

УДК 532.546

© 1995 г. М. В. ПАНФИЛОВ

МАКРОКИНЕТИКА ЦЕЛИКООБРАЗОВАНИЯ В ЦИКЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭФФЕКТИВНОЙ СРЕДЫ

В работе [1] предлагалась осредненная модель процесса целикообразования, интерпретируемого как фазовый переход с собственным временем кинетики. Структура кинетических коэффициентов была раскрыта для простейшей модели пористой среды в виде системы дублетов. Недостатком модели дублета является упрощенное определение поля скоростей, а также обязательность образования целика при прохождении воды через дублет. Более сложной моделью среды, позволяющей описать макрокинетику целикообразования, является вариант эффективной среды, предлагаемый ниже. Этот вариант, названный циклической моделью эффективной среды, отличается от классического варианта [2] тем, что позволяет описать нестационарные процессы переноса. Циклическая модель эффективной среды позволяет описать новые качественные закономерности процесса целикообразования.

1. Идея циклической модели эффективной среды для процессов переноса. Рассмотрим движение жидкости в капиллярной сетке, представляющей собой регулярную периодическую систему узлов, соединенных цилиндрическими звеньями случайного радиуса r . Считается, что движение флюида в среднем однонаправленное вдоль оси x . Будем считать, что сетка статистически представительна, т. е. включает достаточно большое количество узлов. Среди множества путей, состоящих из цепочки последовательных звеньев, соединяющих грани A , B , выделим кратчайшие, которые будем называть каналами. Звенья, соединяющие данный канал с соседними, назовем перемычками.

Модель строится на следующей основной гипотезе: если из среды изъять произвольный канал вместе с отходящими от него перемычками, то в среднем в процессе течения ничего не изменится. Эта гипотеза предполагает некоторую стохастическую однородность среды, но лишь в одном, основном направлении.

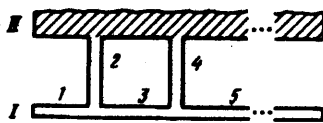
Следствием гипотезы является то обстоятельство, что для рассматриваемого процесса достаточно исследовать модель сети, изображенную на фиг. 1: в среде выделяется основной канал I, который перемычками соединяется с эффективной средой II. Перемычка имеет кратность $\kappa - 2$ (κ — число звеньев, сходящихся в узле), это означает, что одна перемычка состоит из $\kappa - 2$ независимых звеньев. Структура с одной перемычкой образует «цикл» (фиг. 2, а), N -цикловая модель содержит N перемычек (фиг. 2, б).

На такой сетке можно изучать нестационарный процесс заполнения среды последовательными стадиями (циклами), т. е. в динамике, в отличие от классического метода эффективной среды, позволяющего определять эффективные параметры только стационарных течений.

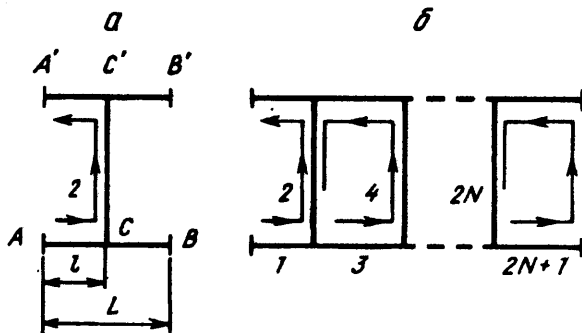
Редуцированная сеть содержит два типа узлов: «истинные» — между основным каналом и перемычками, а также «усредненные» — между перемычками и эффективной средой. Звенья основного канала имеют нечетные номера, перемычки — четные.

Помимо параметров κ и N модель характеризуется перепадом давления $\Delta P = P_A - P_B$, длиной звена l , а также плотностью распределения радиусов звеньев $\varphi(r)$. Общая длина модели $L = l(N + 1)$.

2. Уравнения движения и неразрывности в циклической модели эффективной среды. Введем следующие обозначения: v_i — скорость течения в i -м звене;



Фиг. 1



Фиг. 2

$a_i, b_i \equiv 1/a_i, \sigma_i$ — проводимость, сопротивление и площадь поперечного сечения i -го звена; $A, B \equiv 1/A$ — эффективные проводимость и сопротивление соответственно; U — осредненная скорость. Символом $\langle \cdot \rangle$ обозначим усреднение по вероятности.

