

УДК 532.59:539.3

© 1995 г. А. Е. БУКАТОВ, В. В. ЖАРКОВ

## ВЛИЯНИЕ ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ НА ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Выполнено исследование возмущений свободной и покрытой упругой пластиной поверхности бассейна, обусловленных проявлением внутренних волн при равномерном движении источника постоянной интенсивности в экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины. Рассмотрена зависимость пространственного распределения возмущений от характеристик пластины, скорости перемещения и глубины погружения источника.

Генерация волновых движений перемещающимся источником изучалась в [1—4] для неоднородной жидкости со свободной поверхностью. В случае бассейна с плавающей пластиной рассматривались внутренние волны, возбуждаемые перемещающейся областью поверхностных давлений [5, 6] или действующим на заданной глубине неподвижным источником переменной интенсивности [7, 8].

1. Пусть на поверхности идеальной несжимаемой непрерывно статифицированной жидкости конечной глубины  $H$  плавает тонкая упругая изотропная пластина. В слое жидкости на глубине  $z_0$  перемещается горизонтально с постоянной скоростью  $U$  источник интенсивности  $Q$ . Рассмотрим обусловленные проявлением генерируемых внутренних волн возмущения поверхности бассейна и оценим влияние на них плавающей упругой пластины.

В системе координат, связанной с движущимся источником, в приближении Буссинеска поле возмущений жидкости описывается уравнением с граничными условиями:

$$\left[ U^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + N^2(z) \Delta \right] \zeta^* = UQ \delta_x(x) \delta(y) \delta_z(z - z_0) \quad (1.1)$$

$$U^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial z} - g \left( D_1 \Delta^2 + 1 + \kappa_1 U^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Delta \zeta = 0, \quad z^* = H \quad (1.2)$$

$$\zeta^* = 0, \quad z^* = 0 \quad (1.3)$$

$$D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho_0(H)g}, \quad \kappa_1 = \frac{\rho h}{\rho_0(H)g}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$N^2(z) = -g\rho_0(z) \frac{\partial \rho_0}{\partial z}$$

Здесь  $z^* = 0$  — дно бассейна,  $z^* = H$  — невозмущенная поверхность,  $\rho_0(z)$  — распределение невозмущенной плотности жидкости по вертикали,  $E, \nu, \rho, h$  — модуль нормальной упругости, коэффициент Пуассона, плотность и толщина пластины,  $\zeta$  — возвышение поверхности бассейна,  $\zeta^*$  — смещение заданной изопикнической поверхности  $z^*$ , связанное с вертикальной скоростью лежащих на ней частиц жидкости соотношением  $w = U\zeta_x^*$ . Отметим, что  $\zeta^* = \zeta$  для  $z^* = H$ .

Применяя для решения задачи (1.1) — (1.3) комплексное преобразование Фурье по горизонтальным координатам, получим выражение

$$\zeta^* = \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_l^* \quad (1.4)$$

$$\zeta_l^* = \frac{iQU}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{m\omega_l^2(r) \varphi_l(z^*, r) \exp[i(mx + ny)]}{r^2 [\omega_l^2(r) - m^2U^2]} \frac{\partial \varphi_l}{\partial z} \Big|_{z=H-z_0} dm dn + O(\varepsilon\varphi_l)$$

Здесь  $\varphi_l(z, r)$  — собственные функции,  $\omega_l(r)$  — собственные числа задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial z^2} + r^2 \left[ \frac{N^2}{\omega_l^2(r)} - 1 \right] \varphi_l = 0 \quad (1.5)$$

$$\omega_l^2 \frac{\partial \varphi_l}{\partial z} - r^2 g (D_0 - \kappa_l \omega_l^2) \varphi_l = 0, \quad z = H; \quad \varphi_l = 0, \quad z = 0 \quad (1.6)$$

$$D_0 = D_1 r^4 + 1, \quad r^2 = m^2 + n^2, \quad \varepsilon = 1 - \rho_0(H) \rho_0^{-1}(0)$$

