

УДК 533.72

© 1995 г. М. Н. ГАЙДУКОВ, А. Г. ЛУКАНКИН

О ВЛИЯНИИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕПЛОВОЙ И ВЯЗКОСТНОЙ ФУНКЦИЙ ЧЕПМЕНА НА ВЕЛИЧИНУ ГАЗОКИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В статье исследована зависимость газокинетических коэффициентов от точности вычисления тепловой и вязкостной функций Чепмена для случая простого газа у плоской твердой поверхности. Выражения для газокинетических коэффициентов получены путем решения уравнения Больцмана при помощи процедуры Лоялки. Для нахождения скачка температуры использованы граничные условия, учитывающие аккомодацию как по энергии, так и по импульсу. Влияние точности решения интегральных уравнений для тепловой и вязкостной функций на величину скачка температуры и коэффициентов теплового и изотермического скольжения было исследовано путем учета в разложениях этих функций по полиномам Сонина одного, двух или трех членов. Проанализирована зависимость результатов от выбора модели потенциала взаимодействия молекул.

При рассмотрении движения аэрозольной частицы в неоднородном газе при малых, но конечных числах Кнудсена используются граничные условия, содержащие газокинетические коэффициенты. Задачу о нахождении этих коэффициентов можно решить в рамках кинетической теории.

Работы, посвященные этой теме, можно разделить на три основные группы. К первой принадлежат работы, в которых данная задача сводится к решению модельного уравнения приближенными методами. Ко второй группе относятся работы, в которых модельное уравнение решено точными методами.

Настоящая работа относится к третьей группе: линеаризованное уравнение Больцмана решается методом Лоялки. В результате для газокинетических коэффициентов получены выражения, которые сведены к интегральным скобкам от тепловой и вязкостной функций Чепмена. Точность вычисления этих скобок зависит от числа членов в разложении чепменовских функций по полиномам Сонина. Ранее при определении газокинетических коэффициентов ограничивались первыми ненулевыми членами, дающими основной вклад. Поэтому представляет интерес исследовать влияние точности вычисления интегральных скобок на величину коэффициентов скольжения и скачка температуры.

Рассмотрим простой газ, находящийся над плоской стенкой. Вдали от стенки градиенты среднемассовой скорости, температуры и плотности можно считать постоянными. Отклонение от линейного профиля скорости и температуры, как известно, происходит в слое Кнудсена. Одной из задач газокинетической теории является установление таких фиктивных граничных условий на стенке, при которых решение уравнений Навье — Стокса с данными граничными условиями будет совпадать вне слоя Кнудсена с решением уравнения Больцмана с микроскопическими граничными условиями на поверхности стенки. Вне слоя Кнудсена решение уравнения Больцмана достаточно близко совпадает с решением уравнения Навье — Стокса [1]. Поэтому получить искомые граничные условия для скорости и температуры можно, экстраполируя объемное решение уравнения Больцмана через слой Кнудсена до стенки.

1. Изотермическое и тепловое скольжение. Рассмотрим газ, находящийся

над плоскостью $x = 0$. Будем считать, что на больших расстояниях от плоскости газ движется со среднемассовой скоростью

$$U_\infty = U_0 + \left(\frac{dU}{dx} \right)_\infty x, \quad U_0 = C_m \left(\frac{dU}{dx} \right)_\infty + K_{TS} \frac{d \ln T}{dy} \quad (1.1)$$

Здесь градиент среднемассовой скорости на бесконечности предполагается заданным. Скорость скольжения U_0 представлена согласно [1], C_m и K_{TS} — газокINETические коэффициенты изотермического и теплового скольжения газа.

Будем считать газ в направлении z однородным. В дальнейшем предполагается также, что среднемассовая скорость U_∞ много меньше средней тепловой скорости молекул V , что позволяет функцию f , описывающую состояние газа, искать в виде

$$f = f^{(0)} [1 + \Psi(x, V_x, V_y, V_z)], \quad f^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{mV^2}{2kT} \right\}$$

где n — концентрация молекул, m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, а функция $\Psi(x, V_x, V_y, V_z)$ является решением линеаризованного уравнения Больцмана

$$V_x f^{(0)} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + V_y f^{(0)} \left((C^2 - 5/2) \frac{d \ln T}{dy} \right) \doteq -n^2 I(\Psi), \quad C = \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} V \quad (1.2)$$

Здесь $I(\Psi)$ — линеаризованный оператор столкновений.

