МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1995

УДК 532.595

 М. Г. САЛЬНИКОВА, В. А. САМСОНОВ

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ШАРЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ НЬЮТОНОВСКОГО ПРИТЯЖЕНИЯ

Построено приближенное решение задачи о приливном течении в слое вязкой тяжелой жидкости, покрывающей твердый шар, который вращается и движется по круговой орбите в центральном ньютоновском поле. Дана оценка момента сил приливного трения.

В классической теории приливов [1, гл. VIII] существует частная задача о приливных волнах в океане, покрывающем вращающийся шар. Представляет интерес выявление в таких условиях роли вязкости, поскольку именно с ней связано влияние прилива на вращение шара. С этой целью рассмотрим модельную задачу об относительном течении слоя вязкой тяжелой несжимаемой жидкости, находящейся на поверхности вращающегося шара, который совершает движение в центральном поле ньютоновского притяжения.

Ниже определены течение жидкости, форма ее свободной поверхности и величина тормозящего момента, действующего со стороны жидкости на шар.

1. Постановка задачи. Пусть твердый шар радиуса R_0, покрытый сплошным слоем вязкой тяжелой несжимаемой жидкости (m, ρ, ν — соответственно масса шара с жидкостью, плотность жидкости и коэффициент кинематической вязкости) и материальная точка O массы M, находящаяся на расстоянии R от шара, движутся под действием взаимного гравитационного притяжения, определяемого законом Ньютона, по круговым орбитам с постоянной угловой скоростью ω вокруг общего центра масс. Кроме того, шар вместе с жидкостью вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг своей оси симметрии, перпендикулярной плоскости орбиты.

Рассмотрим задачу об установившемся относительном движении жидкости на шаре. Для описания движения введем орбитальную систему координат x, y, z с началом в центре O_1 шара, ось x которой направлена по линии OO_1, ось y — по касательной, а ось z — по нормали к плоскости орбиты. Движение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса. В качестве характерных величин длины, времени и плотности выберем R_0, Ω^{-1}, ρ. В сферической системе координат r, θ, φ уравнения движения жидкости для безразмерных компонент u, v, w относительной скорости $\mathbf{v}$ имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{w}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v^2}{r}-\frac{w^2}{r}-2\,(1+k\mathrm{E}^{1/2})\,w\sin\theta=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\ldots\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{w}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{uv}{r}-\frac{w^2}{r}\operatorname{ctg}\theta-$$

$$-2(1+kE^{1/2})\,w\cos\theta = -\frac{\partial P}{r\partial\theta} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dots\right)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{w}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{uv}{r} + \frac{uw}{r}\operatorname{ctg}\theta + \tag{1.1}$$

$$+ 2(1+kE^{1/2})\,v\sin\theta + 2(1+kE^{1/2})\,v\cos\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dots\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + 2\frac{u}{r} + \frac{v\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0$$

$$P = p - \frac{1}{2}(1+kE^{1/2})^2 r^2\sin\theta^2 - \frac{1}{2}E\,(3\sin^2\theta\cos^2\varphi - 1)\,r^2 + \frac{1}{\varepsilon}r$$

$$\varepsilon = \frac{\Omega^2 R_0}{g},\quad E = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{GM}{\Omega^2 R^3},\quad \frac{1}{\mathrm{Re}} = \frac{\nu}{\Omega R_0^2},\quad k = \sqrt{1+\frac{m}{M}}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, G — гравитационная постоянная.

Течение жидкости определяется взаимодействием нескольких факторов, часть из которых явно отражена в уравнениях (1.1). К числу объемных сил относятся кориолисовы силы инерции, выраженные теми членами уравнений (1.1), которые содержат коэффициент $1 + kE^{1/2}$. Другие объемные силы потенциальны и входят в выражения для модифицированного давления P: второе слагаемое — потенциал центробежных сил инерции от собственного вращения шара; третье — потенциал разности силы притяжения к точке O и центробежной силы инерции орбитального движения; последнее слагаемое — потенциал силы тяжести.

