) находим

$$\omega(\alpha, x) = -\frac{qy_0}{\pi} \begin{cases} K_0(\alpha y_0) I_0(\alpha b) \cos \alpha (x - x_0) & (b < y_0) \\ I_0(\alpha y_0) K_0(\alpha b) \cos \alpha (x - x_0) & (b > y_0) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\omega_1(\alpha, x) = \frac{qy_0}{\pi} \begin{cases} K_0(\alpha y_0) I_0(\alpha b) \sin \alpha (x - x_0) & (b < y_0) \\ I_0(\alpha y_0) K_0(\alpha b) \sin \alpha (x - x_0) & (b > y_0) \end{cases}$$

Тогда из формул (3.13) и (4.4) определяем комплексные потенциалы источника в случаях, когда он расположен в области  $D_1(y > b)$  и области  $D_2(y < b)$

$$W_1 = W_0 - \frac{qy_0}{\pi} \int_0^\infty \Lambda(\alpha b) I_0(\alpha b) I_1(\alpha b) K_0(\alpha y_0) [K_0(\alpha y) \cos \alpha (x - x_0) - iK_1(\alpha y) \sin \alpha (x - x_0)] d\alpha \quad (4.5)$$

$$W_2 = W_0 + \frac{qy_0}{\pi} \int_0^\infty \Lambda(\alpha b) I_0(\alpha b) K_1(\alpha b) K_0(\alpha y_0) [I_0(\alpha y) \cos \alpha (x - x_0) + iI_1(\alpha y) \sin \alpha (x - x_0)] d\alpha$$

$$W_1 = W_0 - \frac{qy_0}{\pi} \int_0^\infty \Lambda(\alpha b) I_1(\alpha b) K_0(\alpha b) I_0(\alpha y_0) [K_0(\alpha y) \cos \alpha (x - x_0) - iK_1(\alpha y) \sin \alpha (x - x_0)] d\alpha \quad (4.6)$$

$$W_2 = W_0 + \frac{qy_0}{\pi} \int_0^\infty \Lambda(\alpha b) K_0(\alpha b) K_1(\alpha b) I_0(\alpha y_0) [I_0(\alpha y) \cos \alpha (x - x_0) + iI_1(\alpha y) \sin \alpha (x - x_0)] d\alpha$$

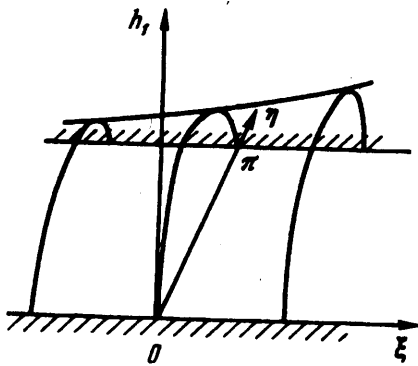
где  $W_0$  имеет вид (4.1).

Выполняя  $n$ -кратное  $\Sigma$ -дифференцирование [3] комплексного потенциала источника (4.1), можно на основании формул (3.6), (3.7), (4.5) и (4.6) получить комплексные потенциалы течений от мультиполей порядка  $2n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

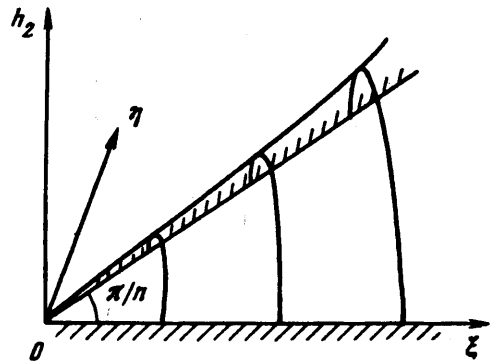
5. Воспользуемся конформной ковариантностью задачи (1.2), (3.2) и ее решение для неоднородных слоев толщины  $h = f(\xi, \eta)$  с различными границами  $\Gamma'$  находим, выполняя преобразования (1.3) в полученных решениях (3.6), (3.7) и (3.13).  
Преобразование

$$z = e^\xi \quad (x = e^\xi \cos \eta, \quad y = e^\xi \sin \eta) \quad (5.1)$$

позволяет найти решение задачи в полосообразном слое толщины (фиг. 2)  
 $h_1 = e^\xi \sin \eta$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть границей  $\Gamma$  является полуокружность единичного радиуса ( $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ), образом которой  $\Gamma'$  в силу (5.1) будет отрезок прямой  $\xi = 0$  ( $\eta \in [0, \pi]$ ). Согласно преобразованию (5.1), полагая в решении (3.6)

$$\tau = e^{i\eta}, \quad z\tau = e^{\xi+i\eta}, \quad \frac{d^2\tau}{z} = e^{-\xi+i\eta}$$

