

УДК 533.6.011.34/5

© 1995 г. В. В. ВЛАСОВ, В. Г. ГРУДНИЦКИЙ, В. Н. РЫГАЛИН

## ГАЗОДИНАМИКА ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ВЫДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ В ДО- И СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Проведено численное исследование течений, возникающих при взаимодействии сверхзвукового потока газа с постоянно действующим цилиндрически-симметричным источником энерговыделения и при воздействии на дозвуковой поток газа импульсного периодического энерговыклада. При обдувании постоянно действующего источника энергии выявлено два типа обтекания: с отошедшей от источника и присоединенной к нему ударной волной. Получены приближенные формулы для плотности газа в центре зоны выделения энергии в случае постоянно действующего и периодического источника энергии.

Рассматривается задача о пространственно распределенном выделении энергии в газовом потоке. Считается, что область энерговыделения аксиально-симметрична и ее продольный размер (по оси  $Z$ ) много больше поперечного, а однородный поток газа направлен по нормали к оси  $Z$ . В этом случае задачу об обдувании источника энергии газовым потоком можно рассматривать в двумерной плоской постановке. Расположим начало декартовой системы координат  $X = Y = 0$  в центре источника энерговыделения. Пусть скорость невозмущенного потока газа  $u_0$  направлена по оси  $X$ . Из соображений симметрии задачу можно рассматривать в полуплоскости  $Y \geq 0$ . Параметры потока на бесконечном удалении от источника стационарны и задаются значениями плотности  $\rho_0$ , давления  $p_0$  и скорости  $u_0$ , ( $v_0 = 0$ ). Задачи в подобной постановке рассматривались, например, в [1, 2], где приведены отдельные результаты расчетов, а также в [3, 4], где рассмотрены некоторые аналитические решения. Здесь делается попытка обобщить результаты численного решения рассматриваемой задачи на достаточно широкий диапазон определяющих параметров.

Использовалась система уравнений газовой динамики в декартовой системе координат

$$U_t + V_x + W_y = F \quad (1)$$

$$U_{xt} + V_{xx} + W_{xy} = F_x \quad (2)$$

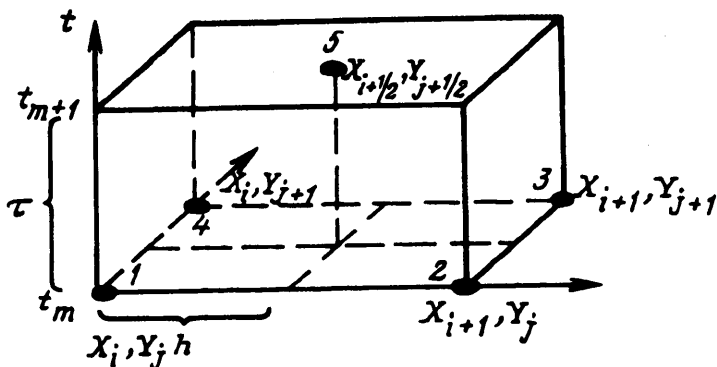
$$U_{yt} + V_{yx} + W_{yy} = F_y \quad (3)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ v(e + p) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

$$e = \rho [\varepsilon + 0,5(u^2 + v^2)]$$

где  $\rho$ ,  $p$  — плотность и давление газа,  $u$ ,  $v$  — компоненты скорости в декартовой системе координат  $X$ ,  $Y$ ,  $e$  — полная энергия газа в единице объема,  $q(X, Y, t)$  — удельная мощность энерговыделения.

Задача решалась в области  $-a < X < a$ ,  $0 < Y < b$ . На границе  $X = -a$  задавались параметры невозмущенного потока, на границах  $X = a$  и  $Y = b$  — условия свободного вытекания газа. На границе  $Y = 0$  использовались условия симметрии течения относительно оси  $X$ .



Фиг. 1

Для построения разностных уравнений, аппроксимирующих исходную систему уравнений, вводится сетка с постоянными по  $X$  и  $Y$  шагами, равными  $h = 2h$ . Шаг по времени  $\tau$  выбирается на каждом временном слое из условия устойчивости  $\tau = kH / \max(\sqrt{u_y^2 + v_y^2} + c_y)$ , где  $c_y$  — местная скорость звука. Расчетная ячейка  $G$  показана на фиг. 1.