При однофазном пуазейловом течении в капилляре кругового сечения величины a_i и σ_i связаны линейным соотношением

$$a_i = \gamma \sigma_i, \quad \gamma \equiv 1/(8\mu) \quad (2.1)$$

где μ — вязкость жидкости. Эта связь сохраняет силу и при двухфазном одно-вязкостном течении.

Уравнения движения в отдельном звене и в эффективной среде имеют вид (фиг. 2, а)

$$\delta P_i/l = v b_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \delta P/l = UB, \quad \delta P = P_a' - P_c' \quad (2.2)$$

где δP_i — перепад давления на i -м звене, δP — перепад в эффективной среде на длине l .

Уравнение неразрывности в истинном узле C имеет вид

$$v_1 \sigma_1 = v_3 + (\kappa - 2) v_2 \sigma_2 \quad (2.3)$$

что представляет собой закон Кирхгофа с учетом того, что по перемычке протекает $(\kappa - 2)$ -кратный расход.

Уравнения неразрывности в усредненных узлах можно записать только для усредненных потоков. Например, для узла C'

$$U \sigma_e + \langle V_2 \sigma_2 (\kappa - 2) \rangle = U \sigma_e \rightarrow \langle V_2 \sigma_2 \rangle = 0 \quad (2.4)$$

Здесь σ_e — площадь поперечного сечения эффективной среды.

Таким образом, уравнения неразрывности в усредненных узлах вырождаются в требование равенства нулю осредненного расхода в каждой перемычке. Условие (2.4) отражает тот факт, что наличие основного канала с его перемычками не влияет на процесс в эффективной среде, что является эквивалентом основной гипотезы.

Кроме того, вводятся условия непрерывности давления во всех точках, а также условие самосогласования: средневзвешенная скорость в любом основном звене должна совпадать с эффективной скоростью

$$\langle V_i \sigma_i \rangle / \langle \sigma_i \rangle = U, \quad i = 1, 3, 5, \dots, 2N + 1 \quad (2.5)$$

3. Одноцикловая модель. Ограничения на параметры сети. Рассмотрим систему, изображенную на фиг. 2, а. Уравнения движения записываются сразу для таких контуров, которые позволяют исключить промежуточные давления и в сумме охватывают все звенья редуцированной сети. Выбираем контуры $ACC'A'$ и $BCC'B$. Уравнения движения вдоль них записываются в виде

$$v_1 b_1 + v_2 b_2 = UB, \quad v_3 b_3 + v_2 b_2 = UB \quad (3.1)$$

Здесь учтено, что $P_A = P_A'$, $P_B = P_B'$.

Уравнения неразрывности в узлах C , C' и условия самосогласования имеют вид

$$v_1 \sigma_1 = v_3 \sigma_3 + (\kappa - 2) v_2 \sigma_2, \quad \langle v_2 \sigma_2 \rangle = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\langle v_1 \sigma_1 \rangle}{\langle \sigma_1 \rangle} = U, \quad \frac{\langle v_3 \sigma_3 \rangle}{\langle \sigma_3 \rangle} = U \quad (3.3)$$

В этой системе уравнений величину U можно считать заданной, так как она легко определяется из уравнения движения, записанного, например, для контура $A'C'B'$: $\Delta P/l = 2UB \rightarrow \Delta P/L = UB$.

Система из шести уравнений (3.1)—(3.3) содержит четыре неизвестных: v_1 , v_2 , v_3 , B . Два «лишних» уравнения выполняются автоматически, если наложены определенные ограничения на распределения случайных величин σ и b . Будем считать, что выполняется следующее свойство стохастической однородности среды вдоль основного направления.

Пусть совместная плотность распределения случайных параметров звеньев $\varphi(a_1, a_2, a_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ инвариантна относительно одновременной перестановки пар (a_1, a_3) и (σ_1, σ_3) , т. е.

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varphi(a_3, a_2, a_1, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) \quad (3.4)$$

Тогда вторые условия в (3.2) и (3.3) выполняются автоматически.

