

УДК 532.516:532.525.2

© 1995 г. В. К. АХМЕТОВ, В. Я. ШКАДОВ

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУИ С КОЛЬЦЕВЫМ ЗАКРУЧЕННЫМ ПОТОКОМ

Численно исследована задача о взаимодействии осесимметричных течений с распределенной по радиусу закруткой. Получены различные режимы течений с образованием приосевых рециркуляционных зон.

Задача о взаимодействии двух осесимметричных закрученных потоков актуальна в связи с проблемами моделирования течений в камерах сгорания и газовых турбинах [1], вихревых камерах и газовых завесах [2]. Будем рассматривать случай, когда течение организовано следующим образом. Два коаксиальных потока, разделенных тонкой кольцевой перегородкой — внутренний незакрученный и внешний с закруткой, поступают в цилиндрический канал и интенсивно в нем взаимодействуют. Важная особенность таких течений состоит в том, что при достижении критической величины начальной закрутки образуются приосевые рециркуляционные зоны. Форма и характер этих зон сходны с аналогичными формированиями в закрученных потоках при распаде вихревого течения [3—4]. В данной работе на основе численного метода, изложенного в [5], продолжены исследования по формированию таких крупномасштабных вихревых структур.

1. Рассмотрим задачу о взаимодействии внутренней осевой струи радиусом  $r_0$  и внешнего кольцевого ( $r_0 \leq r \leq r_1$ ) закрученного потока в осесимметричном канале радиуса  $R$  ( $R \geq r_1$ ). Осесимметричные ламинарные течения вязкой несжимаемой жидкости описываются системой уравнений Навье — Стокса, которую в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  относительно функции тока  $\psi$ , завихренности  $\Omega$  и азимутальной скорости  $V_\varphi$  представим в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\Omega \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} (V_r \Omega) = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Omega}{r} \right) \right] + G^2 \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\varphi)^2}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (V_z V_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r V_\varphi) + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{V_\varphi}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \Omega = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (1.4)$$

Система уравнений (1.1)—(1.4) записана в консервативной форме и содержит

два безразмерных параметра: число Рейнольдса  $Re = U_0 R / \nu$  и параметр закрутки  $G = W_1 / U_0$ , в которых  $U_0, W_1$  — максимальные значения осевой и азимутальной скорости для струи и для кольцевого потока на входе в канал; скорости  $V_z, V_\varphi$  отнесены к величине  $U_0$ , а  $V_\varphi$  — к  $W_1$ .

Решение рассматриваемой задачи определяется в области  $Q$  ( $0 \leq z \leq z_k, 0 \leq r \leq R$ ). Граничные условия включают задание на входе  $z = 0$  профилей скоростей  $V_{z0}(r), V_{\varphi 0}(r)$ , условий прилипания на твердых поверхностях канала, условий симметрии на оси  $r = 0$  и мягких граничных условий в выходном сечении  $z = z_k$ . Совокупность граничных условий запишем в виде [5]

$$\psi = f_1(r), \quad V_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad z = 0$$

$$\psi = f_2(r), \quad V_\varphi = V_{\varphi 0}(r), \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad z = 0$$

$$\psi = \psi_1 = \text{const}, \quad V_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad r_1 \leq r \leq R, \quad z = 0$$

$$\psi = \psi_1 = \text{const}, \quad V_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq z_k, \quad r = R \quad (1.5)$$

$$\psi = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad \Omega = 0, \quad 0 \leq z \leq z_k, \quad r = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad z = z_k$$

Для численного решения краевой задачи (1.1)—(1.4) с граничными условиями (1.5) использовался конечно-разностный метод установления.