В основе построения разностной схемы для уравнения (1) лежит интегроинтерполяционный метод. Считается, что в каждой из четвертей квадрата, лежащего в основании ячейки  $G$ , действует линейное представление, основанное на задании функций и их первых производных по  $X$  и  $Y$  в соответствующем этой четверти узле. На каждой половине боковой грани параллелепипеда аналогично действует линейное представление с коэффициентами, равными значениями функций и их пространственных и временных производных в соответствующем узле основания ячейки, причем величина временной производной с помощью основных уравнений выражается через величины пространственных производных.

Разностные схемы для уравнений (2), (3) выводятся в предположении кусочно-постоянного представления производных на интервалах непрерывности. Более подробно построение разностной схемы приведено в [1].

По описанной схеме второго порядка аппроксимации проведены расчеты широкого класса ударно-волновых задач, результаты которых позволяют характеризовать ее как надежную, обладающую достаточно высокой точностью и позволяющую вести счет без введения искусственной вязкости.

Считая, что энергосвечение происходит в области с характерным размером  $R_0$ , пространственное распределение объемной мощности источника энергии зададим в виде

$$q(x, y, t) = \begin{cases} Q_0 \tau_0^{-1} \rho f(X^2 + Y^2) / R_0^2, & (k-1)T_0 \leq t \leq (k-1)T_0 + \tau_0 \\ 0, & (k-1)T_0 + \tau_0 \leq t \leq kT_0 \end{cases} \quad (4)$$

$$k = 1, \dots, n$$

где  $\tau_0$  — длительность импульса энергосвечения,  $T_0$  — пауза между импульсами,  $f$  — функция, задающая радиальное распределение интенсивности энерговклада,  $Q_0$  — удельная интенсивность источника,  $n$  — число импульсов.

Для замыкания системы газодинамических уравнений использовались уравнения состояния для равновесного воздуха в виде таблиц [5]

$$p = P(p, \varepsilon), \quad T = T(p, \varepsilon) \quad (5)$$

где  $T$  — равновесная температура газа.

Решения поставленной задачи с разными начальными условиями связаны законами подобия. Для политропного газа с постоянным показателем адиабаты  $\gamma$  задача характеризуется следующим набором определяющих параметров: размерными переменными  $t, X, Y, p, \rho, u, v$ ; размерными постоянными  $\rho_0, p_0, u_0, T_0, \tau_0, R_0, Q_0$ ; безразмерной постоянной  $\gamma$ ; безразмерной функцией  $f$ .

Перейдем к безразмерным переменным  $t' = t/t_0$ ,  $x = X/R_0$ ,  $y = Y/R_0$  ( $t_0 = R_0 \sqrt{\rho_0/p_0}$ ) и представим решение задачи в виде

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0} = \varphi_1(t', x, y, u_0, T_0', \tau_0', Q_0', \gamma, f), \quad p' = \frac{p}{p_0}$$

$$u' = u \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{-1/2}, \quad v' = \vartheta \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{-1/2},$$

$$u_0' = u_0 \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{-1/2}, \quad T_0' = \frac{T_0}{t_0}, \quad \tau_0' = \frac{\tau_0}{t_0}, \quad Q_0' = \frac{Q_0 \rho_0}{p_0}$$

Два решения, отвечающие разным начальным условиям (с одинаковыми  $f$  и  $\gamma$ ), подобны при выполнении соотношений

$$u_0' = u_1', \quad T_0' = T_1', \quad \tau_0' = \tau_1', \quad Q_0' = Q_1'$$

При  $\tau_0' \gg 1$  можно считать, что импульсный источник энергии действует как непрерывный. По скорости набегающего потока различаются дозвуковой ( $u_0' < \sqrt{\gamma}$ ) и сверхзвуковой ( $u_0' > \sqrt{\gamma}$ ) режимы обтекания источника. В первом случае возмущения от источника неограниченно распространяются вверх по потоку, что вызывает определенные трудности при постановке граничных условий при  $X = -a$  (в процессе счета приходится расширять расчетную область). Во втором случае возмущенная область ограничена отошедшей ударной волной либо областью энерговыделения и присоединенной ударной волной.

При  $\tau_0' \ll 1$  можно считать, что энерговыделение происходит мгновенно. Для короткоимпульсных режимов параметр  $\tau_0'$  является несущественным, а в случае длинноимпульсного энерговыделения мощность источника энергии удобнее характеризовать величиной  $W_0 = Q_0'/\tau_0'$ .