В качестве кинетического граничного условия на стенке примем, что α_i — часть молекул, отражающаяся от стенки диффузорно, т. е. молекул, адсорбирующихся на стенке, а затем вылетающих с изотропным распределением Максвелла; $(1 - \alpha_i)$ — часть, отражающаяся зеркально

$$\Psi^+(x=0, V_x, V_y, V_z) = (1 - \alpha_i) \Psi^-(x=0, -V_x, V_y, V_z) \quad (1.3)$$

Здесь плюсом и минусом отмечены величины, характеризующие молекулы с $V_x > 0$ и с $V_x < 0$.

На больших расстояниях от поверхности функция распределения должна точно переходить в распределение Чепмена — Энскога для разреженных газов [2]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x, V_x, V_y, V_z) = \frac{m}{kT} V_y U_0 + \frac{m}{kT} V_y x \left(\frac{dU}{dx} \right)_\infty - B(V) C_x C_y \left(\frac{dU}{dx} \right)_\infty - A(V) V_y \frac{d \ln T}{dy} \quad (1.4)$$

В (1.4) функции $A(V)$ и $B(V)$ являются решениями соответствующих интегральных уравнений [2]

$$f^{(0)} \left(\frac{m}{2kT} V^2 - 5/2 \right) V_y = n^2 I(A V_y) \quad (1.5)$$

$$2f^{(0)} C_x C_y = n^2 I(B C_x C_y)$$

Функция $A(V)$ должна удовлетворять дополнительному условию

$$(V_x^2, A(V)) = 0, \quad (\varphi, F) = \int \varphi f^{(0)} F dV_x dV_y dV_z \quad (1.6)$$

Умножим (1.2) последовательно на $mV_y dV_x dV_y dV_z$ и $BC_x C_y dV_x dV_y dV_z$. Затем проинтегрируем каждое новое уравнение по всему пространству скоростей. С учетом закона сохранения импульса при столкновении молекул газа, а также свойств симметрии скалярного произведения с интегралом столкновения имеем

$$(mV_y V_x, \Psi) = A_1 \quad (1.7)$$

$$(BC_x C_y, V_x \Psi) = -(kT)^{-1} A_1 x + A_2 \quad (1.8)$$

Здесь A_1 и A_2 — постоянные величины.

Соотношения (1.7) и (1.8) справедливы для всего полупространства $x \geq 0$. Подставляя (1.4) в (1.7) и (1.8), найдем

$$A_1 = -\frac{1}{2kT} m^2 (V_x^2 V_y^2, B) \left(\frac{dU}{dx} \right)_\infty \quad (1.9)$$

$$A_2 = \frac{m^2}{2(kT)^2} (V_x^2 V_y^2, B) U_0 - \frac{m}{2kT} (V_x^2 V_y^2, BA) \frac{d \ln T}{dy} \quad (1.10)$$

Из соотношений (1.8) и (1.10) видно, что U_0 можно найти, если вычислить соотношение (1.8) на поверхности. Но для этого необходимо знать функцию распределения для падающих молекул. Строгий вид этой функции можно найти, решив уравнение Больцмана в слое Кнудсена. В рамках используемого метода Лоялки [3] функцию распределения по скоростям падающих молекул у поверхности, т. е. функцию $\Psi^-(x=0, V_x, V_y, V_z)$, предлагается искать в следующем виде

$$\Psi^-(0, V_x, V_y, V_z) = \frac{m}{kT} V_z \alpha - A(V) V_y \frac{d \ln T}{dy} - B(V) C_x C_y \left(\frac{dU}{dx} \right)_\infty \quad (1.11)$$