В соответствии с этим искомое стационарное решение определялось как предельное, устанавливающееся при интегрировании системы (1.1)—(1.4) по времени от заданных начальных условий. Имеющийся опыт вычислений [5] и тестовые расчеты для данной задачи показывают, что предельное состояние не зависит от выбора начального распределения, поэтому принималось

$$\Omega = \Omega_0(r, z) = 0, \quad V_\varphi = V_{\varphi 0}(r, z) = 0, \quad t = 0, \quad (r, z) \in Q \quad (1.6)$$

Для решения уравнения Пуассона (1.1) применялся метод неполной редукции, использовавшийся в [5]. Это прямой метод, сущность которого заключается в том, что в исходной системе разностных уравнений проводится один шаг исключения по методу циклической редукции, а затем решение строится в виде разложений в ряд Фурье в направлении  $z$  и определяется путем решения системы трехточечных разностных уравнений в направлении  $r$ . Высокую эффективность алгоритма обеспечивает применение быстрого преобразования Фурье и метода прогонки.

По сравнению с [5] проведены следующие усовершенствования расчетной схемы. Уравнения переноса (1.2)—(1.3) решались с помощью неявного метода блочной итерации [6]. Аппроксимация диффузионных членов осуществлялась центральными разностями. При аппроксимации конвективных членов использовалась модифицированная схема Леонарда с квадратичными разностями против потока третьего порядка точности, в которой явным образом выделялась классическая противопоточная схема, а в источниковую часть уравнения добавлялись соответствующие корректирующие потоки. Для аппроксимации производных по времени использовалась схема Эйлера.

При решении уравнения (1.2) относительно завихренности границы расчетной области, на которых формально не заданы условия для  $\Omega$ , смещались на один шаг сетки внутрь расчетной области  $Q$ , а значения на них рассчитывались, исходя из разностной аппроксимации уравнения (1.1), с использованием односторонней четырехточечной аппроксимации для  $\partial \psi / \partial n$ .

Последовательность вычислений была такова. Для каждого шага по времени сначала решалось уравнение (1.1) относительно  $\psi$ , далее рассчитывались значения  $V_z, V_\varphi$  по формулам (1.4), затем

Несимметричный канал				Симметричный канал		
Re	L	[7]	[8]	Re	L	[6]
200	7,980	8,3	8,67	50	7,022	7,0
300	10,138	10,0	11,3	100	13,548	13,7
400	11,958	12,2	13,8	150	20,326	20,8

решалось уравнение (1.3) для  $V_\varphi$ , после чего определялось поле завихренности из (1.2). Критерием окончания расчета служило условие

$$\max_{L,j} \left| \frac{\Omega_{L,j}^{n+1} - \Omega_{L,j}^n}{\Omega_{L,j}^n} \right| \leq \varepsilon$$

в котором параметр  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ . Вычисления проводились на равномерной сетке  $41 \times 129$  с длиной расчетной области  $z_k = 10$ . Шаг по времени составлял  $\Delta t = 0,5$ .

В качестве тестовых задач рассматривались расчеты симметричного и несимметричного течений за ступенькой высотой  $h = 0,5R$  в плоском канале. На входе задавался параболический профиль Пуазейля с расходом  $Q_0 = 1$  на единицу ширины канала. В табл. 1 приведены зависимости длины  $L$  зоны возвратного течения за ступенькой, отнесенной к ее высоте, от числа Рейнольдса, построенного по среднерасходной скорости. Сравнение с имеющимися расчетными и экспериментальными данными [6—8] показывает достоверность полученных результатов.