Для модели N -го цикла требуется инвариантность функции распределения φ относительно всевозможных перестановок звеньев основного канала (нечетные индексы).

В частном случае, если все случайные величины независимы, для выполнения (3.4) достаточно, чтобы были одинаковы распределения проводимостей всех звеньев, а также их поперечников σ . Таким образом, метод требует однородности вдоль основного направления случайных функций, описывающих свойства среды,

В итоге вторые уравнения в (3.2), (3.3) можно отбросить.

4. N -цикловая модель: поле скоростей, эффективная проводимость. В N -цикловой модели удобнее всего записать уравнения движения по замкнутым контурам (фиг. 2, б). Используя следующее представление $v_i = Uf_i$, получим $N + 1$ уравнений движения, N условий сохранения в узлах и условие самосогласования

$$f_1 b_1 + f_2 b_2 = B, \quad f_1 \sigma_1 = f_2 \sigma_2^* + f_3 \sigma_3$$

$$f_3 b_3 + f_4 b_4 + f_2 b_2 = B, \quad f_3 \sigma_3 = f_4 \sigma_4^* + f_5 \sigma_5$$

...

$$f_{2N-1} b_{2N-1} + f_{2N} b_{2N} + f_{2N-2} b_{2N-2} = B, \quad f_{2N-1} \sigma_{2N-1} = f_{2N} \sigma_{2N}^* + f_{2N+1} \sigma_{2N+1}$$

$$f_{2N+1} b_{2N+1} - f_{2N} b_{2N} = B,$$

$$\langle f_i \sigma_i \rangle = \langle \sigma_i \rangle, \quad \sigma_{2i}^* \equiv \sigma_{2i} (\kappa - 2)$$

Система замкнута относительно неизвестных $f_1, f_2, \dots, f_{2N+1}, B$.

Кроме того, имеются условия на распределения σ_i и b_i , а также осредненное уравнение движения для определения скорости U

$$\langle f_{2i}\sigma_{2i} \rangle = 0, \quad \langle f_{2i+1}\sigma_{2i+1} \rangle = \langle f_{2i}\sigma_{2i} \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad \Delta P/L = UB$$

Решение имеет вид

$$f_{2i+1} = \alpha_{2i+1}f_1 - \beta_{2i+1}B/b_1 \quad (4.1)$$

$$\alpha_{2i+1} = \frac{\sigma_{2i}^* a_{2i}}{\sigma_{2i-1}} \left[\alpha_{2i-1} \Phi - a_{2i-3} \frac{\sigma_{2i-3}}{\sigma_{2i-2} \sigma_{2i-2}} \right], \quad i = 2, 3, \dots, N$$

$$\alpha_3 = \frac{\sigma_2^* a_2}{\sigma_3} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2 a_2^*} \right), \quad \alpha_1 = 1$$

$$\beta_{2i+1} = \frac{\sigma_{2i}^* a_{2i}}{\sigma_{2i-1}} \left[\beta_{2i-1} \Phi - \beta_{2i-3} \frac{\sigma_{2i-3}}{\sigma_{2i-2} \sigma_{2i-2}} \right], \quad i = 2, 3, \dots, N$$

$$\beta_3 = \frac{\sigma_2^* a_2}{\sigma_3 a_3}, \quad \beta_1 = 0, \quad \Phi \equiv \frac{1}{a_{2i-1}} + \frac{\sigma_{2i-1}}{a_{2i} \sigma_{2i}^*} + \frac{\sigma_{2i-1}}{a_{2i-2} \sigma_{2i-2}^*}$$

Этим соотношения определяют поле скоростей.