Функция распределения энергии по пространству задавалась в виде (здесь и далее штрихи над переменными опускается)

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) \quad (6)$$

В случае сверхзвукового обтекания источника энергии численного решалась задача на установление. В области параметров  $1,2 \leq M \leq 5$  и  $15 \leq W_0 \leq 1200$  ( $M = u_0/c_0$  — число Маха набегающего потока) выявлены два качественно различных режима взаимодействия потока с источником. Характерный вид течений в окрестности области энерговыделения показан на фиг. 2—4, где представлены распределения установившихся значений плотности, давления, скорости и температуры вдоль плоскости симметрии (а) и изолинии плотности (б). Штриховыми линиями обозначены линии локального максимума плотности. На фиг. 2: 1 —  $\rho$ , 2 —  $0,1p$ , 3 —  $u$ , 4 —  $0,1T$ ;  $M_0 = 3$ ,  $W = 300$ ; на фиг. 3: 1 —  $10\rho$ , 2 —  $p$ , 3 —  $10u$ , 4 —  $T$ ,  $M_0 = 3$ ,  $W = 15$ ; на фиг. 4: 1 —  $\rho$ , 2 —  $0,1p$ , 3 —  $u$ , 4 —  $0,1T$ ,  $M_0 = 5$ ,  $W = 300$ .

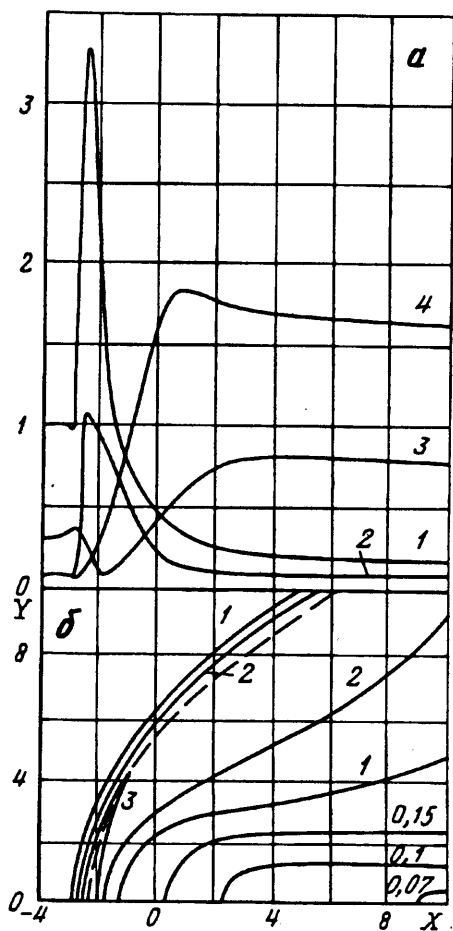
В первом режиме отошедшая ударная волна находится выше по потоку от области энерговыклада (фиг. 2) и пересекает ось симметрии.

Во втором режиме газ проходит через источник со сверхзвуковой скоростью, а присоединенная к источнику ударная волна не пересекает оси симметрии (фиг. 3).

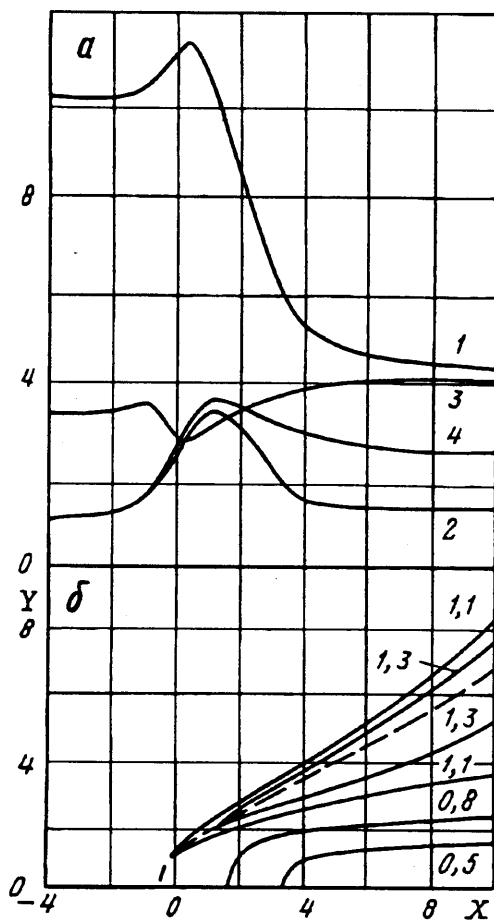
Переход от первого режима ко второму происходит при уменьшении мощности энерговыделения и увеличении числа  $M$ . Переходный режим, при котором фронт ударной волны расположен в зоне энерговыделения, представлен на фиг. 4.