2. Для расчетов взаимодействия осевого и кольцевого закрученного потоков на входе  $z = 0$  задавались профили с равномерным распределением скорости и следующими значениями:

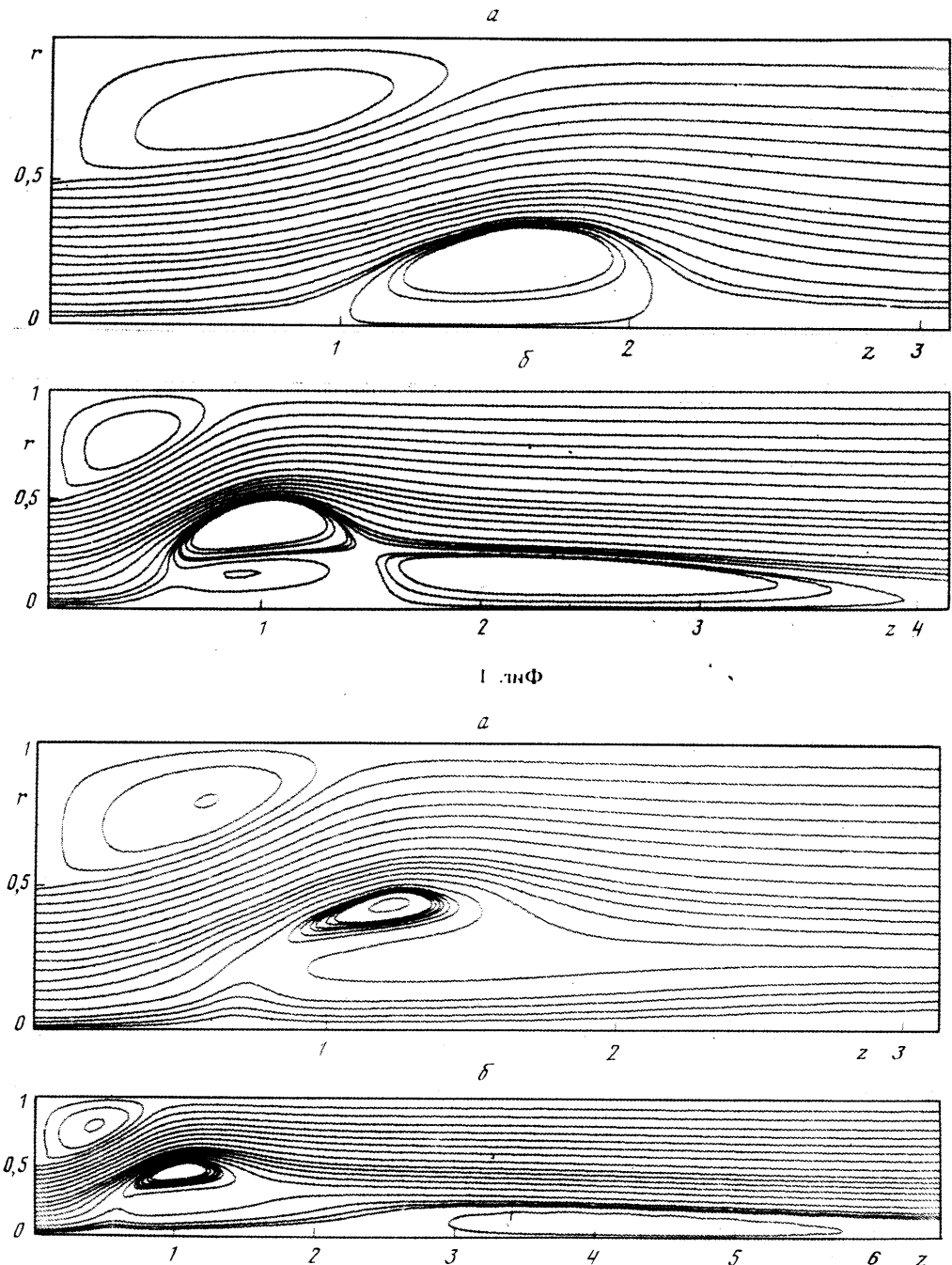
$$V_{z0}(r) = U_0 = 1, \quad V_{\varphi 0}(r) = 0, \quad 0 \leq r < r_0$$

$$V_{z0}(r) = U_1 = 2,25, \quad V_{\varphi 0}(r) = W_1 = 1, \quad r_0 \leq r < r_1 \quad (2.1)$$

в которых полагалось  $r_0 = 0,25$ ,  $r_1 = 0,5$  при  $R = 1$ .