Эффективная проводимость в N -цикловой модели имеет вид

$$A_{(N)} = \left\langle \frac{\sigma_1 a_1 [\beta_{2N+1} G_N - \beta_{2N-1} \sigma_{2N-1} + a_{2N} \sigma_{2N}^* / a_1]}{\alpha_{2N+1} G_N - \alpha_{2N-1} \sigma_{2N-1}} \right\rangle \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle} \quad (4.2)$$

$$G_N = \frac{a_{2N}}{a_{2N+1}} + \frac{\sigma_{2N}^*}{\sigma_{2N+1}}; \quad \sigma_{2i}^* \equiv \sigma_{2i} (\chi - 2); \quad A_{(0)} = \frac{\langle a_1 \sigma_1 \rangle}{\langle G_1 \rangle}$$

При $N = 1$ имеем

$$A^{(1)} = \left\langle \frac{\sigma_1 a_1 [2a_3 \sigma_3 + a_2 \sigma_2 (\chi - 2)]}{a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 (\chi - 2) + a_3 \sigma_3} \right\rangle \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle}$$

$$\frac{K\gamma}{m} = \left\langle \frac{r_1^A [2r_3^A + r_2^A (\chi - 2)]}{r_1^A + r_3^A + r_2^A (\chi - 2)} \right\rangle \frac{1}{\langle r_1^A \rangle}$$

Здесь r_1, r_2, r_3 — три независимые случайные величины с одинаковым распределением $f(r)$, K — проницаемость среды, γ — определен в (2.1).

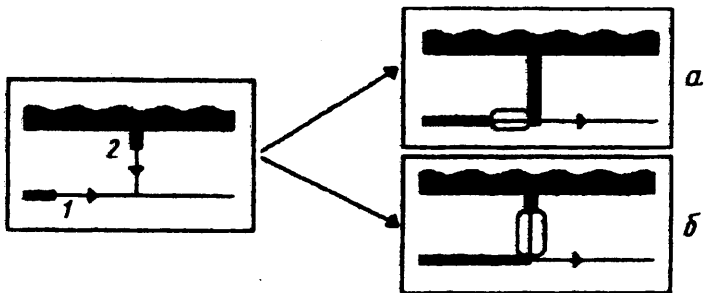
Поле скоростей определяется с помощью соотношений

$$f_1 = \frac{1}{AG} \left[\frac{2\sigma_3}{a_2} + \frac{\sigma_2 (\chi - 2)}{a_3} \right], \quad f_2 = \frac{1}{AG} \left[\frac{\sigma_1}{a_3} + \frac{\sigma_3}{a_1} \right] \quad (4.3)$$

$$f_3 = a_3 \left[\frac{1}{A} + \frac{f_2}{a_2} \right], \quad G \equiv \frac{\sigma_3}{a_1 a_2} + \frac{\sigma_1}{a_2 a_3} + \frac{\sigma_2 (\chi - 2)}{a_1 a_3}$$

Ниже показаны результаты расчетов величин $A^{(N)}$ для равномерного распределения проводимостей на отрезке $[1, 2]$, полученные на ЭВМ:

N модели	0	1	2	3	∞
$A^{(N)}/\langle a_1 \rangle$	1,672	1,487	1,479	1,467	1,462



Фиг. 3

В качестве эталонного точного значения (при $N \rightarrow \infty$) взята величина, которая определяется классическим методом эффективной среды [3]

$$0 = \left\langle \frac{A - a}{a + (\kappa/2 - 1)A} \right\rangle \equiv \int_0^{\infty} f(a) \left[\frac{A - a}{a + (\kappa/2 - 1)A} \right] da$$

где $f(a)$ — плотность распределения величины a .

Сходимость очень быстрая и уже первое приближение дает хороший результат (погрешность менее 3%).

5. Условия образования целиков в циклической модели. Описание двухфазного процесса в циклической модели не вызывает трудностей, если пренебречь целикообразованием. Образование целиков приводит к тому, что оказывается невозможным строгое последовательное применение модели для получения осредненного описания всего процесса вытеснения в целом. Однако с ее помощью можно описать кинетику самого процесса целикообразования.

Будем считать, что в среде образуются только целики нулевого порядка, что приемлемо для случаев соотношения вязкостей $\mu_1 \sim \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$ [1].

Выделим произвольный элемент среды, изображенный на фиг. 3. Вязкости фаз будем считать одинаковыми. Образование целика возможно двумя способами: а) в основном канале 1, если из эффективной среды движется мениск, который быстрее доходит до узла и блокирует звено 1 (фиг. 3, а); б) в перемычке 2, если в ней движется мениск из эффективной среды, а мениск в звене 1 доходит до узла быстрее и блокирует перемычку (фиг. 3, б).