здесь α — неизвестная постоянная, которую можно определить, подставив выражения (1.3), (1.9) и (1.11) в (1.7)

$$\alpha = \frac{(2 - \alpha_j)(V_x^2 V_y^2, B)}{4\alpha_i (V_x V_y, V_y)^+} \left(\frac{dU}{dx} \right)_\infty + \frac{kT (V_x V_y^2, A)^+}{m (V_x V_y, V_y)^+} \frac{d \ln T}{dy} \quad (1.12)$$

Выражения (1.3), (1.11) и (1.12) полностью определяют функцию распределения $\Psi(x=0, V_x, V_y, V_z)$. Зная эту функцию, из (1.8) и (1.10) при $x=0$ можно найти U_0 , а затем из (1.1) — газокINETические коэффициенты C_m и K_{TS} .

Формула (1.12) фактически определяет скорость скольжения газа вдоль плоской твердой поверхности в приближении Максвелла, когда предполагается, что у поверхности функция распределения по скоростям падающих молекул совпадает с распределением Чепмена — Энскога. Определение U_0 из (1.8) и (1.10) при $x=0$ позволяет улучшить результат Максвелла за счет учета влияния слоя Кнудсена на функцию распределения падающих молекул.

Из (1.8) при $x=0$ $A_2 = (BC_x C_y, V_x \Psi(0))$. Но, согласно (1.10)

$$A_2 = \frac{m^2}{2(kT)^2} (V_x^2 V_y^2, B) U_0 - \frac{m}{2kT} (V_x^2 V_y^2, BA) \frac{d \ln T}{dy}$$

Далее, с учетом (1.12) имеем

$$U_0 = \left\{ \frac{(2 - \alpha_j)^2 (V_x^2 V_y^2, B)}{8\alpha_i (V_x V_y, V_y)^+} + \frac{(2 - \alpha_j)(BV_x^2 V_y^2, B)^+}{2 (V_x^2 V_y^2, B)^+} \right\} \left(\frac{dU}{dx} \right)_\infty + \left\{ \frac{1}{2} \frac{kT \alpha_i (V_x^2 V_y^2, BA)}{m (V_x^2 V_y^2, B)^+} + \frac{1}{2} \frac{kT (2 - \alpha_j)(V_x V_y^2, A)^+}{m (V_x, V_y, V_y)^+} \right\} \frac{d \ln T}{dy} \quad (1.13)$$

В результирующей формуле (1.13) множители при градиентах есть не что иное, как коэффициенты изотермического и теплового скольжения, которые необходимо найти. Получение конкретного вида этих коэффициентов сводится к вычислению интегральных скобок от вязкостной и тепловой функций. Последние являются решениями уравнений (1.5). Решения этих уравнений ищем в виде разложения по полиномам Сонина. Учитывая три первых члена, эти разложения можно записать в виде

$$A = -\frac{m}{2kT} \sum_{p=1}^3 a_p S_{\rho_2}^{(p)}(C^2), \quad B = \frac{2kT}{m} \sum_{p=0}^2 b_p S_{\rho_2}^{(p)}(C^2) \quad (1.14)$$

Коэффициенты a_p и b_p находятся из следующих систем уравнений [2]:

$$\sum_{q=1}^n \Lambda^{pq} a_q^{(n)} = \frac{4}{5k} \delta_{p1}, \quad p = 1, \dots, n; \quad \sum_{q=0}^{n-1} H^{pq} b_q^{(n)} = \frac{2}{kT} \delta_{p0}, \quad p = 0, \dots, n-1$$

где в постоянных Λ^{pq} и H^{pq} , пропорциональных интегральным скобкам от полиномов Сонина, заложена информация о взаимодействии молекул.