Вязкость вовлекает жидкость во вращение вместе с шаром через естественное условие прилипания на твердой стенке $v = 0$ при $r = 1$. Это вращение не может быть «твердотельным», поскольку зависимость давления P от широтной координаты φ приводит к образованию так называемых приливных горбов на свободной поверхности жидкости.

На свободной поверхности жидкости должны выполняться известные кинематические условия и условия непрерывности напряжений. Для того чтобы их записать в наиболее удобном виде, необходимо произвести градацию параметров задачи.

Пусть шар не вращается и $R \to \infty$. Тогда, очевидно, свободная поверхность представляет собой сферу радиуса $R_1 = 1 + \delta$ (δ — относительная толщина слоя жидкости). Пусть теперь шар совершает только собственное вращение, но центробежная сила инерции значительно меньше силы тяжести. Тогда свободная поверхность имеет вид $r = R_1 + \zeta_1(\theta)$, где $\zeta_1(\theta)$ характеризует сплюснутость слоя жидкости на шаре, причем $\zeta_1 \sim \varepsilon$. Таким образом, ε — один из малых параметров задачи.

Величина приливных горбов связана с параметром E, определяющим амплитуду широтной модуляции давления P. Выбором достаточно большого значения радиуса R орбиты назначаем E вторым малым параметром задачи, который не зависит от ε. Кроме того, положим для определенности, что $E \ll \varepsilon$.

Решение строим в виде разложений по параметрам ε и E, считая свободную поверхность представляемой в виде $r = R_1 + \zeta(\theta, \varphi)$, где $\zeta \sim \varepsilon$. Это позволяет «снести» граничные условия со свободной поверхности на сферу $r = R_1$.

$$-P - \tfrac{1}{2}R_1^2\sin^2\theta - kE^{1/2}R_1^2\sin^2\theta - \tfrac{1}{2}E\,(3\sin^2\theta\cos^2\varphi + k^2\sin\theta - 1)\,R_1^2 -$$

$$- R_1\zeta\sin^2\theta - 2kE^{1/2}R_1\sin^2\theta - E\,(3\sin^2\theta\cos^2\varphi + k^2\sin^2\theta - 1) +$$

$$+\frac{R_1^2}{\varepsilon}+\frac{R_1\zeta}{\varepsilon}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(2\frac{\partial u}{\partial r}+\ldots\right)+O(\varepsilon^2\mathrm{E})=0$$

$$\frac{2}{R_1}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{2}{R_1}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}u-2\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{R_1\sin^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{R_1\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta}{R_1\sin^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}w-\frac{\partial u}{\partial\theta}-R_1\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\zeta}{R_1}\frac{\partial u}{\partial\theta}+$$

$$+v-\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}-R_1\zeta\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\frac{\zeta v}{R_1}+\zeta\frac{\partial v}{\partial r}+O(\varepsilon^2\mathrm{E})=0 \qquad (1.2)$$

$$\frac{2}{R_1\sin^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{2}{R_1\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}u+\frac{2\cos\theta}{R_1\sin^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}v-\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial r}-$$

$$-R_1\frac{\partial w}{\partial r}-R_1\zeta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\zeta}{R_1\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{\zeta}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi}+$$

$$+w-\frac{\zeta}{R_1}w+\zeta\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{R_1\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{w\,\mathrm{ctg}\,\theta}{R_1}+O(\varepsilon^2\mathrm{E})=0$$

$$2R_1^2u+2R_1^2\frac{\partial u}{\partial r}\zeta+4R_1\zeta u-v\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}-\frac{w}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}-R_1\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}-\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}+O(\varepsilon^2\mathrm{E})=0$$

Задача состоит в определении относительного течения жидкости, формы $\zeta(\theta,\varphi)$ свободной поверхности и величины тормозящего момента сил, действующего на шар со стороны жидкости.