имеем комплексные потенциалы течений в областях  $D_1'(\xi > 0)$  и  $D_2'(\xi < 0)$

$$W_1 = W_0(\xi) + \lambda \left[ \frac{|e^{-\xi}|}{2} \int_{-\infty}^0 e^{-\nu/2(1+\lambda)\eta} H_1(-\xi + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-\nu/2(1+\lambda)\eta} G_2(\xi + \tau) d\tau \right]$$

$$W_2 = W_0(\xi) - \lambda \left[ \frac{|e^{-\xi}|}{2} \int_{-\infty}^0 e^{-\nu/2(1-\lambda)\eta} H_2(-\xi + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-\nu/2(1-\lambda)\eta} G_1(\xi + \tau) d\tau \right]$$

$$H_\nu(-\xi + \tau) = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \overline{W_{0\nu}(-\xi + \tau)} + \overline{W_{0\nu}(-\xi + \tau)} - W_{0\nu}(-\xi + \tau) \quad (5.2)$$

$$G_\nu(\xi + \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [e^{i\eta} W_{0\nu}(\xi + \tau)], \quad (\nu = 1, 2)$$

Если границей  $\Gamma$  служит полупрямая  $x = d$  ( $y \geq 0$ ), то формулы (3.7) и (5.1) опишут течения в слое толщины  $h_1$  с границей  $\Gamma'$ :  $e^{\xi} \cos \eta = d$ . В частности, если  $d=0$ , то уравнение  $\Gamma'$  есть прямая  $\eta = \pi/2$ , делящая слой на области  $D_1'(\eta \in [0, \pi/2])$  и  $D_2'(\eta \in [\pi/2, \pi])$ , течения в которых определяют комплексные потенциалы

$$W_1 = W_0(\xi - i\pi/2) + \lambda [W_{01}(\xi + i\pi/2) + W_{02}(\xi - i\pi/2)] \quad (5.3)$$

$$W_2 = W_0(\xi - i\pi/2) - \lambda [W_{01}(\xi - i\pi/2) + \overline{W_{02}(\xi + i\pi/2)}]$$

Когда границей  $\Gamma$  является прямая  $y = b$ , то формулы (3.13) и (5.1) описывают течение в слое толщины  $h_1$  с границей  $\Gamma'$ :  $e^{\xi} \sin \eta = b$ .

Воспользуемся преобразованием

$$z = \zeta^n \quad (x = \rho^n \cos n\vartheta, \quad y = \rho^n \sin n\vartheta) \quad (5.4)$$

где  $\rho, \vartheta$  — полярные координаты плоскости  $\zeta$ , и рассмотрим течения в клиновидном слое с углом  $\pi/n$  при вершине  $O$ , закон изменения толщины которого (фиг. 3)  $h_2 = \rho^n \sin n\vartheta$ .

В этом случае полуокружность  $\Gamma: z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , преобразуется в отрезок дуги окружности  $\Gamma': \zeta = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, \pi/n]$ . Согласно равенствам (5.4) полагая в решении (3.6)

$$\tau = \tau_1^n, \quad z\tau = (\zeta\tau_1)^n, \quad \frac{a^2\tau}{z} = \left(\frac{\tau_1}{\zeta}\right)^n$$