С учетом (1.14) имеем

$$\begin{aligned} (V_x^2 V_y^2, B) &= \frac{1}{4} n \left(\frac{2kT}{m} \right)^3 b_0 \\ (V_x V_y^2, A)^+ &= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \left\{ \frac{1}{8} a_1 + \frac{1}{32} a_2 + \frac{1}{16} a_3 \right\} \\ (B V_x^2 V_y^2, B)^+ &= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \left\{ \frac{1}{4} b_0^2 + \frac{97}{16} b_1^2 + \frac{705}{256} b_2^2 \right\} \\ (B V_x^2 V_y^2, A) &= n \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \left\{ \frac{1}{4} b_0 a_1 - \frac{7}{8} b_1 a_1 + \frac{7}{8} b_1 a_2 - \frac{231}{160} b_2 a_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{63}{32} b_2 a_2 + \frac{63}{32} b_2 a_3 \right\} \end{aligned} \quad (1.15)$$

В случае твердых сфер имеем

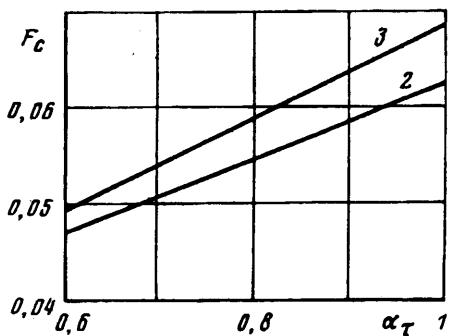
$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= 0,1 \text{ 1/kM}, \quad a_1^{(2)} = 0,1022 \text{ 1/kM}, \quad a_2^{(2)} = 0,0091 \text{ 1/kM} \\ a_1^{(3)} &= 0,1024 \text{ 1/kM}, \quad a_2^{(2)} = 0,0096 \text{ 1/kM}, \quad a_3^{(3)} = 0,0018 \text{ 1/kM} \\ b_0^{(1)} &= 0,25 \text{ 1/kTF}, \quad b_0^{(2)} = 0,2537 \text{ 1/kTF}, \quad b_1^{(2)} = 0,0148 \text{ 1/kTF} \\ b_0^{(3)} &= 0,2539 \text{ 1/kTF}, \quad b_1^{(3)} = 0,0155 \text{ 1/kTF}, \quad b_2^{(3)} = 0,0023 \text{ 1/kTF} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$F \equiv \frac{2}{5kT} \sigma^2 \left(\frac{\pi kT}{m} \right)^{1/2}, \quad M \equiv \frac{8m}{75k^2 T} \sigma^2 \left(\frac{\pi kT}{m} \right)^{1/2}$$

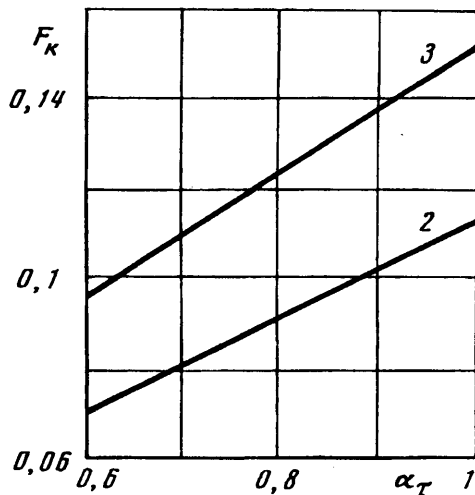
Здесь верхний правый индекс в круглых скобках обозначает число членов в разложении по полиномам Сонина.

С учетом (1.1), (1.13), (1.15), (1.16) окончательно получим

$$\begin{aligned} C_m^{(1)} &= \frac{2 - \alpha_i}{\alpha_i} \left(\frac{\pi m}{2kT} \right)^{1/2} v^{(1)} \left\{ \frac{2 - \alpha_i}{2} + \alpha_i \frac{2}{\pi} \right\} \\ C_m^{(2)} &= \frac{2 - \alpha_i}{\alpha_i} \left(\frac{\pi m}{2kT} \right)^{1/2} 1,0148 v^{(1)} \left\{ \frac{2 - \alpha_i}{2} + \alpha_i \frac{2}{\pi} (1 + 0,0831) \right\} \\ C_m^{(3)} &= \frac{2 - \alpha_i}{\alpha_i} \left(\frac{\pi m}{2kT} \right)^{1/2} 1,0156 v^{(1)} \left\{ \frac{2 - \alpha_i}{2} + \alpha_i \frac{2}{\pi} (1 + 0,0922) \right\} \\ K_{TS}^{(1)} &= 3/4 v^{(1)} \{ 1/2(2 - \alpha_i) + \alpha_i \}, \quad K_{TS}^{(2)} = 3/4 1,0223 v^{(1)} \{ 1/2(2 - \alpha_i) + \alpha_i(1 - 0,1992) \} \\ K_{TS}^{(3)} &= 3/4 1,0322 v^{(1)} \{ 1/2(2 - \alpha_i) + \alpha_i(1 - 0,2693) \} \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\nu = \frac{1}{4} \left(\frac{2kT}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{(V_x^2 V_y^2, B)}{(V_x V_y, V_y)^+}$$