2. Представление решения в виде рядов по степеням параметров ε и E. Будем искать решение в виде отрезка ряда

$$v=\varepsilon v_1+\varepsilon\mathrm{E}^{1/2}v_{11}+\varepsilon\mathrm{E}v_{12}+\varepsilon^2\mathrm{E}^{1/2}v_{21}+\varepsilon^2\mathrm{E}v_{22}+\ldots$$

$$\zeta=\varepsilon\zeta_1+\varepsilon\mathrm{E}^{1/2}\zeta_{11}+\varepsilon\mathrm{E}\zeta_{12}+\varepsilon^2\mathrm{E}^{1/2}\zeta_{21}+\varepsilon^2\mathrm{E}\zeta_{22}+\ldots \qquad (2.1)$$

Нулевое приближение по E (вообще говоря, в любом приближении по ε) соответствует случаю стационарного собственного вращения шара в жидкостью как одного целого. Очевидно, что в этом случае $v_1=0$. Из первого условия (1.2), учитывая условие сохранения объема жидкости, найдем для первого приближения по ε

$$\zeta_1=\tfrac{1}{2}R_1(\sin^2\theta-\tfrac{2}{3}) \qquad (2.2)$$

Отсюда можно найти ограничение снизу на толщину слоя δ, чтобы не было разрыва слоя на полюсах.

При $\varepsilon\mathrm{E}^{1/2}$ в силу однородных условий получаем $v_{11}=0$. Отклонение ζ_{11} определяется аналогично, как и для предыдущего приближения

$$\zeta_{11}=R_1(\sin^2\theta-\tfrac{2}{3}) \qquad (2.3)$$

Для приближенной функций v_{ij} и ζ_{ij} будем иметь последовательность линейных краевых задач; в частности, для функций v_{12} и ζ_{12} имеем

$$\frac{\partial u_{12}}{\partial\varphi}-2w_{12}\sin\theta=-\frac{\partial P_{12}}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2u_{12}}{\partial r^2}+\ldots\right)$$

$$\frac{\partial v_{12}}{\partial\varphi}-2w_{12}\cos\theta=-\frac{\partial P_{12}}{r\partial\theta}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2V_{12}}{\partial r^2}+\ldots\right) \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial w_{12}}{\partial \varphi} + 2u_{12}\sin\theta + 2v_{12}\cos\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_{12}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w_{12}}{\partial r^2} + \ldots\right)$$

$$\frac{\partial u_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w_{12}}{\partial \varphi} + 2\frac{u_{12}}{r} + \frac{v_{12}\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0$$

$$r = 1: \quad u_{12} = 0,\ v_{12} = 0,\ w_{12} = 0$$

$$r = R_1: \quad \zeta_{12} - \frac{1}{2}R_1(3\sin^2\theta\cos^2\varphi + k^2\sin^2\theta - 1) = C$$

$$2R_1u_{12} - \frac{\partial \zeta_{12}}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial u_{12}}{\partial \theta} + R_1\frac{\partial v_{12}}{\partial r}v_{12} = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial w_{12}}{\partial r} + \frac{1}{R_1\sin\theta}\frac{\partial u_{12}}{\partial \varphi} - \frac{w_{12}}{R_1} = 0$$

Для упрощения выкладок будем считать, что число Re велико. Тогда система содержит малый параметр $\mu^2 = 1/\mathrm{Re}$ при старших производных.

Решение этой системы строим методом пограничного слоя [2, 3]. Скорость v представим в виде суперпозиции скорости внутреннего течения и скорости в пограничных слоях как в окрестности твердой поверхности шара, так и в окрестности свободной поверхности жидкости, причем каждую из них разложим в ряд по степеням малого параметра μ.

Момент приливного трения вызывается не столько величиной приливных горбов, сколько смещением их максимумов относительно линии OO_1. Поэтому приходится вычислять все разложения вплоть до такого, в котором обнаруживается такое смещение.

3. Разложение по μ. Полагая $\mu = 0$, получим систему уравнений для определения невязкого течения.

Из первого условия (2.5) с учетом сохранения объема жидкости найдем отклонение ζ_{12}° свободной поверхности от сферы

$$\zeta_{12}^\circ = {}^1\!/\!_4\, R_1P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi - {}^1\!/\!_2 R_1\left({}^2\!/\!_3\, k^2 + 1\right)P_2(\cos\theta) \tag{3.1}$$

$$P_2(\cos\theta) = {}^1\!/\!_2(3\cos^2\theta - 1),\ P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$$

где P_2 и P_2^2 — функция Лежандра и присоединенный полином Лежандра.