имеем комплексные потенциалы течений в областях  $D_1'(\rho > 1)$  и  $D_2'(\rho < 1)$

$$W_1 = W_0(\zeta) + \lambda \left[ \frac{1}{2|\zeta|^{1/n}} \int_0^1 \tau_1^{n(1+\lambda)/2-1} H_1\left(\frac{\tau_1}{\zeta}\right) d\tau_1 + \int_0^1 \tau_1^{n(1+\lambda)/2} G_1(\zeta\tau_1) d\tau_1 \right]$$

$$W_2 = W_0(\zeta) - \lambda \left[ \frac{1}{2|\zeta|^{1/n}} \int_0^1 \tau_1^{n(1-\lambda)/2-1} H_2\left(\frac{\tau_1}{\zeta}\right) d\tau_1 + \int_0^1 \tau_1^{n(1-\lambda)/2} G_2(\zeta\tau_1) d\tau_1 \right]$$

$$H_\nu\left(\frac{\tau_1}{\zeta}\right) = 2\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \overline{W_{0\nu}\left(\frac{\tau_1}{\zeta}\right)} + n \left[ \overline{W_{0\nu}\left(\frac{\tau_1}{\zeta}\right)} - W_{0\nu}\left(\frac{\tau_1}{\zeta}\right) \right]$$

$$G_\nu(\zeta\tau_1) = \frac{\partial}{\partial \tau_1} [\tau_1^n W_{0\nu}(\zeta\tau_1)], \quad \nu = 1, 2$$

В случае границы  $\Gamma: x = d$ ,  $y \geq 0$ , формулы (3.7) и (5.4) описывают течения в слое толщины  $h_2$  с границей  $\Gamma': \rho^n \cos n\theta = d$ . В частности, при  $d = 0$  уравнение  $\Gamma'$  есть луч  $\theta = \pi/2n$ ,  $\rho \in [0, \infty]$ , делящий слой на области  $D_1'(\theta \in [0, \pi/2n])$  и  $D_2'(\theta \in [\pi/2n, \pi/n])$ , движение в которых описывают комплексные потенциалы

$$W_1 = W_0(\zeta e^{-i\pi/2n}) + \lambda [\overline{W_{01}(\zeta e^{i\pi/2n})} + W_{02}(\zeta e^{-i\pi/2n})]$$

$$W_2 = W_0(\zeta e^{-i\pi/2n}) - \lambda [\overline{W_{01}(\zeta e^{-i\pi/2n})} + W_{02}(\zeta e^{i\pi/2n})]$$

Когда границей  $\Gamma$  является прямая  $y = b$ , то формулы (3.13) и (5.4) определяют фильтрацию в слое толщины  $h_2$  с границей  $\Gamma': \rho^n \sin n\theta = b$ .

Изучение течений в слоях толщины  $h = f(\xi, \eta)$  можно продолжить, рассмотрев другие конформные преобразования.

Определенные комбинации решений (3.6), (3.7) и (3.13) в сочетании с преобразованиями (1.3) позволяют расширить круг задач, исследуемых в конечном виде. Пусть, например, линия  $x = 0$  ( $y \geq 0$ ) непроницаема либо является эквипотенциальной. Если границей  $\Gamma$  служит четверть окружности  $z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, \pi/4]$ ), то течения в областях с коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  проницаемостей сред описывают комплексные потенциалы

$$w_\nu^\pm = W_\nu(z) \pm \overline{W_\nu(-\bar{z})} \quad (\nu = 1, 2) \quad (5.5)$$

где  $W_\nu(z)$  определяются формулами (3.6), знаки плюс и минус отвечают соответственно непроницаемой и эквипотенциальной линии  $x = 0$  ( $y \geq 0$ ). Этой задаче соответствует задача в слое толщины  $h_1$ , когда прямая  $\eta = \pi/2$  непроницаема либо эквипотенциальна, а граница  $\Gamma': \xi = 0$ , делит слой на области проницаемости  $k_1$  и  $k_2$ , течение в которых описывают комплексные потенциалы

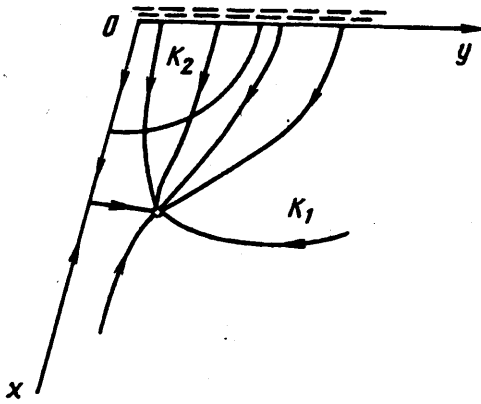
$$w_\nu^{\pm i} = W_\nu(\zeta - i\pi/2) \pm \overline{W_\nu(\zeta + i\pi/2)} \quad (\nu = 1, 2) \quad (5.6)$$

где  $W_\nu(\zeta - i\pi/2)$  имеют вид (5.3).

