

УДК 532.516:532.527.2

© 1995 г. М. И. ГРАДОВОЕВ, И. Н. ЛАРИНА, С. П. ПОПОВ,  
В. А. РЫКОВ, Е. М. ШАХОВ

## РАЗВИТИЕ ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Численно исследуются при числах Рейнольдса  $Re = 1-10$  двумерные вихревые нестационарные течения вязкой несжимаемой жидкости в зазорах между двумя соосными цилиндрами или частями полусфер, вращающимися с постоянным угловым ускорением около неподвижной оси симметрии. Установлено, что реализуются режимы ламинарного циркуляционного движения. В течении образуются два вихря, взаимное расположение которых существенно зависит от геометрии вращающейся полости.

Исследование движения жидкости во внутренних полостях движущегося произвольным образом твердого тела относится к классическим задачам механики [1, 2]. В системе координат, жестко связанной с телом, для описания относительного движения вязкой несжимаемой жидкости используются уравнения Навье—Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} - \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{V} = 0$$

$$P = \frac{1}{2} [(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \Omega^2 r^2] + \frac{p}{\rho}$$

Здесь  $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$  — скорость жидкости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  — угловая скорость вращения тела,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$  — угловое ускорение,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор точки физического пространства,  $t$  — время.

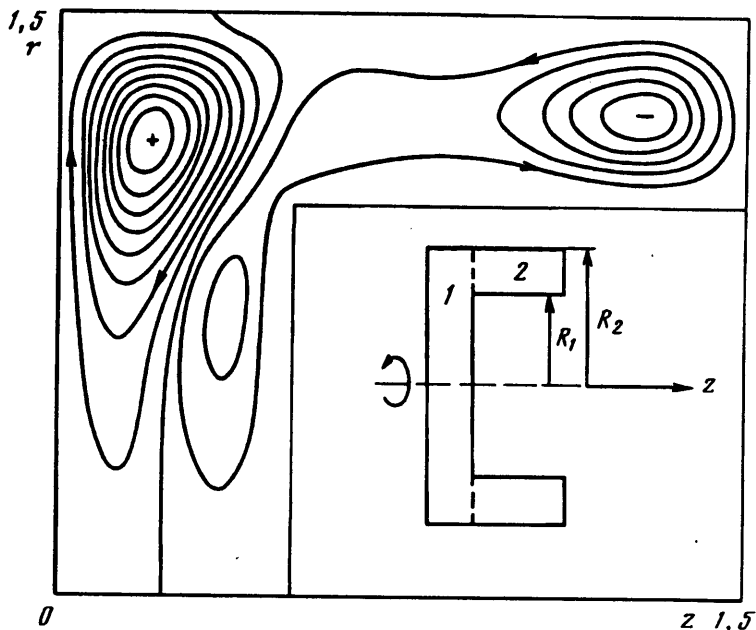
В случае, когда полость образовывалась стенками коаксиальных цилиндров, использовалась цилиндрическая система координат. Считалось, что вращение происходит около оси симметрии полости, совпадающей с осью координат  $z$ . Если полости ограничивались стенками концентрических сфер или их частями, то использовалась сферическая система координат и вращение считалось происходящим около оси  $\theta$ , являющейся в данном случае осью симметрии.

Для обезразмеривания исходных уравнений и величин выбраны характерные масштабы длины, времени, угловой скорости, скорости течения и давления:  $R_1$  — радиус внутреннего цилиндра или сферы,  $t_0 = 1$  с,  $\Omega_0 = 1$  рад/с,  $V_0 = \Omega_0 R_1$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $\rho = \rho_0 V_0^2$ . При выбранной системе характерных величин число Струхала  $Sh = 1$ , число Рейнольдса  $Re = \Omega_0 R_1^2 / \nu$ .

Векторы  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  — заданные функции времени. Далее все величины считаются безразмерными и обозначаются теми же символами, что и соответствующие размерные величины.

На поверхности тела задаются условия прилипания и непротекания  $V_r = V_\varphi = V_z = 0$  для цилиндрической и  $V_r = V_\theta = V_z = 0$  для сферической геометрии.