В рассматриваемом диапазоне параметров по результатам расчетов получена аппроксимационная формула для плотности в центре источника

$$\rho = \rho_m + 0,01 \left( \frac{600}{W_0} + 1 \right) M^2$$



Фиг. 2



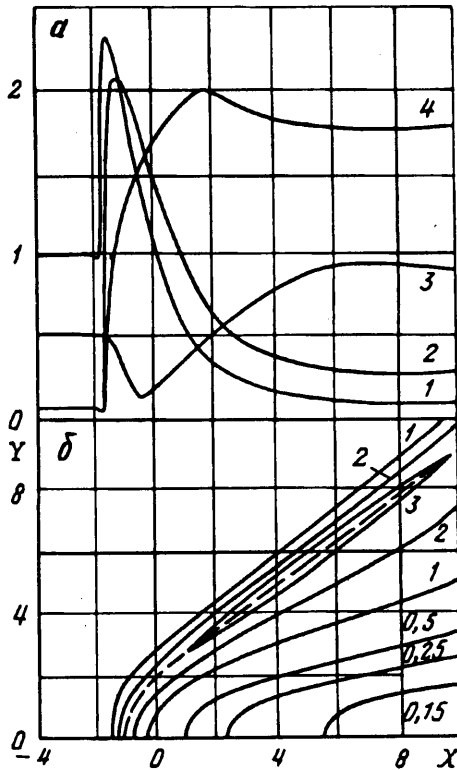
Фиг. 3

где  $\rho_m$  — квазистационарное значение плотности в случае покоящегося газа, которое определяется балансом между энерговкладом и потерями энергии из разогретой области за счет излучения и теплопроводности (в рассмотренном нами диапазоне параметров можно считать  $\rho_m = 0$ ).

Воздействие на дозвуковой поток импульсного энерговыведения рассмотрено при  $\tau_0 \ll 1$ . В этом случае интенсивность энерговыведения характеризуется полной выделенной источником за импульс энергией  $Q_0$ . Время паузы между импульсами выбиралось из условия  $\tau_0 \ll T_0$ .

Проведены расчеты течения газа при воздействии на дозвуковой поток с числами Маха  $0 \leq M \leq 0,5$  серии импульсов ( $n = 10$ ) с неизменными от импульса к импульсу безразмерными величинами вложенной на единицу массы газа энергии:  $Q_0 = 1$  и 2 при  $T_0 = 1,4$  и 2,8.

На фиг. 5 представлена динамика плотности газа в центре источника энерговыведения в зависимости от значения числа  $M$  (номера кривых по порядку соответствуют значениям  $M = 0, 0,05, 0,1, 0,3, 0,5$ ) для  $Q_0 = 1, T_0 = 1,4$ . Немонотонность кривых обусловлена тем, что процесс падения плотности в области энерговклада после каждого импульса конкурирует с процессом увеличения плотности за счет бокового сноса газа под действием потока за время  $T_0$ . Расчеты с большими значениями  $T_0$  показали, что амплитуды колебаний возрастают. Кроме того, выяснилось, что при  $M \geq 0,1$  процесс изменения плотности выходит на периодический режим после 1—2 импульсов, тогда как при меньших



Фиг. 4

значениях  $M$  время выхода на такой режим возрастает (для кривой, соответствующей  $M = 0,05$  на фиг. 5, оно составляет  $(8-9) T_0$ ).