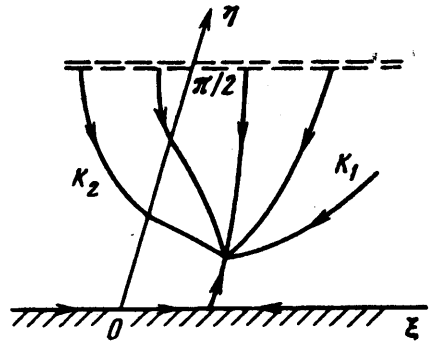
В частности, решения (5.5) и (5.6) описывают течения, вызванные источником (стоком) (4.1). На фиг. 4 и 5 изображены течения к стоку, когда линии  $x = 0$  ( $y \geq 0$ ) и  $\eta = \pi/2$  являются эквипотенциальными.

Возможны также другие сочетания решений (3.6), (3.7), (3.13) с использованием преобразований (1.3).





Фиг. 4



Фиг. 5

6. Рассмотрим одно из возможных практических приложений полученных решений задачи (1.4), (3.4): определим дебит совершенной скважины в природном слое грунта, который можно моделировать слоем толщины  $h = y$  с границами  $\Gamma$  раздела его однородности в виде полуокружности либо прямой линии. Работу эксплуатационной скважины моделируем стоком с плотностью мощности  $q < 0$ . Течение к скважине, расположенной в однородном с коэффициентом  $k_0 = 1$  слое (граница  $\Gamma$  отсутствует), описывает комплексный потенциал (4.1). Потенциал скорости (4.2) течения на бесконечности стремится к нулю. Поэтому в рассматриваемых далее условиях работы скважины потенциал скорости течения на бесконечности можно принять равным нулю.

Если скважина находится в области  $D_1$  ( $|z| > a$ ) неоднородного слоя с границей  $\Gamma: z = ae^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , то течение описывает решение (3.6), в котором  $W_{02} = 0$ ,  $W_{01} = W_0$ , и  $W_0$  имеет вид (4.1). Из этого решения, согласно формулам (3.1) и (3.5), имеем

$$\varphi_1 = \frac{ay_0}{\pi k_1} \left\{ \frac{K(k)}{R_*} + \frac{\lambda a}{r} \int_0^1 \tau^{(1+\lambda)/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{K(k(\tau))}{R_*(\tau)} \right] d\tau \right\} \quad (6.1)$$

$$k(\tau) = \frac{2a\sqrt{y_0\tau}}{rR_*(\tau)}, \quad R_*(\tau) = \left[ \left( \frac{a^2x\tau}{r^2} - x_0 \right)^2 + \left( \frac{a^2y\tau}{r^2} + y_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

Эквипотенциальные линии, тесно охватывающие скважину, можно считать окружностями. Одну из таких линий,  $\varphi_1 = \varphi_c$ , примем за круговой радиуса  $R_c$  контур скважины. Учитывая, что  $z_c \approx z_0$  ( $R_c \ll |z_0|$ ), имеем модуль  $k \approx 1$ , для которого [6]  $K(k) = \ln 4(1 - k^2)^{-1/2} + h(k)$  ( $h(k)$  — монотонно убывающая функция  $k$ , причем  $h(1) = 0$ ). Тогда из (6.1) находим дебит скважины

$$q = 2\pi k_1 \varphi_c \left( \ln \frac{8y_0}{R_c} + M \right)^{-1}$$

$$M = \frac{2\lambda ay_0}{r_0} \left[ \frac{K(k'(1))}{R_*'(1)} - \frac{1 + \lambda}{2} \int_0^1 \tau^{(\lambda-1)/2} \frac{K(k'(\tau))}{R_*'(\tau)} d\tau \right] \quad (\lambda \in [-1, 1]) \quad (6.2)$$

$$M = -\frac{2ay_0}{r_0} \left[ \frac{K(k'(1))}{R_*'(1)} - \frac{\pi}{2r_0} \right], \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (\lambda = -1)$$

где  $k'(\tau)$  и  $R_*'(\tau)$  — значения  $k(\tau)$  и  $R_*(\tau)$  при  $z = z_0$ .