При  $t = 0$  задается состояние покоя, т. е. равенство всех компонент скорости



Фиг. 1

нулю и постоянство давления во всей области течения. Во всех рассматриваемых ниже случаях течение в полостях формируется под действием постоянного ускорения вращения тела по углу  $\varphi : \varepsilon_\varphi = \varepsilon_0$ , следовательно,  $\omega = \varepsilon_0 t$ .

Для численного решения поставленных задач реализованы расчетные алгоритмы, в основу которых положены идеи Харлоу [3, 4]. В случае цилиндрической симметрии использовалась аппроксимация уравнений, записанных в виде, содержащем частные производные от компонент скоростей, их квадратов и комбинаций произведений. В случае сферической симметрии исходные уравнения записывались в общем виде, пригодном для любой ортогональной системы координат.

Кратко опишем схему алгоритма численного решения (1). Скорость потока  $V^{n+1}$  на  $(n+1)$ -м временном слое при известном векторе  $V^n$  определялась в два этапа. На первом этапе по явной схеме определялся вектор  $V'$  по уравнению (1), но без градиентов давления

$$\frac{V' - V^n}{\Delta t} = (- (\nabla \nabla) V - 2 (\Omega \times V) + \nu \Delta V - \varepsilon \times r)^n \quad (2)$$

На втором этапе вычислялся вектор  $V^{n+1}$  по известному полю давления  $P$ .

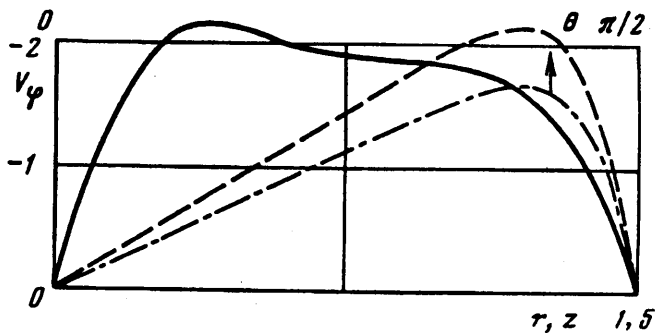
$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\delta t} = - \nabla P$$

Давление  $P$  определялось между этими двумя этапами из уравнения Пуассона, которое получается после применения операции  $\nabla$  к уравнению (3) с учетом условия несжимаемости  $\nabla \nabla V^{n+1} = 0$

$$\Delta P = \nabla \nabla V' / \Delta t \quad (4)$$

Уравнение Пуассона (4) с граничным условием  $\partial p / \partial n = V_n' / dt$  решалось методом итераций, в котором применялись метод прогонки по координате  $r$  и метод верхней релаксации по другим переменным.

Для каждой искомой функции вводилась своя дискретная сетка. Шаги сетки  $\Delta r, \Delta \varphi, \Delta z$  различались, но были постоянны по каждой переменной. Давление  $p$  определялось в центре ячейки с координатами  $z_i, r_j, \varphi_k$ . Компоненты скорости  $V_r, V_z$  и  $V_\varphi$  определялись соответственно в узлах  $(r_j + 1/2, z_i, \varphi_k), (r_j, z_i + 1/2, \varphi_k), (r_j, z_i, \varphi_k + 1/2)$ . Аналогичная дискретизация была в случае сферической симметрии.



Фиг. 2

В расчетах по каждой координате было 30—40 расчетных точек, временной шаг  $\Delta t = 0,001 - 0,0001$ , итерационный параметр сходимости по давлению  $\epsilon_p = 0,01 - 0,005$ .