Из (3.1) видно, что свободная поверхность «вытянуть» вдоль линии OO_1 центров.

Форма свободной поверхности и вид уравнения неразрывности позволяют искать течение в виде

$$u_{12}^\circ = u(r)\sin 2\varphi\sin^2\theta,\ v_{12}^\circ = v(r)\sin 2\varphi\sin\theta\cos\theta \tag{3.2}$$

$$w_{12}^\circ = v(r)\cos 2\varphi\sin\theta + w(r)\cos 2\varphi\sin^3\theta$$

Подставим (3.2) в (2.4) при $\mu = 0$, спроектируем все члены уравнений на сферические функции $\cos 2\varphi\, P_2^2(\cos\theta)$ и $\sin 2\varphi\, P_2^2(\cos\theta)$. Для определения $u(r)$, $v(r)$, $w(r)$ получим систему уравнений

$$14u - 14v - 12w = -21p',\ rw = 7p$$

$$2r(u - v - w) = p,\ ru' + 2u - 2w - 3v = 0$$

Окончательно с учетом граничных условий (2.5) получим

$$u(r) = a\left(r - \frac{1}{r^4}\right),\ v(r) = a\left(r + \frac{2}{r^4}\right) \tag{3.3}$$

$$w(r) = -\frac{2a}{r^4},\ a = -\frac{3}{4}\frac{R_1^4}{R_1^5 - 1}$$

Вихревое течение идеальной жидкости может содержать широтную составляющую вида

$$f(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2}\right) \sin\theta$$

где C_1, C_2 — производные постоянные, значения которых должны определяться при последующем «пристраивании» пограничного слоя. Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае $C_1 = C_2 = 0$.

Для построения решений в пограничных слоях сделаем замены

$$\tau_1 \frac{r-1}{\mu},\ u^1 = \frac{u_{12}^1}{\mu},\ \tau_2 = \frac{R_1 - r}{\mu},\ u^e = \frac{u_{12}^e}{\mu}$$

В окрестности твердой границы из (2.4) при $\mu = 0$ с учетом (3.2), (3.3) имеем

$$\frac{\partial p_{12}^i}{\partial\tau_1} = 0$$

$$\frac{\partial v_{12}^i}{\partial\varphi} - 2w_{12}^i \cos\theta = \frac{\partial^2 v_{12}^i}{\partial\tau_1^2},\ \frac{\partial w_{12}^i}{\partial\varphi} + 2v_{12}^i \cos\theta = \frac{\partial^2 w_{12}^i}{\partial\tau_1^2} \qquad (3.4)$$

$$v_{12}^i(0, \theta, \varphi) = -\frac{21}{256}\pi a \sin 2\varphi\, P_3^2(\cos\theta),$$

$$w_{12}^i(0, \theta, \varphi) = -\frac{5}{32}\pi a \cos 2\varphi\, P_2^2(\cos\theta) \qquad (3.5)$$

$$\tau_1 \to \infty:\ v_{12}^i \to 0,\ w_{12}^i \to 0,\ p_{12}^i \to 0$$

Здесь для функций v_{12}^i и w_{12}^i оставлены только первые ненулевые члены разложения по сферическим функциям. В дальнейшем для простоты и для других функций ограничимся только первыми, отличными от нуля членами разложения в ряды по сферическим функциям.

