

УДК 533.6.011.35

© 1995 г. К. Г. САЯДЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОКОЛОЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКИХ ТЕЛ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ ОГРАНИЧЕННЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

В результате совместного решения краевых задач для ближнего и дальнего полей течения получены распределения коэффициента давления при обтекании схематизированного летательного аппарата типа «Хотол» ограниченным потоком газа для различных трансзвуковых режимов в трубе с перфорированной рабочей частью. Проведено сравнение этих распределений с распределением коэффициента давления в случае обтекания тела безграничным потоком. Для дозвукового обтекания аппарата в цилиндрической трубе большого радиуса вычислен дополнительный коэффициент давления, индуцированный стенками трубы, получено хорошее соответствие результатов расчета асимптотической теории Мальмута для дозвуковых скоростей.

Решение задачи об индукции проницаемых границ аэродинамической трубы при обтекании тонкого тела пространственной конфигурации требует синтеза асимптотического и численного подходов.

Применение асимптотических методов изучения интерференции [1—3] приводит к уменьшению количества параметров, необходимых для расчета индукции стенок, существенно упрощает задачу и вместе с тем проясняет физическую картину явления интерференции.

Сочетание асимптотической и численной моделей дает возможность быстро и эффективно корректировать экспериментальные результаты, а также получать параметры режимов обтекания, приводящие к устранению индукции границ.

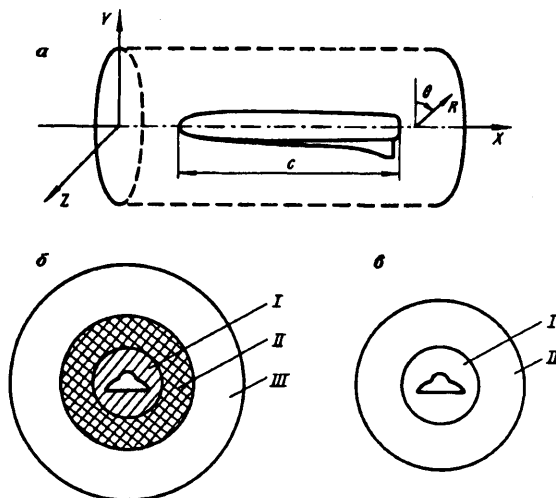
Теоретической основой такого подхода к решению задач околозвукового обтекания гиперзвуковых летательных аппаратов является трансзвуковая теория тонкого тела [4]. Эта теория позволяет свести трехмерную задачу обтекания тела пространственной конфигурации ограниченным потоком газа к решению двух двумерных краевых задач — задачи о ближнем поле и задачи о дальнем поле.

В области, прилегающей к телу, главная часть существенно трехмерного решения может рассматриваться как поле потенциала несжимаемого течения в направлении, перпендикулярном оси аппарата. На больших расстояниях от летательного аппарата решение имеет осесимметричную структуру и в главном члене совпадает с решением задачи околозвукового обтекания тела вращения. Распределение площади поперечного сечения этого тела вращения эквивалентно распределению площади сечения реального аппарата.

Вывод уравнений теории тонкого тела, а также стыковка решений для ближнего и дальнего поля осуществляются с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений.

Для численного решения внешней краевой задачи применен итерационный метод релаксации, основанный на схеме Мурмана — Коула. Проведены исследования сходимости задачи при различных параметрах ограниченного потока и характеристиках численной схемы.

Внутренняя краевая задача — задача Неймана для уравнения Лапласа — решена методом граничного элемента, при котором возмущенный потенциал представляется в виде потенциала простого слоя.