Наиболее важные свойства течений, обнаруженные при исследовании, — возникновение приосевой зоны рециркуляции при достижении критической величины закрутки, образование вниз по потоку за этой зоной вторичной области рециркуляции, формирование кольцевой рециркуляционной зоны за счет разделения внутренним струйным потоком первой зоны. Проанализируем подробно указанные режимы течений. Для этого зафиксируем числа Рейнольдса  $Re = \text{const}$  и будем менять значения параметра закрутки  $G$ . Соответствующие картины линий тока  $\psi = \text{const}$  представлены на фиг. 1, 2.

При  $Re = 150$  и малой закрутке кольцевого потока  $G = 1$  картина течения качественно такая же, как для течения в осесимметричном канале с внезапным расширением с образованием рециркуляционной зоны за ступенькой. Данные о длине этой пристенной рециркуляционной зоны для всех исследованных случаев приведены в табл. 2. При увеличении закрутки  $G = 1,5$  (фиг. 1, а) формируется приосевая область возвратного течения с тороидальной структурой. Картины с наличием таких рециркуляционных зон наблюдались как экспериментально [3—4], так и получались в результате численных решений на основе полных уравнений Навье — Стокса [9] для одиночного закрученного потока в осесимметричном канале. При дальнейшем увеличении закрутки  $G = 2,25$  поведение этой зоны и характер течения вблизи нее такой же, как и для монозакрученного потока: передняя и задняя точки торможения на оси смещаются вверх по потоку, причем последняя несколько быстрее, вследствие чего задняя часть этой зоны приподнимается вверх, а поток за ней разворачивается



Фиг. 2

и образуется характерный петлеобразный изгиб линии тока. Можно сказать, что в этом случае внутренний осевой поток не оказывает значительного воздействия на структуру течения и оно в основном определяется наличием сильно закрученного внешнего потока.

Далее с увеличением закрутки  $G = 2,5$  картина качественно меняется: внутренний осевой поток начинает отжимать эту рециркуляционную область от оси течения и она начинает смещаться в радиальном направлении, сохраняя

Таблица 2

G	Re = 50	100	150	200	250	500
1	1,303	2,170	2,937	3,642	4,290	—
1,5	1,079	1,405	1,527	1,595	1,640	—
2	0,857	1,056	1,140	1,182	1,206	1,213
2,25	0,772	0,943	1,013	1,048	1,064	1,052
2,5	0,7	0,851	0,911	0,936	0,947	—
2,75	0,638	0,771	0,822	0,843	0,849	—