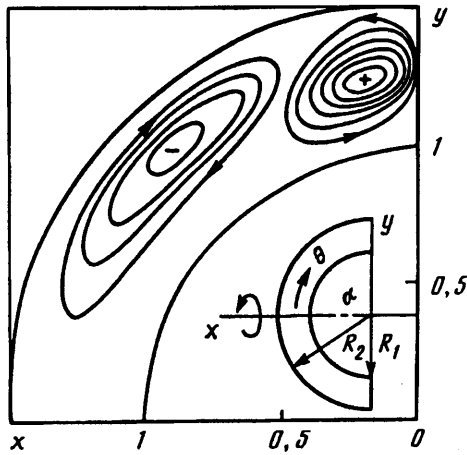
Рассмотрим осесимметричное течение жидкости в полости тела между двумя коаксиальными цилиндрами. Полость состоит из торцевой (1) и боковой (2) частей (фиг. 1). Вращение тела как целого из состояния покоя с постоянным угловым ускорением  $\omega = 50$  рад/с происходит вокруг оси  $z$ . Радиус и длина внутреннего цилиндра  $R_1 = L_1 = 1$ , внешнего цилиндра  $R_2 = L_2 = 1,5$ . Число Рейнольдса  $Re = 1$ .

При вращении тела с постоянным угловым ускорением азимутальная составляющая скорости  $V_\varphi$  движения жидкости относительно тела, направленная перпендикулярно изображенной на фиг. 1 плоскости  $r, z$ , во внутренней части области начинает возрастать по абсолютной величине. Из-за действия сил инерции компонента  $V_\varphi$  приобретает всюду отрицательные значения. Увеличение градиентов  $V_\varphi$  приводит к возрастанию вязких сил, которые через некоторое время компенсируют инерциальные силы и распределение  $V_\varphi$  в плоскости  $r, z$  стабилизируется [5].

Этот процесс происходит очень быстро. Так, ко времени  $t = 0,3$ , когда тело сделало пол-оборота вокруг оси, распределение  $V_\varphi$  уже имеет стационарный вид: сечение распределения  $V_\varphi$  по средней линии области 2 приведено на фиг. 2 сплошной кривой. Штриховой кривой показано распределение  $V_\varphi$  вдоль среднего сечения области 1. В периферийной по отношению к оси вращения области 2 почти всюду  $V_\varphi \approx -2$ , а в области 1  $V_\varphi$  линейно увеличивается от нуля до экстремальных значений соответственно с ростом расстояния от оси. Пристеночные слои, в которых происходит резкое изменение  $V_\varphi$  до нулевых значений, имеют характерную толщину 0,2—0,3. Подобные распределения наблюдаются и в любых других сечениях плоскости  $r, z$ .

Это течение индуцирует появление двух других составляющих скорости  $V_r$  и  $V_z$ . Они имеют значительно меньшие абсолютные значения, но более сложное пространственное распределение по сравнению с  $V_\varphi$ . На фиг. 1 даны распределения изолиний функции тока  $\Psi(r, z)$ , построенной по компонентам  $V_r$  и  $V_z$ . Здесь и далее на фигурах знаками плюс или минус обозначены положения максимальных  $\Psi_1$  или минимальных  $\Psi_2$  значений функций тока. Линии уровней проведены через равные интервалы. На фиг. 1 видны три, почти неизменные по форме вихря: два — со встречным течением жидкости в торцевой части и один — в боковой ( $\Psi_1 = 0,86 \cdot 10^{-2}$ ,  $\Psi_2 = -0,55 \cdot 10^{-2}$ ).

В дальнейшем ( $t \approx 3 - 4$ ) за счет перекачки энергии вращения тела через движение по  $\varphi$  все компоненты скорости становятся соизмеримыми, происходит почти линейный временной рост интенсивности вихрей, но геометрия течения остается неизменной.



Фиг. 3

Образующиеся вихревые течения сильно зависят от геометрии полости тела, определяющей силы инерции, которые в начальный момент раскручивания тела доминируют. Это подтверждается результатами расчетов течения, вызываемого сходными с рассмотренным случаем условиями, но в полости, образованной внешней и внутренней поверхностями двух concentрических сфер (фиг. 3). Радиус внутренней сферы  $R_1 = 1$ , внешней  $R_2 = 1,5$ ,  $Re = 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \alpha$ ,  $\alpha = \pi/2$ .