Фиг. 1

1. **Постановка задачи.** При обтекании тонкого тела под нулевым углом атаки в трубе цилиндрического сечения радиуса h безвихревым потоком невязкого газа (фиг. 1, а) возмущенный потенциал скорости $\varphi(X, Y, Z)$ удовлетворяет уравнению

$$(a^2 - u^2) \varphi_{XX} + (a^2 - v^2) \varphi_{YY} + (a^2 - w^2) \varphi_{ZZ} - 2uv\varphi_{XY} - 2vw\varphi_{YZ} - 2uw\varphi_{XZ} = 0 \quad (1.1)$$

$$u = \varphi_X, \quad v = \varphi_Y, \quad w = \varphi_Z$$

и помимо условия непротекания на теле следующему граничному условию на перфорированной стенке, $R = h$:

$$\varphi_X + \frac{1}{R_w} \varphi_R = 0 \quad (1.2)$$

Здесь координаты X, Y, Z направлены вдоль вектора скорости набегающего потока, перпендикулярно ему и по размаху крыла; a — скорость звука, R — радиальная координата, R_w — коэффициент проницаемости перфорированной стенки; u, v, w — компоненты скорости.

Введем безразмерные координаты

$$x = \frac{X}{c}, \quad y = \frac{Y}{c}, \quad z = \frac{Z}{c}, \quad r = \frac{R}{c}$$

где c — характерная длина в направлении X . Пусть отклонение потока в трансверсальном направлении определяется малой величиной $\delta = T/c$, где T — характерная длина тела по размаху.

Если ввести параметр $H = h\delta/c$, то в случае $\delta \rightarrow 0, H \rightarrow \infty$ поле течения разбивается на три характерные области (фиг. 1, б).

В первых двух областях — ближней и центральной — в первом порядке справедлива классическая теория обтекания тонкого тела.

В ближней области I, где $r = O(\delta)$, доминируют градиенты в направлении y, z и решение является гармоническим в сечении, перпендикулярном направлению набегающего потока. В центральной области II, где $r = O(1/\delta)$, влияние геометрии летательного аппарата на течение не столь существенно и объект может быть смоделирован эквивалентным телом вращения.

В этих двух областях воздействие стенок обнаруживается как малое возмущение относительно доминирующего течения около тела большого удлинения. В при-

стеночной области III, где $r = O(H)$, поле потока представляет собой течение от особенностей, отраженных от стенки.

В настоящей работе рассматривается случай индукции стенок цилиндрической трубы умеренного радиуса (H конечно) при обтекании тонкого тела (δ мало), который соответствует асимптотической структуре поля течения, изображенной на фиг. 1, в.

Поверхность тонкого тела, показанного на фиг. 1, а, можно представить в цилиндрической системе координат в виде

$$B(x, r, \theta) = r - \delta F(x, \theta) = 0 \quad (1.3)$$

где $r = \delta F(x; \theta)$ — уравнение кривой поперечного сечения аппарата при $x = \text{const}$.

Внешнее разложение. Для дальнего поля II (фиг. 1, в) вводится система координат $x, y^\circ = \varepsilon y, z^\circ = \varepsilon z$, где $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ — малый параметр.

Разложение потенциала для внешней области примет вид

$$\Phi^\circ = U_\infty c [x + \mu(\delta) \varphi^\circ(x, y^\circ, z^\circ, M_\infty) + \dots] \quad (1.4)$$

где U_∞, M_∞ — скорость и число Маха набегающего потока. Подставляя (1.4) в уравнение (1.1) и пренебрегая членами порядка $\varepsilon^2 \mu^2$ и выше, получим при условии $\mu(\delta) = \varepsilon^2$ уравнения для возмущенного потенциала во внешней области трансзвукового течения

$$(K - (\kappa + 1) M_\infty^2 \varphi_x^\circ) \varphi_{xx}^\circ + \varphi_{y^\circ y^\circ}^\circ + \varphi_{z^\circ z^\circ}^\circ = 0 \quad (1.5)$$