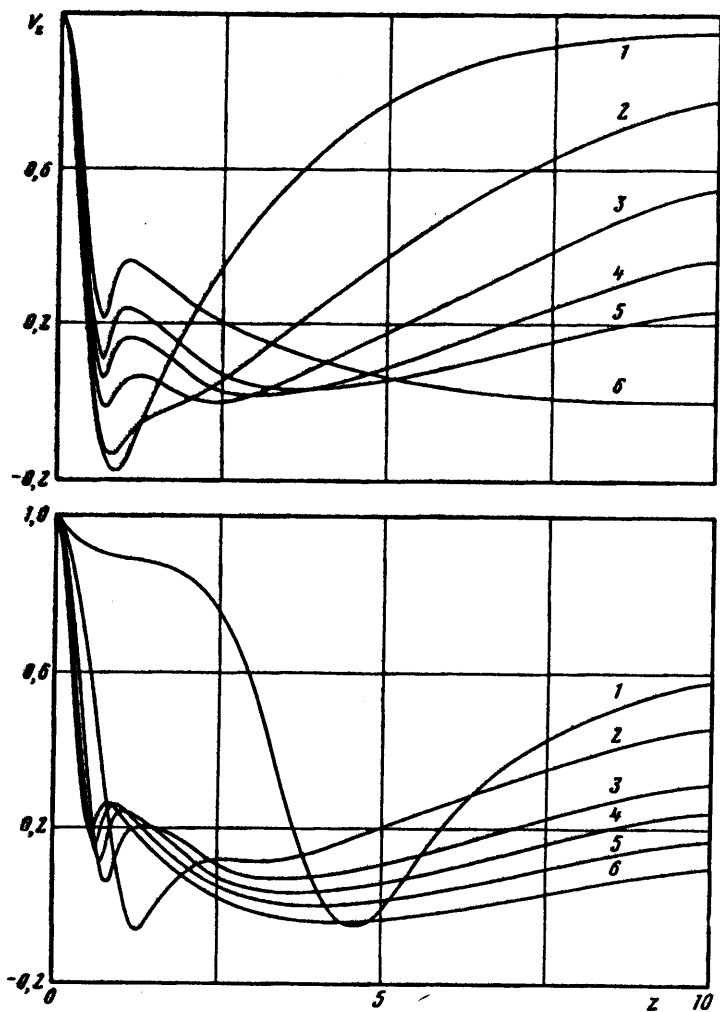
свою структуру. В то же время возникает вторая приосевая область возвратного течения с более медленной скоростью рециркуляции, размеры которой по сравнению с первой в осевом направлении больше, а в радиальном — меньше. Для одиночного закрученного потока режимы с образованием второй зоны отмечались в расчетах [10]. Дальнейшее увеличение закрутки кольцевого потока  $G = 2,75$  (фиг. 1, б) приводит к тому, что струйный осевой поток как бы разрезает по оси симметрии пузыревидную зону рециркуляции на две части, но наталкивается на вторую область возвратного течения и разворачивается. В результате образуется кольцевая рециркуляционная зона, а в приосевой части формируется вихрь с противоположной циркуляцией.

При более высоком числе Рейнольдса  $Re = 250$  с изменением  $G$  основные стадии формирования зон возвратного течения не претерпевают сильных изменений. При определенной закрутке кольцевого потока сначала образуется первая (пузыревидная) рециркуляционная область, затем при увеличении закрутки  $G = 2,25$  (фиг. 2, а) она, увеличиваясь в размерах, смещается вверх по потоку. Однако на следующей стадии  $G = 2,5$ , когда внутренний поток разделяет ее на две симметричные части и формируется кольцевая рециркуляционная зона, второй зоны не образуется и во всей приосевой части наблюдается прямое поступательное течение. Затем пузыревидный отрыв продолжает смещаться к периферийной части и, наконец, при  $G = 2,75$  (фиг. 2, б) возникает вторая приосевая область. Здесь она длиннее и значительно удалена от первой, поэтому внутренний струйный поток беспрепятственно огибает ее.

При  $Re = 500$  с изменением  $G$  качественно картины течений не меняются. Для получения второй приосевой возвратной зоны в этом случае требуется достаточно длинная расчетная область, поэтому соответствующие режимы здесь не рассчитывались.

Все происходящие изменения в структуре течения хорошо иллюстрируются графиками распределения осевой скорости на оси потока  $r = 0$ . На фиг. 3, а представлены такие зависимости 1—б для  $G = 2,25$  и  $Re = 50, 100, 150, 200, 250, 500$  соответственно. При малых числах Рейнольдса  $Re = 50, 100$  графики имеют один локальный минимум при  $z \approx 1$ , который соответствует приосевой пузыревидной рециркуляционной зоне. Такой вид распределения характерен для течений в камерах сгорания, исследованных в [11]. С увеличением числа Рейнольдса  $Re \geq 150$  этот локальный минимум поднимается, скорость  $V_z$  на оси становится положительной, что соответствует разделению пузыревидной рециркуляционной зоны приосевым струйным потоком. При этом возникает второй локальный минимум в распределении  $V_z$ , соответствующий зарождающейся второй зоне возвратного течения.