где ν — коэффициент вязкости.

Рассмотрим влияние точности вычисления тепловой и вязкостной функций Чепмена на величину газокинетических коэффициентов. На фиг. 1, 2 представлены данные зависимости для коэффициента аккомодации по импульсу, где

$$F_{c2} = \frac{C_m^{(2)} - C_m^{(1)}}{C_m^{(1)}}, \quad F_{c3} = \frac{C_m^{(3)} - C_m^{(1)}}{C_m^{(1)}}, \quad F_{k2} = \frac{K_{T\dot{s}}^{(1)} - K_{T\dot{s}}^{(2)}}{K_{T\dot{s}}^{(1)}}, \quad F_{k3} = \frac{K_{T\dot{s}}^{(1)} - K_{T\dot{s}}^{(3)}}{K_{T\dot{s}}^{(1)}}$$

Для модели твердых сфер при $\alpha_T = 1$ первое приближение отличается от третьего на 15 и 6,8% соответственно. Для других потенциалов сходимость несколько лучше. Для потенциала Ленард — Джонса отличие первого приближения коэффициента теплового скольжения от третьего составляет 10%.

2. Скачок температуры. Рассмотрим газ, находящийся над плоскостью $x = 0$. Будем считать, что на больших расстояниях от плоскости температура равна

$$T_\infty = \delta T + \left(\frac{dT}{dx} \right)_\infty x, \quad \delta T = C_t \frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dx} \right)_\infty \quad (2.1)$$

Здесь δT — скачок температуры, C_t — коэффициент скачка температуры. Градиент температуры на бесконечности предполагается заданным.

Состояние газа полностью описывается функцией f , которую будем искать в виде

$$f = f^0 [1 + \Psi(x, V_x, V_y, V_z)], \quad f^0 = n \left(\frac{m}{2\pi k T_w} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{mV^2}{2kT_w} \right\}$$

где T_w — температура стенки, а функция $\Psi(x, V_x, V_y, V_z)$ является решением линеаризованного уравнения Больцмана

$$V_x f^{(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = n^2 I(\Psi) \quad (2.2)$$

В качестве кинетического граничного условия на стенке примем диффузно-зеркальную модель отражения

$$f^+(C_x, C_y, C_z, 0) = \alpha_\tau f_r + (1 - \alpha_\tau) f^-(C_x, C_y, C_z, 0), \quad (2.3)$$

$$f_r = f^{(0)} (1 + \nu_r + (C^2 - 3/2) \tau_r)$$

$$\alpha_e = \frac{E_n^- + E_n^+}{E_n^- + E_{wn}} \quad (2.4)$$

$$E_{wn} = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 V_x f_w dV_x dV_y dV_z,$$

$$f_w = f^{(0)} [1 + \alpha_\tau \nu_w + (1 - \alpha_\tau) \Psi^-(0, -V_x, V_y, V_z)]$$

$$E_n^- = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 V_x f^- dV_x dV_y dV_z,$$

$$E_n^+ = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 V_x f^+ dV_x dV_y dV_z$$

Здесь α_τ и α_e — коэффициенты аккомодации по тангенциальной составляющей импульса и энергии соответственно; ν_r и τ_r — постоянные, которые будут вычислены позднее; E_{wn} — энергия, которую уносили бы отраженные молекулы, если бы газ находился в равновесии со стенкой; E_n^- — энергия, приносимая падающими молекулами; E_n^+ — энергия, уносимая отраженными молекулами.