Качественно поведение со временем компоненты скорости  $V_\varphi$  такое же, как в цилиндрическом течении. Так же к моменту времени  $t = 0,3$  происходит стабилизация. На фиг. 2 соответственно этому моменту времени штрихпунктирной кривой показано распределение  $V_\varphi(r_0, \theta)$  при  $r_0 = 1,25$ , т. е. по средней линии зазора. Можно отметить сходство с распределением этой же величины в среднем течении торцевой части в цилиндрическом течении (штриховая кривая на фиг. 2). В отличие от цилиндрического течения в плоскости  $r, \theta$  образуются только два вихря, чередующиеся по углу  $\theta$  и находящиеся в радиальном направлении ближе к внешней поверхности полости. Вблизи оси вращения движение весьма слабое;  $\Psi_1 = 0,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $\Psi_2 = -0,5 \cdot 10^{-2}$ .

Взаимодействие жидкости с поверхностью тела  $S$  характеризуется величиной момента сил  $M_z$ , действующего со стороны жидкости на тело. В приведенных примерах величина момента сил  $m_z = M_z/S$ , приходящегося на единицу площади поверхности полости, в фазе стабилизации течения постоянна. Для цилиндрического случая  $m_z = 12,2$ , для сферического  $m_z = 16,1$ .

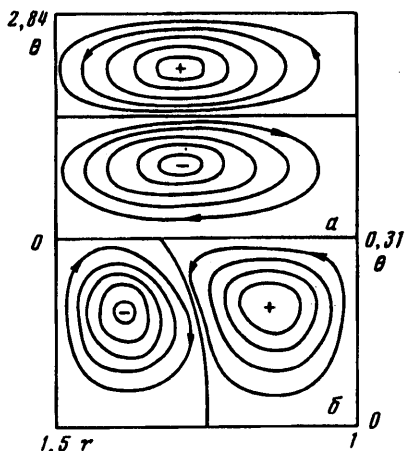
В случае одномерного течения жидкости между коаксиальными цилиндрами бесконечной длины, приведенными в равноускоренное движение как единое целое вокруг оси симметрии с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon$ , точное решение уравнений Навье — Стокса имеет вид

$$V_\varphi(r) = 0,125\varepsilon Re (r^2 - R_1^2) (r^2 - R_2^2) r^{-1}$$

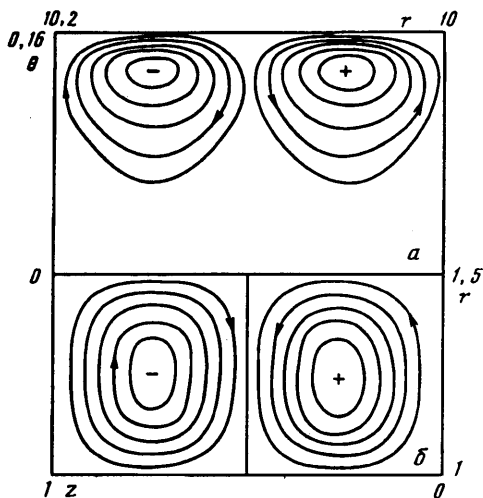
На это стационарное распределение при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически выходит решение при любом начальном распределении и его можно рассматривать как аналог течения Пуазейля, причем роль градиента давления играет массовая сила  $\varepsilon r$ .

Момент вращения на единицу длины цилиндра не зависит от числа Рейнольдса и равен  $M_z = 0,5\varepsilon r (R_2^4 - R_1^4)$ . Эта величина, отнесенная к единице площади, имеет вид  $m_z = M_z (2\pi (R_1 + R_2))^{-1}$ . При подстановке в последнее выражение  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 1,5$ ,  $\varepsilon = 50$  получаем  $m_z = 20,3$ , что в 1,3—1,5 раза больше соответствующих величин в приведенных выше расчетах.

Сравним вихревые структуры, существующие в рамках сферической геометрии,



Фиг. 4



Фиг. 5

но соответствующие течениям в полостях с различными углами раствора  $\alpha$  при  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 1,5$ ,  $Re = 1$ .

При  $\alpha = 2,84$  во времени  $t = 0,24$  в течении по обе стороны от угла  $\alpha_0 = \pi/2$  образуются два вихря примерно одинаковой формы ( $\Psi_1 = 0,38 \cdot 10^{-2}$ ,  $\Psi_2 = -0,41 \cdot 10^{-2}$ , фиг. 4, а). При  $\alpha = 0,31$  реализуется совершенно другой тип течения — вихри чередуются не по оси  $\theta$ , а по оси  $r$  ( $t = 0,03$ ,  $\Psi_1 = 0,17 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Psi_2 = -0,21 \cdot 10^{-5}$ , фиг 4, б).