Влияние внутренних волн на формирование возмущений поверхности бассейна рассмотрим в предположении, что скорость  $U$ , оставаясь меньшей минимума фазовой для свободных изгибно-гравитационных поверхностных волн, не превышает  $(\varepsilon g H)^{1/2}$  по порядку величины. Тогда, подставив  $\varphi_l$ , выраженное из граничного условия (1.6) при  $z^* = H$ , в формулу (1.4) и перейдя к безразмерным переменным

$$\{r', m', n'\} = \{r, m, n\} H, \quad \cos \theta = \frac{m}{r}, \quad \sin \theta = \frac{n}{r}$$

$$\{x', y', z', \zeta', (\zeta^*)', \zeta_l', (\zeta_l^*)'\} = \{x, y, z, \zeta, \zeta^*, \zeta_l, \zeta_l^*\} \frac{1}{H}$$

$$(R')^2 = (x')^2 + (y')^2, \quad x' = R' \cos \gamma, \quad y' = R' \sin \gamma$$

$$D_1' = \frac{D_1}{H^4}, \quad \kappa_1' = \kappa_1 \frac{g}{H}, \quad f = \frac{U}{\sqrt{\varepsilon g h}}$$

$$\varphi_l' = \varphi_l \sqrt{\varepsilon g}, \quad Q' = \frac{Q}{H^2 \sqrt{gH}}, \quad \rho_0'(z') = \frac{\rho_0(z'H)}{\rho_0(H)}$$

$$\{N', \omega_l'\} = \{N, \omega_l\} \sqrt{\frac{H}{\varepsilon g}}$$

в полярной системе координат получим

$$\zeta = \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_l + O\left(\varepsilon^{3/2} \frac{d\varphi_l}{dz} \Big|_{z=1}\right), \quad \lambda = Rr \cos(\theta - \gamma)$$

$$\zeta_l = \frac{i\varepsilon^{1/2}}{4\pi^2} f Q \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{\omega_l^4 \exp(i\lambda) \cos \theta}{r^2 D_0 [\omega_l^2 - (rf \cos \theta)^2]} \frac{\partial \varphi_l}{\partial z} \Big|_{z=1} \frac{\partial \varphi_l}{\partial z} \Big|_{z=1-z_0} dr d\theta \quad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем штрихи опущены.

Так как  $\partial\varphi_l/\partial z$  при фиксированном  $r$  достигают локальных экстремумов в окрестности  $z=1$ , то  $\omega_l$  и  $\varphi_l$  в выражении (1.7) можно считать собственными числами и функциями задачи, характеризуемой уравнением (1.5) с нулевыми по  $\varphi_l$  граничными условиями. Допускаемая при этом погрешность включается во второе слагаемое выражения (1.7). Туда же входит и поправка, вносимая учетом сил инерции пластины.

Ограничившись рассмотрением экспоненциальной плотностной модели ( $N^2 = \text{const} = 1$ ), найдем

$$\zeta_l = \varepsilon^2 \pi Q f l^2 \cos [\pi l (1 - z_0)] \sum_{j=1}^4 I_{jl} \quad (1.8)$$

$$I_{1l} = -i D_1 \int_0^\infty dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{\lambda} \cos \theta}{D_0 \Phi_{0l}(\theta)} \Phi_{1l}(\theta) d\theta, \quad I_{2l} = i D_1^2 \int_0^\infty dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2 e^{\lambda} \cos \theta}{D_0 \Phi_{0l}(\theta)} \Phi_{2l}(\theta) d\theta$$

$$I_{3l} = i \int_0^\infty dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{\lambda} \cos \theta \Phi_{3l}(\theta)}{\Phi_{0l}(\theta) [r^2 + (\pi l)^2]} d\theta, \quad I_{4l} = -i \int_0^\infty dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{\lambda} \cos \theta \Phi_{4l}(\theta)}{\Phi_{0l}(\theta) (r^2 + r_l^2)} d\theta$$

$$\Phi_{0l} = D_1 \Phi_{2l}^2 + \Phi_{1l}^2, \quad \Phi_{1l} = D_1 (\pi l)^2 t_l - (f \cos \theta)^2, \quad \Phi_{2l} = 2t_l + 1,$$

$$\Phi_{3l} = D_1 t_l^2 + (f \cos \theta)^4, \quad \Phi_{4l} = (f \cos \theta)^4 [D_1 (nl)^4 + 1]$$