Выделим в момент t сечение среды x . Все элементы, берущие начало в сечении x , можно разбить на следующие классы: Y_1 — вытеснение еще не началось, Y_2 — содержат целики, образовавшиеся ранее, Y_3 — движутся два мениска (и в основном канале, и в перемычке) с опережающим движением мениска 2 (образуются целики типа а), Y_4 — движутся два мениска с опережающим движением мениска 1 (образуются целики типа б), Y_5 — идет вытеснение без образования целиков.

Рассмотрим процесс образования целиков типа а. Выделим произвольный элемент класса Y_3 в момент t в сечении x . Пусть ξ_1, ξ_2 — локальные координаты менисков в основном канале и перемычке. Для образования целика за время Δt от момента t необходимо, чтобы выполнялись условия: мениск 2 отстоит от узла не более чем на $v_2 \Delta t$, а мениск 1 удален от узла дальше чем на $v_1 \Delta t$:

$$\xi_2 \geq l - v_2 \Delta t, \quad \xi_1 < l - v_1 \Delta t \quad (5.1)$$

Точное время, через которое образуется целик в любом из этих элементов, $T = (l - \xi_2)/v_2$. Объем целика в одном элементе

$$V_v^* = \sigma_1 [l - \xi_1 - v_1 T] \quad (5.2)$$

6. Кинетика целикообразования в 0- и 1-циклового моделях. В дальнейшем результаты зависят от способа определения поля скоростей. В нулевом приближении $v_i = \gamma \sigma_i$. Это то же самое, что в теории дублета, и проходит только для случая одновязкостного вытеснения.

Тогда прирост объема целиков типа a за время Δt будет

$$\Delta V_{ir}' = \langle V_{ir}^{\circ} \rangle_{Y_3} | Y_3 | = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left[\int_0^{p-\gamma \sigma_1 \Delta t} \left(\int_{p-\gamma \sigma_2 \Delta t}^l (\sigma_1, \sigma_2, \xi_1, \xi_2) V_{ir}^{\circ} d\xi_2 \right) d\xi_1 \right] d\sigma_2 \right) d\sigma_1$$

Для независимых величин $f(\sigma_1, \sigma_2, \xi_1, \xi_2) = \psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2)\varphi(\xi_1)\varphi(\xi_2)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ можно получить

$$\Delta V_{ir}' = \gamma \varphi(l) \langle \sigma \rangle^2 \langle l - \xi_1 \rangle \Delta t$$

Пример, что среднее значение величины $\xi_1 \in [0, l]$ есть $l/2$, тогда $\langle l - \xi_1 \rangle = l/2$. Заметим, что в остальном распределение величины ξ_1 произвольно. Средний объем целика в одном канале $\langle V_{ir}^{\circ} \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \langle l - \xi_1 \rangle$, а доля таких каналов равна

$$\alpha_3 = \int_{l-\gamma \sigma_2 \Delta t}^l \varphi(\xi_2) d\xi_2 = \gamma \sigma_2 \varphi(l) \Delta t$$

откуда, усредняя по σ_2 , получим $\Delta V_{ir}' = 1/2 \gamma \varphi(l) \langle \sigma \rangle^2 l \Delta t$

Прирост среднего объема целика типа b ($\Delta V_{ir}''$) в элементах Y_4 такой же: $\Delta V_{ir}'' = \Delta V_{ir}'$, в силу симметрии, поэтому полный прирост среднего объема целиков есть $\Delta V_{ir} = \gamma \varphi(l) \langle \sigma \rangle^2 l \Delta t$. Средний объем одного элемента $V^{\circ} = 2l \langle \sigma \rangle$, тогда прирост целиконасыщенности будет

$$\Delta S_{ir} = \frac{\Delta V_{ir}}{V^{\circ}} = \frac{(N_3 + N_4) \gamma \varphi(l) \langle \sigma \rangle l \Delta t}{N \cdot 2}$$

Величину $(\alpha_3 + \alpha_4)$ можно нестрого определить так же, как в теории дублета, тогда окончательно

$$\frac{\partial S_{ir}}{\partial t} = \lambda \left(S - S_{ir} \frac{\beta_2}{\beta_1} \right), \quad \lambda = \frac{1}{2} \gamma \varphi(l) \langle \sigma \rangle \beta_1 \quad (6.1)$$

где λ — интенсивность целикообразования; β_1, β_2 — подгоночные коэффициенты, имеющие порядок l , приближенные значения которых определены ранее.