Из анализа результатов расчетов следует, что при увеличении  $\alpha$  от малых значений до  $\pi$  при фиксированных  $R_1$  и  $R_2$  происходит постепенная перестройка течения. Вместо двух вихрей, расположенных друг за другом по оси  $r$  и занимающих всю область по углу  $\theta$ , появляются два вихря, чередующиеся по углу  $\theta$  и охватывающие все пространство полости по радиусу. Течение, показанное на фиг. 3, имеет промежуточный характер.

Если угол  $\alpha$  мал и  $R_1 \approx R_2$ , то полость между сферическими поверхностями близка к цилиндрической полости 1 (фиг. 1) с теми же радиусами  $R_1$ ,  $R_2$  и длиной  $L = R_1 \operatorname{tg} \alpha$ . В пределе при  $\alpha \rightarrow 0$  цилиндрические и сферические течения должны быть одинаковыми. Такой предельный режим при  $R_1 = 10$ ,  $R_2 = 10,2$ ,  $\alpha = 0,16$  для сферической геометрии ( $t = 0,02$ ) приводит к образованию течения, изображенному на фиг. 5, а. Вихревое течение не меняет вида, характерного для малых углов  $\alpha$ , т. е. имеются два вихря, расположенные по радиусу и смещенные к внешнему краю вращающейся полости ( $\Psi_1 = 0,36 \cdot 10^{-2}$ ,  $\Psi_2 = -0,36 \cdot 10^{-2}$ ). Стабилизация распределения  $V_\varphi(r, \theta)$  наступает уже ко времени  $t = 0,01$ .

Если полость имеет вид 2 (фиг. 1) с  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 1,5$ , то в течении присутствуют два вихря, расположенные по длине полости ( $t = 0,4$ ,  $\Psi_1 = 0,1$ ,  $\Psi_2 = 0,1$ , фиг. 5, б).

На начальном этапе разгона вращающегося тела стабилизируется профиль компоненты скорости  $V_\varphi$ , а две другие компоненты  $V_r$ ,  $V_z$  (или  $V_r$ ,  $V_\theta$ ) по абсолютной величине сравнительно малы. Течение обладает простой структурой, наблюдаются один или два вихря, устойчивых по форме и медленно растущих по амплитуде. При  $t \approx 2 - 3$  происходит выравнивание абсолютных величин всех компонент скорости.

Расчетами на основе трехмерных уравнений Навье — Стокса исследовалась устойчивость течений по отношению к малым возмущениям в случаях, близких к изображенному на фиг. 5, б типу течений. Результаты этих расчетов показали,

что вносимые в поток несесимметричные возмущения (в виде  $\delta$ -функции по времени и координатам) на стадии стабилизации течения затухают и основное течение остается осесимметричным.

Аналогичные численные результаты получены для течения в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами при их ускоренном вращении около прецессирующей оси, что соответствует постоянно вносимому в течение возмущению. При отношении угловой скорости прецессии к основной скорости осесимметричного вращения 1 : 10 течение практически остается неизменным и близким к осесимметричному.

Режим течения жидкости существенно усложняется при увеличении числа Re [5, 6].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные капельной жидкостью//Собр. соч. М.: Гостехтеориздат, 1949. Т. 2. С. 152—309.
2. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика твердого тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
4. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface//Phys. Fluids. 1965. V. 8. № 12. P. 2182—2189.
5. Градобоев М. И., Ларина И. Н., Рыков В. А., Шахов Е. М. Вихревые движения несжимаемой жидкости в цилиндрической полости тела, вращающегося с постоянным ускорением//Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 2. С. 180—184.
6. Градобоев М. И., Ларина И. Н., Рыков В. А., Шахов Е. М. Исследование нестационарных вихревых движений вязкой несжимаемой жидкости в полости вращающегося тела//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 3. С. 415—431.

Москва

Поступила в редакцию  
28.XII.1993