Будем считать, что на больших расстояниях от поверхности функция распределения принимает вид [2]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x, V_x, V_y, V_z) = \left(\frac{m}{2kT_w} V^2 - \frac{5}{2} \right) \delta T + \left[\left(\frac{m}{2kT_w} V^2 - \frac{5}{2} \right) x + A(V) V_x \right] T_w^{-1} \left(\frac{dT}{dx} \right)_\infty \quad (2.5)$$

В (2.5) функция $A(V)$ является решением уравнения (1.5) и удовлетворяет условию (1.6).

Умножим (2.2) последовательно на $1/2 m V^2 dV_x dV_y dV_z$ и $A V_x dV_x dV_y dV_z$ и проинтегрируем по всему пространству скоростей. С учетом закона сохранения энергии имеем

$$\left(\left(\frac{m}{2kT_w} V^2 - \frac{5}{2} \right) V_x, \Psi \right) = B_1 \quad (2.6)$$

С учетом (1.5) и (2.6) далее имеем

$$(V_x^2 A, \Psi) = B_1 x + B_2 \quad (2.7)$$

Здесь B_1 и B_2 — постоянные величины. Соотношения (2.6) и (2.7) справедливы для всего полупространства $x \geq 0$. Подставляя (2.5) в (2.6) и (2.7), найдем величины B_1 и B_2

$$B_1 = \left(\left(\frac{m}{2kT_w} V^2 - \frac{5}{2} \right) V_x^2, A \right) \frac{1}{T_w} \left(\frac{dT}{dx} \right)_\infty \quad (2.8)$$

$$B_2 = \left(\left(\frac{m}{2kT_w} V^2 - \frac{5}{2} \right) V_x^2, A \right) \delta T \quad (2.9)$$

Функцию распределения по скоростям падающих молекул у поверхности будем искать в виде

$$\Psi^-(0, V_x, V_y, V_z) = (C^2 - 5/2) \beta + V_x A K_w \quad (2.10)$$

$$K_w \equiv \frac{1}{T_w} \left(\frac{dT}{dx} \right)_w, \quad C \equiv \left(\frac{m}{2kT_w} \right)^{1/2} V, \quad \gamma_w \equiv \frac{2kT_w}{m}$$

Здесь β — неизвестная постоянная, которая имеет смысл скачка температуры в приближении Максвелла. Из (2.3) с учетом вида функции f имеем

$$\Psi^+(0, V_x, V_y, V_z) = \alpha_i (v_r + (C^2 - 3/2) \tau_r) + (1 - \alpha_i) \Psi^-(0, -V_x, V_y, V_z) \quad (2.11)$$

Здесь v_r и τ_r — постоянные, которые находятся из условия непротекания и граничного условия (2.4).

Подставляя в приведенные выше выражения для потоков энергии функции распределения (2.2) и (2.10), в результате имеем

$$E_{wm} = n \left(1 + \alpha_i v_w \right) \gamma_w^{3/2} \pi^{-1/2} + (1 - \alpha_i) \left\{ \frac{1}{2} n \gamma_w^{3/2} \pi^{-1/2} - (V^2 V_x^2, A)^+ K_w \right\} \quad (2.12)$$

$$E_n^- = -n \gamma_w^{3/2} \pi^{-1/2} - \frac{1}{2} n \gamma_w^{3/2} \pi^{-1/2} \beta + (V^2 V_x^2, A)^+ K_w \quad (2.13)$$

$$E_n^+ = n \gamma_w^{3/2} \pi^{-1/2} \left(1 + \alpha_i \left(v_r + \frac{3}{2} \tau_r \right) \right) + (1 - \alpha_i) \left\{ \frac{1}{2} n \gamma_w^{3/2} \pi^{-1/2} - (V^2 V_x^2, A)^+ K_w \right\} \quad (2.14)$$