Здесь $K = (1 - M_\infty^2) \varepsilon^{-2}$, κ — отношение удельных теплоемкостей. Для сращения с внутренним решением необходимо изучить поведение решения уравнения (1.5) при $r^\circ \rightarrow 0$. Отметим, что условию затухания скорости при $r^\circ \rightarrow 0$ удовлетворяет только осесимметричная асимптотика внешнего решения

$$\varphi^\circ = S^\circ(x) \ln r^\circ + g^\circ(x; K) \quad (1.6)$$

После подстановки (1.4) в условие на стенке (1.2) получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x} + \frac{1}{R_w} \varepsilon^3 \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial r^\circ} = 0 \quad (1.7)$$

Чтобы условие в переменных дальнего поля не вырождалось в условие на свободной границе, необходимо выполнение соотношения $R_w \sim \varepsilon$ или

$$R_w \simeq \sqrt{1 - M_\infty^2} \quad (1.8)$$

Краевая задача для внешнего поля течения (1.5) — (1.7) в переменных x, r может быть записана в виде

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - M_\infty^2 (\kappa + 1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

$$r^\circ = \varepsilon r \rightarrow 0: \varphi(r) = S(x) \ln r + g(x; K) \quad (1.9)$$

$$r = h: \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{R_w} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

$$g(x; K) = \delta^2 g^\circ(x; K), \quad S(x) = \delta^2 S^\circ(x), \quad \varphi(x, r) = \delta^2 \varphi^\circ(x, r^\circ)$$

Внутреннее разложение. На поверхности (1.3) граничное условие непротекания

$$\text{grad } \Phi \cdot \text{grad } B = 0$$

запишется в виде

$$\Phi_r - \frac{\delta F_\theta \Phi_\theta}{r^2} - \delta F_x \Phi_x = 0, \quad r = \delta F(x, \theta) \quad (1.10)$$

Внутренние координаты в области I (фиг. 1, в) вводятся следующим образом:

$$r^* = r/\delta, \quad \theta^* = \theta, \quad x^* = x$$

Поверхность тела в этих переменных имеет вид

$$r^* = F(x, \theta)$$

Асимптотическое представление потенциала в ближней области течения выразится следующим образом:

$$\Phi(x, r^*, \theta) = U_x c [x + \tau_0(\delta) \varphi_0(x, r^*, \theta) + \tau_1(\delta) \varphi_1(x, r^*, \theta) + \tau_2(\delta) \varphi_2(x, r^*, \theta) + \dots] \quad (1.1)$$

В переменных внешнего разложения обтекаемое тело представляется отрезком $0 \leq x \leq 1$. Поэтому для сращивания с внешним течением необходимо предположить, что член $\tau_0(\delta)\varphi_0(x, r^*, \theta)$ не зависит от r^* и θ .

После подстановки (1.11) в уравнение (1.1), в пренебрежении членами, порядок которых превышает τ_0/δ^2 и τ_1/δ^2 , получаем уравнение для потенциала несжимаемого потока в сечении r^*, θ

$$\Delta^* \varphi_1 = 0 \quad (1.12)$$

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Подстановка (1.11) в граничное условие (1.10) и условие невырожденности

$$\tau_1(\delta) = \delta^2 \quad (1.13)$$

приводят к уравнению

$$\varphi_{1,r^*} = F_x + \left(\frac{1}{r^*}\right)^2 F_0 \varphi_{1,\theta} \quad (1.14)$$

которое после несложных преобразований может быть записано в виде краевого условия Неймана для уравнения Лапласа (1.12)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n^*} = \frac{F_x F}{\sqrt{F^2 + F_0^2}} \quad (1.15)$$

Для сращивания решения внутренней краевой задачи с потенциалом дальнего поля необходимо знать поведение этого решения при $r^* \rightarrow \infty$. Предельный переход при $r^* \rightarrow \infty$ представления φ_1 в виде формулы Грина, приводит к уравнению

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \ln r^* \oint \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n^*} \right)_{B^*} dl + g^*(x)$$

Учитывая соотношение $dl = d\theta \sqrt{F^2 + F_0^2}$, а также выражение (1.15) для $\partial \varphi_1 / \partial n^*$, получим

$$\varphi_1 = \frac{A'(x)}{2\pi} \ln r^* + g^*(x), \quad A(x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} F^2(x, \theta) d\theta \quad (1.16)$$

Здесь $A(x)$ — площадь поперечного сечения.