$$t_l = (\pi l f \cos \theta)^2 - 1, \quad r_l^2 = (f \cos \theta)^{-2} t_l$$

Интегралы  $I_{1l}$  и  $I_{2l}$  обусловлены изгибной жесткостью пластины. Для бассейна с открытой поверхностью они отсутствуют, а  $\zeta_l$  определяют  $I_{3l}$ ,  $I_{4l}$  при  $D_1 = 0$ . Подынтегральные выражения в  $I_{jl}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , не имеют особенностей на пути интегрирования по  $r$  и реальные части  $I_{jl}$  приводятся к виду

$$I_{1l} = D_1^{3/4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\Phi_{0l}(\theta)} \Phi_{1l}(\theta) \chi_1(\lambda_0) d\theta, \quad I_{2l} = -D_1^{5/4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\Phi_{0l}(\theta)} \Phi_{2l}(\theta) \chi_2(\lambda_0) d\theta$$

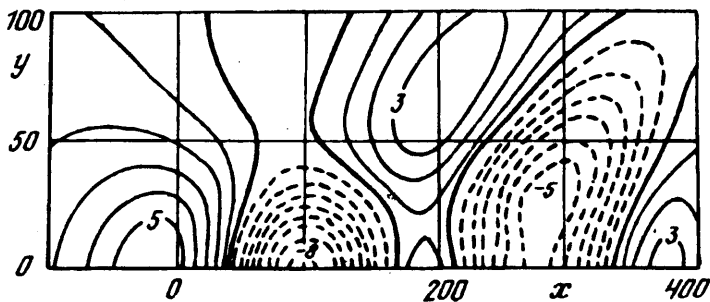
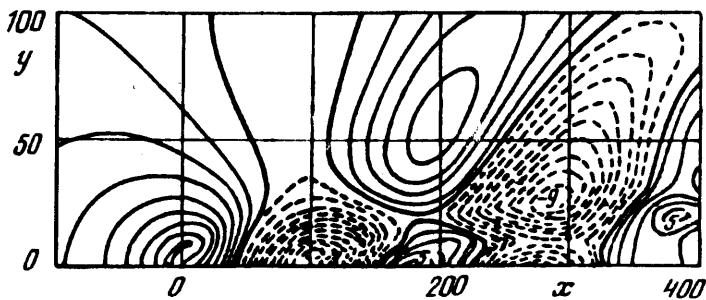
$$I_{3l} = -\frac{1}{\pi l} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\Phi_{0l}(\theta)} \Phi_{3l}(\theta) \chi_3(\lambda_{1l}) d\theta \quad (1.9)$$

$$\chi_1(s) = \int_0^\infty \frac{\sin(\mu s)}{\mu^4 + 1} d\mu, \quad \chi_2(s) = \int_0^\infty \frac{\mu^2 \sin(\mu s)}{\mu^4 + 1} d\mu, \quad \chi_3(s) = \int_0^\infty \frac{\sin(\mu s)}{\mu^2 + 1} d\mu$$

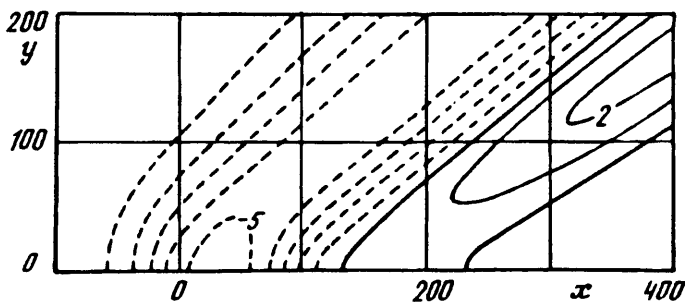
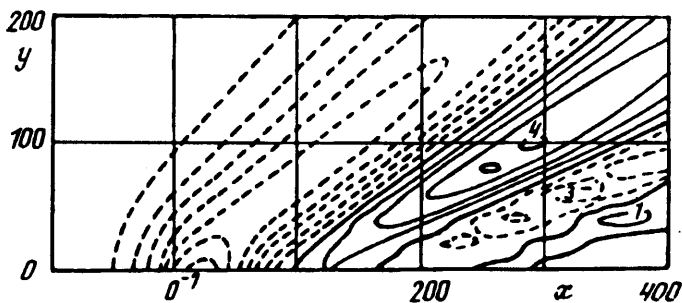
$$\lambda_0 = R D_1^{-1/4} \cos(\theta - \gamma), \quad \lambda_{1l} = \pi R l \cos(\theta - \gamma)$$