Из (3.4), (3.5) следует

$$p_{12}^i = 0$$

$$v_{12}^i = \sqrt{7}\,\{a_1 e^{-\alpha_1\tau_1} \sin(2\varphi - \alpha_1\tau_1) - a_2 e^{-\alpha_2\tau_1} \sin(2\varphi - \alpha_1\tau_1)\}\ P_2^2(\cos\theta)$$

$$w_{12}^1 = 5\,\{a_1 e^{-\alpha_1\tau_1} \cos(2\varphi - \alpha_1\tau_1) + a_2 e^{-\alpha_2\tau_1} \cos(2\varphi - \alpha_2\tau_1)\}\ P_2^2(\cos\theta)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{7}}},\ \alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{7}}},$$

$$a_1 = -\frac{\pi}{64}\left(1 + \frac{3\sqrt{7}}{8}\right)a,\ a_2 = -\frac{\pi}{64}\left(1 - \frac{3\sqrt{7}}{8}\right)a$$

Из уравнения неразрывности найдем u_{12}^i

$$u_{12}^i = \mu\left\{b_1 e^{-\alpha_1\tau_1} \cos\left(2\varphi - \alpha_1\tau_1 + \frac{\pi}{4}\right) + b_2 e^{-\alpha_2\tau_1} \cos\left(2v - \alpha_2\tau_1 + \frac{\pi}{4}\right)\right\} P_2^2(\cos\theta)$$

$$b_1 = \left(\frac{15}{512}\pi\right)^2 \frac{69 + 26\sqrt{7}}{\sqrt{2}\,\alpha_1}\frac{R_1^4}{R_1^5 - 1},\ b_2 = \left(\frac{15}{512}\pi\right)^2 \frac{69 - 26\sqrt{7}}{\sqrt{2}\,\alpha_2}\frac{R_1^4}{R_1^5 - 1}$$

Аналогично для пограничных функций вблизи свободной поверхности получаем

$$p_{12}^e = 0$$

$$v_{12}^e = \mu\sqrt{7}\left\{c_1 e^{-\alpha_1\tau_2}\sin\left(2\varphi - \alpha_1\tau_2 - \frac{\pi}{4}\right) - c_2 e^{-\alpha_2\tau_2}\left(2\varphi - \alpha_1\tau_2 - \frac{\pi}{4}\right)\right\} P_2^2(\cos\theta)$$

$$w_{12}^e = \mu 5\left\{c_1 e^{-\alpha_1\tau_2}\sin\left(2\varphi - \alpha_1\tau_2 - \frac{\pi}{4}\right) + c_2 e^{-\alpha_2\tau_2}\left(2\varphi - \alpha_2\tau_2 - \frac{\pi}{4}\right)\right\} P_2^2(\cos\theta)$$

$$u_{12}^e = O(\mu^2)$$

$$c_1 = \frac{3\pi\left(6R_1^5 - \sqrt{7}R_1^5 - 6\sqrt{7} - 11\right)}{\sqrt{2}\cdot 1024\alpha_1(R_1^6 - R_1)},\quad c_2 = \frac{3\pi\left(6R_1^5 - \sqrt{7}R_1^5 + 6\sqrt{7} - 11\right)}{\sqrt{2}\cdot 1024\,\alpha_2(R_1^6 - R_1)}$$

Запишем первое приближение по μ для внутреннего течения. Учитывая в (2.4), (2.5) члены порядка μ, для скорости внутреннего течения и для свободной поверхности получим

$$u_{12}^i = b\left(r - \frac{R_1^5}{r^4}\right)\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\sin^2\theta,\ v_{12}^i = b\left(r + \frac{R_1^5}{r^4}\right)\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\sin\theta\cos\theta$$

$$w_{12}^i = b\left(r + \frac{R_1^5}{r^4}\right)\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\sin\theta - 2b\frac{R_1^5}{r^4}\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\sin^3\theta$$

$$b = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{15\pi}{512}\right)^2\left\{\left(69 + 26\sqrt{7}\right)\sqrt{7 + \sqrt{7}} + \right.$$

$$\left. + \left\{(69 - 26)\sqrt{7}\sqrt{7 + \sqrt{7}}\right\}\frac{R_1^4}{(R_1^5 - 1)^2}\right.$$

$$\zeta_{12}^i = 0$$

Поскольку в этом приближении смещения приливных горбов не произошло, необходимо перейти к следующему члену ряда (2.1), т. е. к v_{21}.

4. Определение второго приближения по ε. Отклонение ζ_{21}° свободной поверхности от сферы найдем из первого граничного условия (1.2), учитывая (2.2) и (2.3)

$$\zeta_{12}^\circ = 2kR_1(\sin^4\theta - 2/3\sin^2\theta + 2/45)$$

В силу однородных граничных условий $v_{21}^\circ = 0$.