Краевая задача о ближнем поле формулируется, таким образом, в виде

$$\Delta^* \varphi_1 = 0$$

$$r^* = F(x, \theta): \frac{\partial \varphi_1}{\partial n^*} = \frac{F_x F}{\sqrt{F^2 + F_0^2}} \quad (1.17)$$

$$r^* \rightarrow \infty: \varphi_1 = \frac{A'(x)}{2\pi} \ln r^* + g^*(x)$$

2. Сращивание решений для ближнего и дальнего поля. Численный анализ. Результаты. Для того чтобы решить задачу об обтекании тонкого тела произвольной формы в плане трансзвуковым потоком газа, необходимо провести сращивание асимптотических представлений для дальнего и ближнего полей.

Если учесть предельные выражения (1.6) и (1.16) провести сращивание в промежуточных переменных $(x, r_\eta, \theta; K)$, $r_\eta = r/\eta(\delta)$, $\varepsilon(\delta) \geq \eta \geq \delta$, получим следующие соотношения:

$$\mu(\delta) = \delta^2, \quad \tau_0(\delta) = \delta^2 \log \delta^2 \quad (2.1)$$

$$\varphi_0(x) = \frac{A_1'(x)}{2\pi} = S^\circ(x), \quad g^\circ(x) = g^*(x)$$

Окончательно вид внутреннего разложения (1.11) с учетом (1.13) определится следующим образом:

$$\Phi(x, r^*, \theta) = u_\infty c [x + \delta^2 \log \delta^2 \frac{A'(x)}{2\pi} + \delta^2 \varphi_1(x, r^*, \theta, K + \dots)] \quad (2.2)$$

Функция φ_1 определится из решения краевой задачи (1.17) с точностью до аддитивной переменной $g^*(x)$, которая в свою очередь может быть найдена из решения внешней краевой задачи

$$g^*(x) = \frac{1}{\delta^2} \lim_{r \rightarrow 0} (\varphi(x, r) - S(x) \ln r) \quad (2.3)$$

где $\varphi(x, r)$ — решение задачи (1.9).

Коэффициент давления для тонких тел имеет вид

$$C_p = -2\varphi'_x - (\varphi'_y)^2 - (\varphi'_z)^2$$

где $\varphi'(x, y, z)$ — возмущенный потенциал для ближнего поля, или

$$\frac{C_p}{\delta^2} = -2 \left[\frac{A''(x)}{2\pi} \ln \delta^2 + \varphi_{1,x} + \frac{dg^*}{dx} \right] - (\varphi_{1,y})^2 - (\varphi_{1,z})^2 \quad (2.4)$$

Для определения аэродинамических характеристик тела надо сначала решить внешнюю краевую задачу (1.9) — задачу обтекания эквивалентного тела вращения в цилиндрической трубе. Так как задача имеет особенность при $r^* \rightarrow 0$, то краевое условие (1.6) ставится на поверхности некоторого цилиндра малого радиуса r_c , значение которого определялось в [5] из сравнения решения линейного уравнения, в которое переходит уравнение (1.5) при $x+1=0$, и аналитического решения того же уравнения. При этом удается добиться наилучшего согласования в определении аддитивной функции $g(x)$.