На фиг. 3, б изображены зависимости 1—б для  $V_z|_{r=0}(z)$  при фиксированном  $Re = 250$  и значениях закрутки кольцевого потока  $G = 1,0; 1,5; 2,0; 2,25; 2,5; 2,75$ . Первоначально первая зона рециркуляции образуется на значительном удалении от входного сечения  $z = 0$ , а с увеличением закрутки быстро перемещается вверх по потоку. Примечательно, что при достаточно сильной



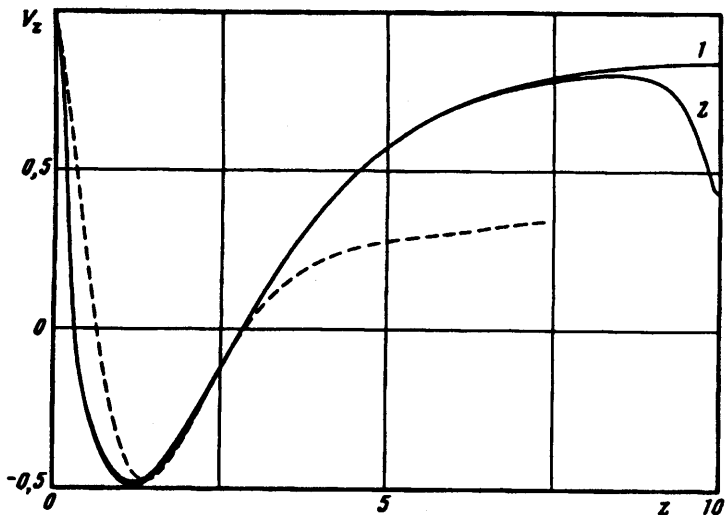
Фиг. 3

закрутке  $G \geq 1,5$  характер кривых качественно не меняется и они становятся подобными друг другу.

Интенсивное взаимодействие и выравнивание эпюр скоростей наиболее сильно происходит на начальном участке течения  $0 \leq z \leq 1,5$  и в особенности до формирования пузырьвидного отрыва. Далее вниз по потоку этот процесс идет более медленно. Осевая скорость в приосевой части течения на протяжении всей длины расчетной области остается значительно меньше скорости потока, обтекающего рециркуляционную зону со стороны стенки канала. Воздействие закрутки кольцевого потока прежде всего передается пристенной части течения, а уже затем способствует вращению жидкости в приосевой области.

Рассмотрим вопрос о сравнении турбулентных течений с ламинарными на основе понятия об эффективных параметрах. В [11] представлены данные экспериментальных исследований по взаимодействию турбулентных осевого и кольцевого закрученного потоков и результаты расчетов с использованием двухпараметрической  $k - \varepsilon$ -модели турбулентности. Сравним их с решениями, полученными в настоящей работе.

Введем для этого в соответствии с гипотезой Прандтля величину длины пути



Фиг. 4

смешения  $l_i$ , которая для закрученных течений связана с турбулентной вязкостью  $\nu_n$  следующим образом:

$$l_i^2 = \nu_n \left\{ \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 + \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\varphi}{r} \right) \right]^2 \right\}^{-1/2} \quad (2.2)$$

где индекс  $i$  принимает значения  $z$  для осевого направления и  $\varphi$  для азимутального. В [2] приведены данные экспериментов по определению величины  $l_i$  для течений типа газовых завес, в которых рассматривается внешний закрученный и внутренний незакрученный потоки в осесимметричном канале радиусом  $R$ . Получены следующие значения:  $l_z/R \approx 0,068$ ,  $l_\varphi/R \approx 0,034$  (для течений без закрутки величина  $l$  равна  $l/R \approx 0,11$ ). Это свидетельствует о сильной анизотропии турбулентной вязкости в потоке, и с учетом (2.2) имеем  $\nu_{tz}/\nu_{\varphi\varphi} \approx 4$ . Используя эти данные, определим эффективное число Рейнольдса как  $Re_* = U_0 R / \nu_{tz}$ , которое для течений с параметрами из [11] составляет  $Re_* \approx 50$ . Принимая во внимание, что параметр закрутки  $G$  может быть определен как отношение  $Re_\varphi/Re_z$  при условии, что  $Re_\varphi$  построен по величине  $W_1$ , введем эффективную величину закрутки