Для функций v_{22} и ζ_{22} система уравнений имеет вид (2.4) с граничными условиями

$$r = 1:\ u_{22} = 0,\ v_{22} = 0,\ w_{22} = 0 \tag{5.1}$$

$$r = R_1:\ 2R_1u_{22} - \frac{\partial\zeta_{22}}{\partial\varphi} = f_1(\theta,\varphi),\ -P_{12} + R_1\zeta_{22} = f_2(\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial u_{22}}{\partial\theta} + R_1\frac{\partial v_{22}}{\partial r} - v_{22} = f_3(\theta,\varphi),\ \frac{\partial w_{22}}{\partial r} + \frac{1}{R_1\sin\theta}\frac{\partial u_{22}}{\partial\varphi} - \frac{w_{22}}{R_1} = f_4(\theta,\varphi)$$

$$f_1(\theta,\varphi) = \frac{\zeta_1}{R_1}\frac{\partial\zeta_{12}}{\partial\varphi} - 2R_1\zeta_1\frac{\partial u_{12}}{\partial r} - 4\zeta_4 u_{12} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta}v_{12}$$

$$f_2(\theta,\varphi) = R_1\zeta_{12}\sin^2\theta + 2kR_1\zeta_{11}\sin^2\theta + R_1(3\sin^2\theta\cos^2\varphi + k^2\sin^2\theta - 1)\zeta_1$$

$$f_3(\theta,\varphi) = \frac{2}{R_1}u_{12}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta} - 2\frac{\partial u_{12}}{\partial r}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta} + \frac{\partial u_{12}}{\partial\theta}\frac{\zeta_1}{R_1} - \zeta_1\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial r\,\partial\theta} +$$

$$+\frac{2}{R_1}\frac{\partial v_{12}}{\partial\theta}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta}-R_1\zeta_1\frac{\partial v_{12}}{\partial r^2}-\frac{\zeta_1 v_{12}}{R_1}+\zeta_1\frac{\partial v_{12}}{\partial r}$$

$$f_4(\theta,\varphi)=\frac{\zeta_1}{R_1\sin\theta}\frac{\partial u_{12}}{\partial\varphi}-R_1\zeta_1\frac{\partial^2 w_{12}}{\partial r^2}-\frac{\zeta_1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial r\,\partial\varphi}+\zeta_1\frac{\partial_{12}}{\partial r}-$$

$$-\frac{\zeta_1 w_{12}}{R_1}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta}\frac{\partial w_{12}}{\partial\theta}-\frac{w_{12}}{R_1}\frac{\partial\zeta_4}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{R_1\sin\theta}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_{12}}{\partial\varphi}$$

Для внутреннего течения (при $\mu = 0$) получим формулы (3.2)—(3.3), в которых коэффициент a следует заменить на

$$A=-\frac{3R_1^5+2}{4\,(R_1^5-1)^2}$$

Для свободной поверхности имеем

$$\zeta_{22}{}^\circ=\frac{11R_1^5+7}{42\,(R_1^5-1)}R_1\cos 2\varphi P_2^2(\cos\theta)+f(\theta)$$

$$f(\theta)=\frac{3}{2}R_1(1+2k^2)\sin^4\theta-\frac{1}{2}R_1(3+4k^2)\sin^2\theta+\frac{R_1(7-4k^2)}{15}$$

В этом приближении широтная составляющая вихревого течения также равна нулю.