Для численного анализа уравнения (1.9) удобно перейти от переменных x, r к новым переменным

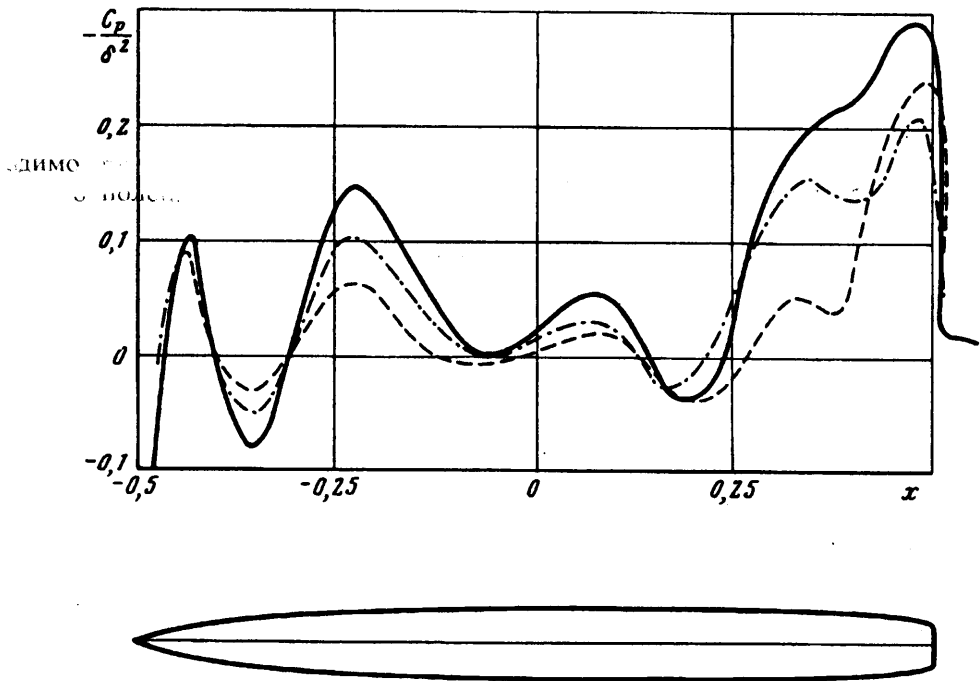
$$\xi = \operatorname{tg}(\alpha x), \quad \eta = 1 - e^{-\beta r}$$

Эти переменные переводят бесконечную полосу $\{-\infty < x < \infty, 0 \leq r \leq h\}$ в прямоугольник $\{-1 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq H^\circ < 1\}$, где $H^\circ = 1 - e^{-\beta h/c}$.

Для дискретизации уравнений (1.9) используем прямоугольную расчетную сетку с равномерным шагом по ξ, η

$$\Delta \xi = \frac{2}{N-1}, \quad \Delta \eta = \frac{H^\circ - \eta_c}{M-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

После применения к системе дифференциальных уравнений конечно-разно-



Фиг. 2

стной схемы Мурмана — Коула получается система конечно-разностных уравнений с трехдиагональной матрицей.

Для решения этой системы в случае обтекания тела безграничным потоком обычно применяется метод прогонки совместно с итерационным методом релаксации. При этом на каждом i -том слое проводится процедура релаксации