Полученные расчетные данные можно приближенно описать аналитически, исходя из следующих соображений. Рассмотрим случай  $M = 0$  и предположим, что длительность паузы между импульсами такова, что этого времени достаточно для выравнивания давления. Установившаяся плотность после  $k$  импульсов может быть найдена из рекуррентного соотношения [6]

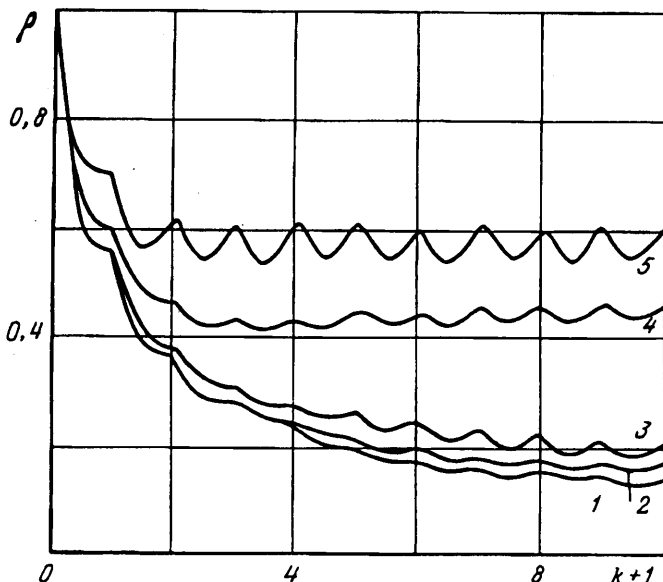
$$p_k = p_{k-1} \left[ 1 + \frac{Q_0 (\gamma - 1) p_{k-1}}{p_0} \right]^{-1/\gamma}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

В приближении слабого источника энергии (когда можно пренебречь энергией, уносимой из разогретой области ударной волной) соотношение (7) можно представить в виде

$$p_k = p_{k-1} \left[ 1 + \frac{Q_0 (\gamma - 1) p_{k-1}}{p_0 \gamma} \right]^{-1}$$

ИЛИ

$$p_k = \frac{p_0}{1 + k Q_0 (\gamma - 1) p_0 / (\gamma p_0)} = p_0 \left[ 1 + \frac{t_k}{\tau_0 + T_0} Q_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right]^{-1}$$



Фиг. 5

В случае постоянно действующего источника энергии слабой интенсивности ( $T_0 = 0$ ) эта формула сводится к формуле [8]

$$\rho(t) = \rho_0 \left[ 1 + \frac{t}{\tau_0} Q_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right]^{-1} \quad (8)$$

Согласно формуле (8), описывающей прогрев источником энерговыделения покоящегося газа, плотность с течением времени стремится к нулю. В случае, когда источник обдувается потоком газа, максимально допустимая степень разрежения ограничена, поскольку газ подвергается воздействию источника в течение времени, пропорционального  $R_0/u_0$ . Поэтому можно предположить, что уровень разрежения в канале определяется соотношением (8) при подстановке в него эффективного времени прогрева  $t^* = \alpha R_0/u_0 = \alpha R_0/(M_0 c_0)$ , где  $\alpha$  — эмпирический коэффициент. Параметр  $\alpha$  определялся из расчетных данных, приведенных на фиг. 5; в случае  $M = 0,5$  для максимальных значений плотности  $\alpha = 1,63$ , для минимальных значений плотности  $\alpha = 2,36$ .

Таким образом, уровень разрежения газа, обтекающего периодически действующий источник энерговыделения, можно оценить по формуле

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \frac{\alpha R_0 Q_0 (\gamma - 1) \rho_0}{M_0 c_0 T_0 \rho_0 \gamma} \right]^{-1}, \quad 1,63 \leq \alpha \leq 2,36 \quad (9)$$

Значения, полученные по формуле (9), согласуются с результатами расчетов задачи (1), (4)—(6) с точностью 5—10% в рассмотренной области определяющих параметров задачи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский О. М., Грудницкий В. Г., Прохорчук Ю. А. Разностная схема второго порядка точности на минимальном шаблоне для гиперболических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 1. С. 119—126.
2. Калиткин Н. Н., Ширков П. Д., Родионов И. Д. и др. Пакет программ для расчета термодинамических и переносных свойств плазмы // Отчет ИПМ АН СССР. 1985. № 4, 84.

3. Краснобаев К. В., Сюняев Р. А. Расчет обтекания рентгеновского источника звездным ветром//Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 106—111.
4. Кучеров А. Н. Двумерные нестационарные течения газа при слабом подводе энергии//Уч. зап. ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 4. С. 18—28.
5. Краснобаев К. В. Сверхзвуковое обтекание слабых источников излучения//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 133—136.
6. Грудницкий В. Г., Рыгалин В. Н. Расчет течения газа в зоне энерговыделения при цилиндрическом взрыве//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 2. С. 413—422.

Москва

Поступила в редакцию  
4.XI.1993