Для течения в пограничном слое около поверхности шара с учетом найденных приближений получим, как в разд. 3

$$u_{22}^i=\mu\left\{A_1e^{-\alpha_1\tau_1}\cos\left(2\varphi-\alpha_1\tau_1+\frac{\pi}{4}\right)+A_2e^{-\alpha_2\tau_1}\cos\left(2\varphi-\alpha_2\tau_1+\frac{\pi}{4}\right)\right\}P_2^2(\cos\theta)$$

$$v_{22}^i=\sqrt7\,\{B_1e^{-\alpha_1\tau_1}\sin(2\varphi-\alpha_1\tau_1)-B_2e^{-\alpha_2\tau_1}\sin(2\varphi-\alpha_2\tau_1)\}\,P_3^2(\cos\theta)$$

$$w_{22}^i=5\,\{B_1e^{-\alpha_1\tau_1}\cos(2\varphi-\alpha_1\tau_1)+B_2e^{-\alpha_2\tau_1}\cos(2\varphi-\alpha_2\tau_1)\}\,P_2^2(\cos\theta)$$

$$A_1=-75\left(\frac{\pi}{256}\right)^2\frac{69+26\sqrt7}{\sqrt2\,\alpha_1}A,\quad A_2=-75\left(\frac{\pi}{256}\right)^2\frac{69-26\sqrt7}{\sqrt2\,\alpha_2}A$$

$$B_1=-\frac{\pi}{64}\left(1+\frac{3\sqrt7}{8}\right)A,\quad B_2=-\frac{\pi}{64}\left(1-\frac{3\sqrt7}{8}\right)A$$

Около свободной поверхности имеем следующие пограничные функции:

$$u_{22}^e=-\mu\left\{h_1e^{-\alpha_1\tau_2}\cos\left(2\varphi-\alpha_1\tau_2+\frac{\pi}{4}\right)-h_2e^{-\alpha_2\tau_2}\cos\left(2\varphi-\alpha_2\tau_2+\frac{\pi}{4}\right)\right\}P_2^2(\cos\theta)$$

$$v_{22}^e=\{d_1e^{-\alpha_1\tau_2}\sin(2\varphi-\alpha_1\tau_2)+d_2e^{-\alpha_2\tau_2}\sin(2\varphi-\alpha_2\tau_2)\}\,P_3^2(\cos\theta)$$

$$w_{22}^e=\frac{5}{\sqrt7}\{d_1e^{-\alpha_1\tau_2}\cos(2\varphi-\alpha_1\tau_2)-d_2e^{-\alpha_2\tau_2}\cos(2\varphi-\alpha_2\tau_2)\}\,P_2^2(\cos\theta)$$

$$d_1=\pi\left\{5\alpha_2\left(6R_1^5-\sqrt7\,R_1^5+6\sqrt7-11\right)/\alpha_1-\right.$$
$$\left.-9\left(6R_1^5-\sqrt7\,R_1^5-6\sqrt7-11\right)\right\}/\left(2048\sqrt7\,(R_1^5-1)\right)$$

$$d_2=\pi\left\{9\left(6R_1^5-\sqrt7\,R_1^5+6\sqrt7-11\right)-\right.$$
$$\left.-5\alpha_1\left(6R_1^5+\sqrt7\,R_1^5-6\sqrt7-11\right)/\alpha_2\right\}/2048\sqrt7\,(R_1^5-1))$$

$$h_1=75\sqrt2\left(6+\sqrt7\right)\pi d_1/\left(256\sqrt7\,\alpha_1R_1\right)$$

$$h_2 = 75\sqrt{2}\left(6-\sqrt{7}\right)\pi d_2/\left(256\sqrt{7}\,\alpha_2 R_1\right)$$

В первом приближении по μ для функций ζ_{22}^1 из второго условия (5.2) с учетом уже найденных приближений получаем

$$\zeta_{22}^1 = \beta(R_1)\cos(2\varphi - \pi/4)\,P_2^2(\cos\theta),\quad \beta(R_1) = -\,{}^4\!/_7\, bR_1^2$$

Именно в этом приближении наметилось смещение приливных горбов от линии OO_1.