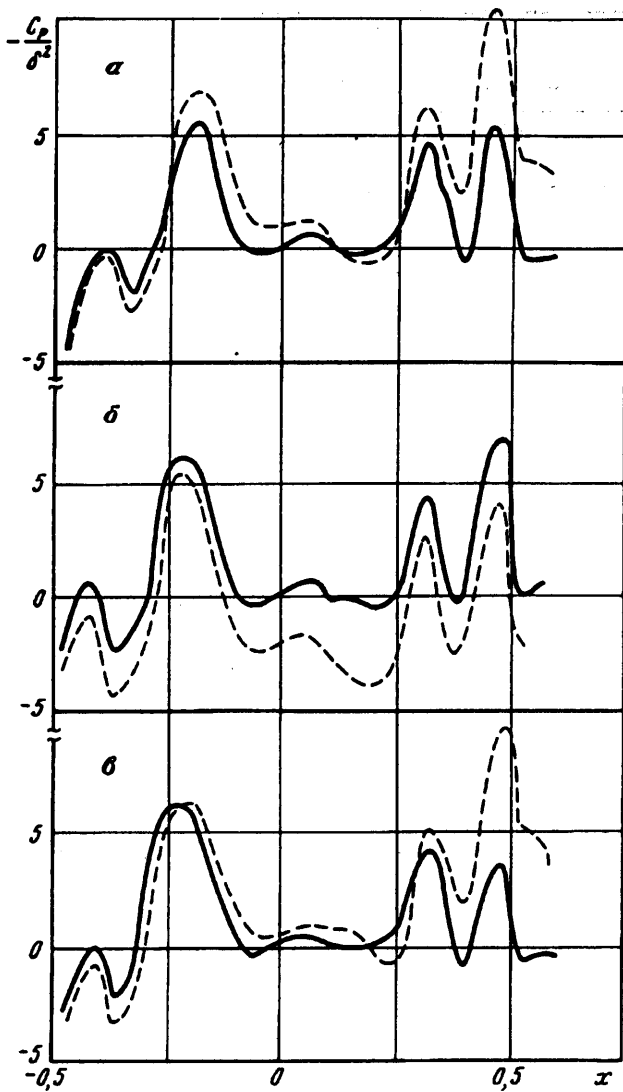
$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} + \omega (\varphi_*^{(n+1)} - \varphi^{(n)}) \quad (2.5)$$

где n — номер итерации, $\varphi_*^{(n+1)}$ — значение, на $(n+1)$ -м шаге, полученное в результате прогонки, ω — коэффициент релаксации.

В случае обтекания тела вращения в трубе трансзвуковым потоком газа метод прогонки оказывается менее эффективным с точки зрения сходимости вычислений, чем метод простых итераций. Это наблюдается при уменьшении радиуса трубы и при приближении числа M_∞ к единице.

Процесс итерации происходит сначала по переменной j , затем по i . После этого проводится процедура релаксации (2.5). Для улучшения сходимости применяется метод последовательного удвоения сетки. Одним из способов монотонизации сходимости (в особенности на мелкой сетке) является плавное увеличение числа Маха в процессе счета от докритических значений к сверхкритическим. Вместо этого в настоящей работе проводилось варьирование параметра релаксации в процессе удвоения сетки и во время расчета на мелкой сетке, что дало существенное улучшение сходимости.

В результате решения внешней краевой задачи получены аэродинамические характеристики обтекания эквивалентного тела вращения ограниченным потоком газа. На фиг. 2 показаны распределения коэффициента давления $-C_p(x)/\delta^2$ для случаев безграничного обтекания тела вращения (сплошная кривая), обтекания в цилиндрической трубе радиуса $h/c = 0,5$ с проницаемостью стенок $R_w = 0,1$ (штриховая кривая); штрихпунктирная кривая соответствует $h/c = 0,5$, $R_w = 0,2$. Таким образом, уменьшить индукцию границ можно, увеличив их проницаемость.



Фиг. 3.