Из условия непротекания для $\Phi^+(0, V_x, V_y, V_z)$ найдем v_r ,

$$(V_x, \Psi^+(0, V_x, V_y, V_z))^+ + (V_x, \Psi^-(0, V_x, V_y, V_z))^- = 0 \quad (2.15)$$

Подставив в (2.15) выражения (2.11) и (2.10), получим

$$v_r = -1/2 (\beta + \tau_r) \quad (2.16)$$

Аналогичным образом найдем v_w для равновесных молекул

$$(V_x, \Psi_w(0, V_x, V_y, V_z))^+ + (V_x, \Psi^-(0, V_x, V_y, V_z))^- = 0 \quad (2.17)$$

$$v_w = -1/2 \beta \quad (2.18)$$

Подставив в (2.4) выражения (2.12), (2.13), (2.14), (2.16) и (2.18), найдем τ_r ,

$$\tau_r = \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \left\{ (1 + \alpha_i) \frac{1}{2} \beta - \alpha_i \frac{1}{n} \pi^{1/2} \gamma_w^{3/2} (V^2 V_x^2, A)^+ K_w \right\} \quad (2.19)$$

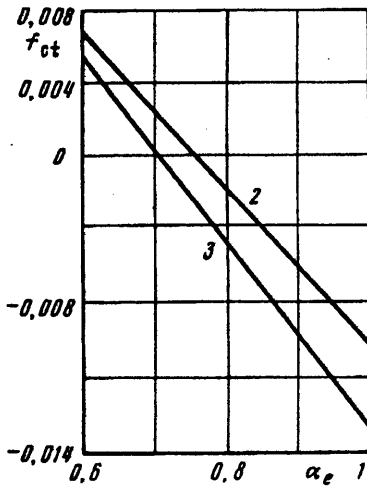
Постоянную β можно определить из выражений (2.6) и (2.8) при $x = 0$

$$\beta = \frac{2 - \alpha_i \alpha_i}{1 - \alpha_i - \alpha_i - \alpha_i \alpha_i} \frac{2}{n} \left(\frac{\gamma_w}{\pi} \right)^{1/2} (C^2 V_x^2, A)^+ K_w \quad (2.20)$$

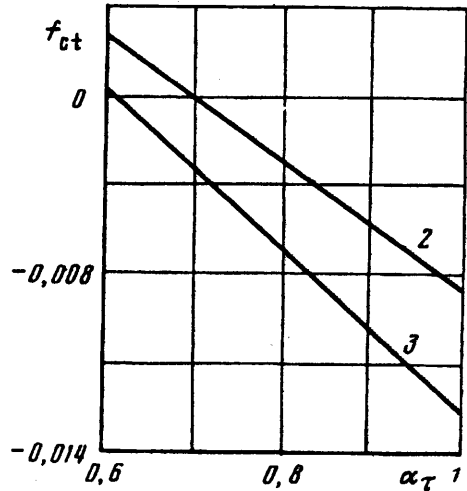
Формула (2.20) определяет скачок температуры в приближении Максвелла, когда предполагается, что у поверхности функция распределения по скоростям падающих молекул совпадает с распределением Чепмена — Энскога. Теперь функция распределения $\Psi(0, V_x, V_y, V_z)$ полностью определена. Знание этой функции позволяет из (2.7) и (2.9) при $x = 0$ получить результат, улучшенный по сравнению с результатом Максвелла за счет учета влияния стенки на функцию распределения падающих молекул.

Из (2.7) при $x = 0$

$$B_z = (V_x^2 A, \Psi(0, V_x, V_y, V_z)) = (V_x^2 A, \Psi^+(0, V_x, V_y, V_z))^+ + (V_x^2 A, \Psi^-(0, -V_x, V_y, V_z))^- \quad (2.21)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Приравняв (2.21) и (2.9) с учетом выражений для $\Psi^+(0, V_x, V_y, V_z)$ и $\Psi^-(0, -V_x, V_y, V_z)$ имеем

$$(V_x^2 C^2, A)^+ \beta - (V_x^2, A^2)^+ K_w + \alpha_\tau (V_x^2 C^2, A)^+ \tau, + \\ + (1 - \alpha_\tau) \{ (V_x^2 C^2, A)^+ \beta - (V_x^2, A^2)^+ K_w \} = (V_x^2 C^2, A) \delta T$$