5. Определение тормозящего приливного момента. С оговоренной выше точностью уравнение свободной поверхности жидкости примет вид

$$r = R_1 - \frac{1}{3}\varepsilon R_1 P_2(\cos\theta) - \frac{2}{3}\varepsilon \mathrm{E}^{1/2} k R_1 P_2(\cos\theta) +$$

$$+ \varepsilon\mathrm{E}\left[\frac{1}{4}R_1\cos 2\varphi\, P_2^2(\cos\theta) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}k^2\right)R_1P_2(\cos\theta)\right] +$$

$$+ \varepsilon^2\mathrm{E}\left[\frac{R_1}{45}\,\frac{11R_1^5-7}{R_1^5-1}\cos 2\varphi P_2^2(\cos\theta) + \frac{4}{35}(1+2k^2)\,P_4(\cos\theta) - \right. \tag{5.1}$$

$$\left. - \frac{1}{7}\left(1+\frac{20}{3}k^2\right)P_2(\cos\theta) + \frac{4}{15}(7-6k^2)\right] + \varepsilon^2\mathrm{E}\mu\beta(R_1)\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)P_2^2(\cos\theta)$$

Для определения гидродинамического момента воспользуемся теоремой об изменении момента количеств движения. Жидкость совершает стационарное движение, следовательно, момент ее количеств движения сохраняется, т. е. $-L + M_z = 0$, где L — момент силы трения между жидкостью и поверхностью шара, M_z — момент силы притяжения и центробежной силы (напомним, что их интенсивность имеет порядок Е). После интегрирования по объему жидкости, ограниченному поверхностью (5.1), получим

$$M_z = -\,\mu\varepsilon^2\mathrm{E}^2\gamma(R_1)$$

$$\gamma(R_1) = 12\sqrt{2}\,\pi R_1^4\beta(R_1)/5$$

Отметим, что $M_z \sim \varepsilon^2\mathrm{E}^2$, т. е. имеет более высокий порядок малости, чем построенное решение. Действительно, прямое вычисление L через касательные напряжения на поверхности шара в построенных здесь приближениях приведет, очевидно, к нулевому значению, так как в вихревом течении отсутствует широтная составляющая. Для ее описания необходимо, как и в [4], определить v_{22}. Очевидно, что эта задача требует более громоздких вычислений, чем вычисление по форме свободной поверхности.

В размерном виде для M_z имеем

$$M_z = -\,c\,\frac{\rho\nu^{1/2}G^2M^2R_0^6}{g^2R^6}\,\Omega^{3/2}$$

$$c = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{3}{35}\left(\frac{15}{128}\right)^2\pi^3\left[\left(69+26\sqrt{7}\right)\sqrt{7+\sqrt{7}} + \right.$$

$$\left. + \left(69+26\sqrt{7}\right)\sqrt{7+\sqrt{7}}\,\right]\frac{R_1^{12}}{(R_1^5-1)^2}$$

В отличие от [4] здесь величина момента возрастает с ростом угловой скорости собственного вращения.

Предположим, что планета, имеющая такие же параметры, как и Земля, представляет собой твердый шар, покрытый сплошным слоем воды. Будем считать, что слой воды имеет толщину ~ 3,7 км, что соответствует средней глубине Мирового океана. В этом случае $\varepsilon = 3{,}46 \cdot 10^{-3}$, $\mu = 1{,}84 \cdot 10^{-8}$. Считаем также, что масса гравитационного центра, имеющего характеристики Солнца, значительно больше массы планеты, т. е. $M \gg m$. В этом случае $E = 7{,}4 \cdot 10^{-6}$. Воспользовавшись формулой (6.2), получим тормозящий момент, создаваемый слоем воды

$$M_z = -1{,}53 \cdot 10^{19} \text{ дин} \cdot \text{см}$$

Для системы типа Луна — Земля $E = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$. Тормозящий момент тогда будет равен

$$M_z = -7{,}6 \cdot 10^{19} \text{ дин} \cdot \text{см}$$

т. е. примерно в 5 раз больше, чем в предыдущем случае, как и следовало ожидать.

Авторы благодарны А. А. Бармину за указание некорректности в первоначальном варианте приближенного решения и Российскому фонду фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01547) за финансовую поддержку работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., 1968. 230 с.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром//Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3—122.
4. *Ждан Л. А., Самсонов В. А.* О движении двух вязких несмешивающихся несжимаемых жидкостей в цилиндре//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 92—99.

Москва

Поступила в редакцию
27.IV.1993