Из (6.2), в частности, имеем дебит скважины в однородном ( $k_1 = k_2$ ,  $\lambda = 0$ ) слое

$$q_0 = 2\pi k_1 \varphi_c \left( \ln \frac{8y_0}{R_c} \right)^{-1} \quad (6.3)$$

Введем величину

$$\eta = \frac{q_0}{q} - 1 = M \left( \ln \frac{8y_0}{R_c} \right)^{-1} \quad (6.4)$$

характеризующую влияние неоднородности среды на дебит.

Выбирая за единицу длины радиус  $a$  ( $a = 1$ ) и принимая  $R_c = 10^{-3}$ , на основе численного расчета по формуле (6.4) заключаем, что наличие в слое области  $D_2(|z| < a)$  с большей проницаемостью ( $k_2 > k_1$ ,  $\lambda < 0$ ) увеличивает дебит ( $q > q_0$ ). Наибольшее влияние оказывает каверна ( $k_2 = \infty$ ,  $\lambda = -1$ ). Неоднородность среды сильнее всего сказывается на дебите скважины, находящейся на оси  $y$ . При положениях скважины, характеризуемых координатами  $r_0 \geq 1, 2$ ,  $\theta_0 \in [0, \pi]$ , для всех  $\lambda \in [-1, 1]$  влияние неоднородности среды на дебит пренебрежимо мало ( $|\eta| \leq 5\%$ ) и его можно рассчитывать, пользуясь простой формулой (6.3).

Аналогично на основе решения (3.6) нетрудно найти дебит скважины, расположенной в области  $D_2(|z| < a)$ .

Когда  $\Gamma: x = 0$  ( $y \geq 0$ ) и скважина находится в области  $D_1(x > 0)$ , то течение описывает решение (3.7), где  $W_{02} = 0$ ,  $W_{01} = W_0$  и  $W_0$  имеет вид (4.1). Из этого решения получаем

$$\varphi_1 = \frac{qy_0}{\pi k_1} \left[ \frac{K(k)}{R_*} + \lambda \frac{K(k')}{R_1} \right], \quad k' = \frac{2\sqrt{yy_0}}{R_1}, \quad R_1 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2}$$

Отсюда подобно тому, как это сделано выше, находим, что  $q$  и  $\eta$  определяются формулами (6.2) и (6.4), в которых  $M = \lambda(y_0/r_0)K(y_0/r_0)$ .

Величина  $|\eta|$  максимальна при  $|\lambda| = 1$ . С ростом  $x_0$   $|\eta| \rightarrow 0$  тем быстрее, чем меньше  $y_0$ , и влияние неоднородности среды на дебит пренебрежимо мало ( $|\eta| \leq 5\%$ ), например, для  $y_0 = 200$ , если  $x_0 \geq 800$ , для  $y_0 = 100$ , если  $x_0 \geq 500$  (за единицу длины выбран радиус скважины ( $R_c = 1$ )). В этих случаях дебит можно вычислять по формуле (6.3).

Аналогично, используя решения (4.5) и (4.6), нетрудно найти дебит скважины в неоднородном слое с границей  $\Gamma: y = b$ .

Применение преобразований (1.3) позволяет на основе решений (3.6), (3.7), (4.5) и (4.6) исследовать работу скважины в неоднородных слоях толщины  $h = f(\xi, \eta)$ . В частности, изображенные на фиг. 4 и 5 линии тока моделируют течение к скважине в слоях толщины  $h = y$  и  $h_1$ .

Полученные решения граничной задачи (1.2), (3.2) применимы для широкого круга двумерных процессов различной физической природы, описываемых уравнениями (1.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Радыгин В. М., Голубева О. В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк., 1983. 160 с.

3. *Пивень В. Ф.* Метод осесимметричных обобщенных аналитических функций в исследовании динамических процессов//ПММ. 1991. Т. 55. № 2. С. 228—234.
4. *Пивень В. Ф.* О двумерной фильтрации в слоях с прерывно изменяющейся проводимостью вдоль кривых второго порядка//Изв. АН. МЖГ. 1993. № 1. С. 120—128.
5. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.
6. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции: формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1968. 344 с.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Орел

Поступила в редакцию  
14.П.1994