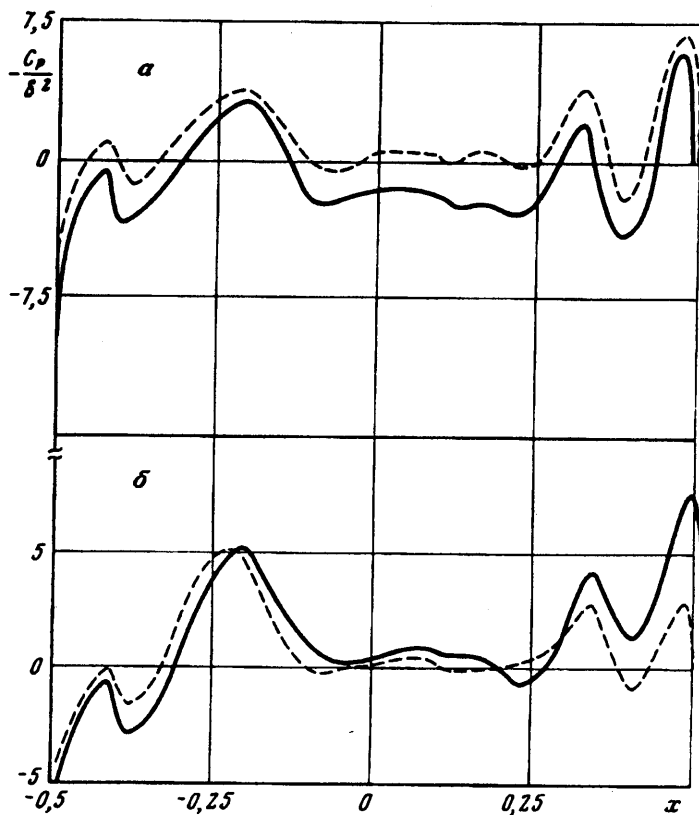
Однако не следует забывать, что, во-первых, устранение индукции во всем потоке с помощью изменения лишь коэффициента проницаемости не представляется возможным [1], и, во-вторых, ограничение на коэффициент проницаемости (1.8) имеет еще и известный физический смысл, так как, начиная с некоторого $R_{w, \min}$, течение у стенок перестает быть стационарным.

Из численного решения задачи о дальнем поле определяется также величина

$$G = \frac{A''(x)}{2\pi} \ln \delta^2 + \frac{dg^*}{dx} = \frac{1}{\delta^2} \varphi_x |_{r=r_c} - \frac{A''(x)}{2\pi} \ln \left(\frac{r_c}{\delta} \right)$$

В программу расчета внутренней краевой задачи из внешней передается массив неравномерного разбиения по x в физическом пространстве и числовой массив G . Программа расчета задачи о ближнем поле при каждом значении x_i вызывает блок подпрограмм, задающих геометрию тела.

В качестве алгоритма решения внутренней краевой задачи (1.17) принят метод граничного элемента или панельный метод. В этом методе потенциал течения представляется в виде потенциала



Фиг. 4

простого слоя переменной интенсивности. Контур поперечного сечения при этом моделируется ломаной линией, причем каждый отрезок ломаной есть совокупность точечных источников постоянной интенсивности.

В точке P потенциал простого слоя выразится в виде

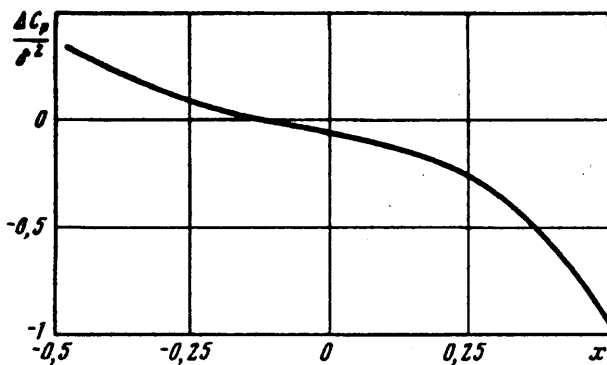
$$\varphi_1(P) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \mu_i \int_i^{i+1} \ln r(L_i, P) dl_i \quad (2.6)$$

Здесь N — количество панелей, μ_i — интенсивность источников i -той панели, l_i — переменная интегрирования по отрезку, $r(L_i, P)$ — расстояние от точки L_i отрезка контура до точки P .

Функция (2.6) тождественно удовлетворяет уравнению Лапласа. Интенсивность источников должна быть такова, чтобы в некоторой точке i -того отрезка, $i = 1, 2, \dots, N$, совокупный эффект источников всех панелей удовлетворял бы условию непротекания.

Проведено исследование сходимости решения внутренней краевой задачи к осесимметричному при увеличении разбиения контура для тел различной геометрии. Характер сходимости определялся заданием геометрии реального аппарата. Так, если правая часть в условии Неймана (1.15) получалась достаточно гладкой, то сходимость решения к осесимметричному имела монотонный характер, если же имелись области резкого изменения значения функции F , то сходимость была немонотонной.