Как видно, в модели нулевого порядка (по заданию поля скоростей) скорость целикообразования не зависит от степени неоднородности среды, что существенно расходится с результатами теории дублета. Модель следующего уровня сложности можно получить, если более строго описать поле скоростей.

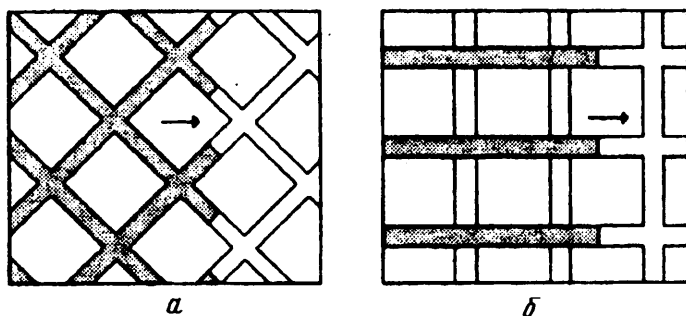
Для скорости в основном канале согласно (4.3) имеем

$$v_i G_i = U \left(\sigma_2 b_2 - \frac{\sigma_3^2 b_3}{\sigma_1 b_1} \right)$$

Будем считать, что проводимости звеньев пропорциональны их поперечным сечениям: $1/b_i = V \sigma_i$. Тогда, опуская промежуточные выкладки, приведем результаты для скорости целикообразования в соотношении (6.1)

$$\lambda = 1/2 \gamma \varphi(l) \langle \sigma \rangle \beta_1 [3 \langle \sigma \rangle^2 - \sqrt{3 D_{\sigma}} \langle \sigma \rangle] \quad (6.2)$$

где D_{σ} — дисперсия величины σ , $\langle \sigma \rangle$ — ее математическое ожидание.



Фиг. 4

7. Обсуждение результатов. Основное отличие теории эффективной среды от теории дублета — качественно иное влияние на скорость целикообразования степени неоднородности системы. В предельном случае абсолютно однородной среды модель дублета предсказывает нулевую скорость образования целиков, а модель эффективной среды — конечную, причем весьма значительную.

Эти различия не связаны с ошибками какой-либо теории и не являются их недостатками. Объяснение связано с ориентационным эффектом и иллюстрируется фиг. 4, где изображена одна и та же однородная сетка каналов, но различным способом ориентированная относительно основного направления течения.

В случае, представленном на фиг. 4, *a*, целики образовываться не будут, так как все каналы равноправны, а на фиг. 4, *б* во всех вертикальных звеньях останутся целики, так как движение будет идти только по горизонтальным каналам. В последнем случае горизонтальные и вертикальные каналы неравноценны (основные каналы и перемычки).

Таким образом, процесс целикообразования помимо всего прочего зависит еще и от ориентации капиллярной сети или от направления вытеснения. Очевидно, что теория дублета и теория эффективной среды описывают два случая разной ориентации сети.

Ориентационный эффект присущ не всем сеткам, например он отсутствует в гексагональной решетке из-за высокой степени ее изотропии.

Чем больше степень регулярности (периодичности) структуры среды при наличии в ней анизотропии, тем значительнее ориентационный эффект и тем выше целиконасыщенность. Таким образом, проблема целикообразования позволила выявить серьезный недостаток периодических сеток, часто использующихся для моделирования процессов вытеснения на микроуровне. Повышение степени хаотичности структуры среды — эффективный способ борьбы с ним.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панфилов М. Б. Макрокинетическая модель процесса целикообразования при двухфазном вытеснении флюидов в пористой среде//Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3.
2. Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред//М.: Недра, 1985. 288 с.
3. Kirkpatrick S. Percolation and conduction//Rev. Modern. Phys. 1973. V. 45. № 4. P. 574—588.

Москва

Поступила в редакцию
15.XI.1993