Используя выражение для β (2.20), получим

$$\delta T = \beta \left\{ 1 + \left(\frac{n}{2} \left(\frac{\pi}{\gamma_w} \right)^{1/2} \frac{(V_x^2, A^2)^+}{[(V_x^2 C^2, A)^+]^2} - \frac{1}{2} \right) (\alpha_\tau - 2) \frac{1 - \alpha_\tau - \alpha_\tau - \alpha_\tau \alpha_\tau}{2(2 - \alpha_\tau \alpha_\tau)} \right\} \quad (2.22)$$

Как видно из (2.22), получение конкретного вида коэффициента C , сводится к вычислению интегральных скобок от тепловой функции. Последняя является решением уравнения (1.5). Решение этого уравнения ищем в виде разложения по полиномам Сонина

$$A = - \frac{m}{2kT_w} \sum_{p=1}^3 a_p s_{3/2}^{(p)}(C^2)$$

Тогда

$$(V_x^2, A^2)^+ = \frac{n}{(\pi \gamma_w)^{1/2}} \left\{ \frac{13}{8} a_1^2 + \frac{433}{128} a_2^2 + \frac{2957}{512} a_3^2 - \frac{23}{16} a_1 a_2 - \frac{11}{32} a_1 a_3 - \frac{359}{128} a_2 a_3 \right\} \quad (2.23)$$

$$(V_x^2 C^2, A)^+ = \frac{5}{8} a_1$$

Из (2.22) и (2.1) с учетом (2.23) и (1.6) для модели твердых сфер окончательно имеем

$$C_i^{(1)} = \frac{\alpha_\tau \alpha_\tau - 2}{1 - \alpha_\tau - \alpha_\tau - \alpha_\tau \alpha_\tau} \frac{1}{nk} \left(\frac{\pi}{\gamma_w} \right)^{1/2} \lambda^{(1)} \times \\ \times \left\{ 1 + 0,1621 (\alpha_\tau - 2) \frac{1 - \alpha_\tau - \alpha_\tau - \alpha_\tau \alpha_\tau}{2(2 - \alpha_\tau \alpha_\tau)} \right\}$$

$$C_i^{(2)} = \frac{\alpha_e \alpha_i - 2}{1 - \alpha_e - \alpha_i - \alpha_e \alpha_i} \frac{1}{nk} \left(\frac{\pi}{\gamma_w} \right)^{1/2} 1,022 \lambda^{(1)} \times$$

$$\times \left\{ 1 + 0,1211 (\alpha_i - 2) \frac{1 - \alpha_e - \alpha_i - \alpha_e \alpha_i}{2 (2 - \alpha_e \alpha_i)} \right\} \quad (2.24)$$

$$C_i^{(3)} = \frac{\alpha_e \alpha_i - 2}{1 - \alpha_e - \alpha_i - \alpha_e \alpha_i} \frac{1}{nk} \left(\frac{\pi}{\gamma_w} \right)^{1/2} 1,024 \lambda^{(1)} \times$$

$$\times \left\{ 1 + 0,1119 (\alpha_i - 2) \frac{1 - \alpha_e - \alpha_i - \alpha_e \alpha_i}{2 (2 - \alpha_e \alpha_i)} \right\}$$

$$\lambda = -k ((C^2 - 5/2) V_x^2, A)$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

На фиг. 3, 4 представлена зависимость величины скачка температуры от точности вычисления тепловой функции Чепмена, где

$$f_{c2} = \frac{C_i^{(1)} - C_i^{(2)}}{C_i^{(1)}}; \quad f_{c3} = \frac{C_i^{(1)} - C_i^{(3)}}{C_i^{(1)}}$$

Из анализа зависимости видно, что при некоторых значениях α_i и α_e второе и третье приближения могут совпадать с первым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Ферцигер Дж., Канер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
3. Loyalka S. K. Approximate Method in kinetic theory//Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 11. P. 2291—2294.

Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1992