В результате совместного решения двух краевых задач при трансзвуковых числах Маха вычислено распределение коэффициента давления $-C_p(x)/\delta^2$ на поверхности гиперзвукового летательного аппарата типа «Хотод» в различных сечениях $\theta = \text{const}$ для случаев обтекания аппарата в цилиндрической трубе с перфорированной рабочей частью.



Фиг. 5

На фиг. 3 показаны аэродинамические характеристики поверхности летательного аппарата в сечении $\theta = 54^\circ$ для трех околозвуковых режимов обтекания при $M_\infty = 0,995$ (а), $1,005$ (б) и $1,05$ (в); на фиг. 4 — для двух режимов обтекания в сечении $\theta = 18^\circ$ при $M_\infty = 1,005$ (а) и $1,05$ (б). На фиг. 3, 4 сплошные кривые соответствуют распределению $-C_p(x)/\delta^2$ на поверхности аппарата при обтекании его в аэродинамической трубе с радиусом $h/c = 0,5$ и проницаемостью стенок $R_w = 0,1$; штриховые кривые соответствуют случаю обтекания аппарата безграничным потоком газа.

Отличие коэффициента давления при обтекании аппарата в трубе от безындукционного в этих случаях весьма велико. Для чисел $M_\infty < 1$ основное различие получается вблизи периферии модели (фиг. 3, а), что связано с большими возмущениями, идущими от этих областей модели к стенке, и тем, что при их отражении стенкой локализации максимальных возмущений по продольной координате не меняются. Если число Маха немногим больше единицы, то максимальное различие смещается к центру модели (фиг. 3, б, 4, а). При дальнейшем росте M_∞ в сверхзвуковом диапазоне скорости возмущения, идущие от стенки, вновь смещаются к периферии (фиг. 3, в, 4, б).

На фиг. 5 показана зависимость дополнительного коэффициента давления $\Delta C_p(x)$, индуцированного стенками трубы большого диаметра, при дозвуковом обтекании тонкого тела. За исключением областей, примыкающих к носку и корме, эта зависимость имеет вид, близкий к линейному. Это в точности соответствует результату асимптотической теории [3] для дозвуковых скоростей, где для тел с донным срезом, близким к вертикальному, получено

$$\frac{\Delta C_p}{\delta^2} = \frac{4b_0}{H^3} (A(1)x - I_1), \quad b_0 = 0,063409$$

$$I_1 = \int_0^1 \xi A(\xi) d\xi$$

где $A(\xi)$ — распределение площади поперечного сечения эквивалентного тела вращения, $A(1)$ — площадь донного среза.

Таким образом, результаты настоящей работы позволяют определить диапазон применимости асимптотической теории индукции границ потока к решению задачи создания безындукционных режимов обтекания в аэродинамических трубах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифшиц Ю. Б., Фонарев А. С.* О влиянии границ потока на параметры трансзвуковых течений около тела вращения//Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 68—75.
2. *Cole J. D., Malmuth N. D., Zeigler F.* An asymptotic theory of solid tunnel wall interference of transonic airfoils//AIAA Pap. 1982. № 82-0933. 10 p.
3. *Malmuth N. D.* An asymptotic theory of wind-tunnel-wall interference on subsonic slender bodies//J. Fluid Mech. 1987. V. 177. P. 19—35.
4. *Cole J. D., Cook L. P.* Transonic aerodynamics. Amsterdam etc.: North Holland, Elsevier Sci. 1986. VIII. 473 p.
5. *Krupp J. A., Murman E. M.* The numerical calculation of steady transonic flow past thin lifting airfoils and slender bodies//AIAA Pap. № 71-566. 1971. 10 p.

Москва

Поступила в редакцию
4. II. 1994