$$G_* = \frac{Re_{*\varphi}}{Re_{*z}} = G \frac{\nu_{tz}}{\nu_{\varphi\varphi}}$$

С учетом начальных данных [11], где  $U_0 = 0,8$  м/с,  $W_1 = 1$  м/с, получаем  $G_* \approx 5$ . Для величины  $U_1$  из (2.1), исходя из значения среднерасходной скорости  $U = 0,34$  м/с, получим  $U_1 = 1,94$ .

Результаты расчетов с этими эффективными параметрами  $Re_* = 50$  и  $G_* = 5$  приведены сплошными линиями на фиг. 4, где показано распределение скорости на оси потока. Штриховой линией изображена зависимость, взятая из [11]. Сравнение этих данных показывает, что на основном участке, где формируется зона возвратного течения, имеется полное соответствие в характере распределения, в значениях минимальной скорости и длины рециркуляционной

зоны. Далее вниз по потоку скорость на оси для турбулентного течения стремится к среднерасходному безразмерному значению  $U = 0,425$ , а в случае ламинарного течения — к значению  $W_{\max} = 2U$  в соответствии с формирующимся на выходе профилем Пуазейля (кривая 1). Если же в выходном сечении задать жесткие граничные условия  $V_x = U$ ,  $V_r = 0$ ,  $V_\varphi = 0$ , то это никак не повлияет на общий характер течения, за исключением небольшой области у правой границы  $z = z_k$  (кривая 2). Это свидетельствует о том, что процесс формирования зоны и структура течения практически не зависят от граничных условий вниз по потоку.

В целом за счет выбора соответствующих эффективных параметров удастся правильно описать крупномасштабные вихревые структуры (такие, как рециркуляционные зоны) в рамках уравнений Навье — Стокса и в этом смысле результаты расчетов ламинарных закрученных течений могут быть использованы для моделирования этих структур в турбулентных потоках.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01637).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 588 с.
2. Кутателадзе С. С., Волчков Э. П., Терехов В. И. Аэродинамика и теплообмен в ограниченных вихревых потоках. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1987. 282 с.
3. Escudier M. Vortex breakdown: observations and explanations//Progr. Aerosp. Sci. 1988. V. 25. № 2. P. 189—229.
4. Sarpkaya T. Computational methods with vortices — the 1988 Freeman scholar lecture//Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1989. V. 111. № 1. P. 5—52.
5. Ахметов В. К., Шкадов В. Я. Развитие и устойчивость закрученных течений//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 3—11.
6. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. 728 с.
7. Chen Y. S. A numerical methods for three-dimensional incompressible flow using nonorthogonal body-fitted coordinate systems//AIAA Pap. 1986. № 86—1654. 9 p.
8. Armaly B. F., Durst F., Pereira J. C. F., Schonung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow//J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 473—496.
9. Spall R. E., Gatski T. B., Ash R. L. The structure and dynamics of bubble-type vortex breakdown//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1990. V. 429. № 1877. P. 613—637.
10. Grabowski W. J., Berger S. A. Solutions of the Navier-Stokes equations for vortex breakdown//J. Fluid Mech. 1976. V. 75. № 3. P. 525—544.
11. Brondum D. C., Bennett J. C., Weinberg B. C., McDonald H. Numerical and experimental investigation of nonswirling and swirling confined jets//AIAA Pap. 1986. № 86—0040. 14 p.

Москва

Поступила в редакцию  
18.I.1994