Не имеет особенностей по  $r$  и  $I_{4l}$ , если  $r_l^2 > 0$ . В этом случае

$$I_{4l} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\Phi_{0l}(\theta)} \Phi_{4l}(\theta) \frac{\chi_3(\lambda_{2l})}{|r_l|} d\theta \quad (1.10)$$

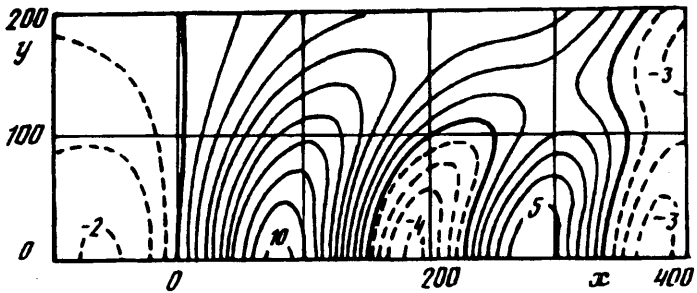
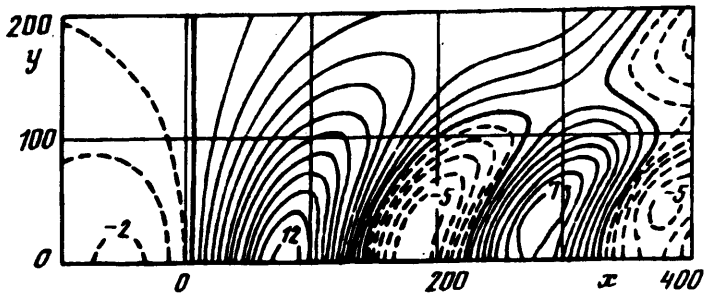


Фиг. 1

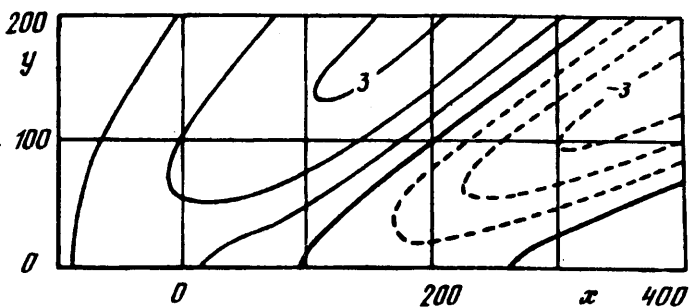
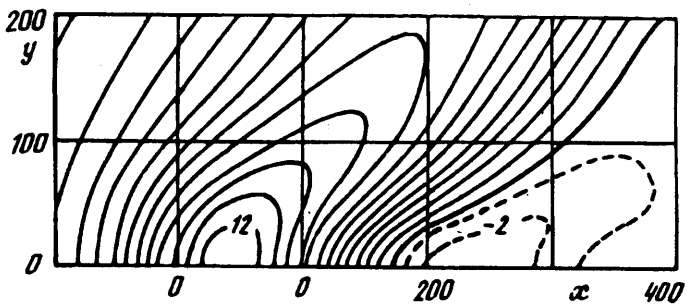


Фиг. 2

При  $r_1^2 \leq 0$  в  $I_{41}$  возникают особенности в точках  $r = r_1^*$ , где  $r_1^* = |r_1|$ . Деформируем путь интегрирования в контур  $L$ , обходящий  $r_1^*$  по малым полуокружностям снизу в комплексной плоскости с разрезом  $(-\infty; 0]$ . Такое направление обхода обеспечивает выполнение условия излучения.



Фиг. 3



Фиг. 4

Применив метод контурного интегрирования с учетом условия  $\text{Re}(i\lambda) \leq 0$ , обеспечивающего затухание возмущений при  $R \rightarrow \infty$ , получим

$$I_{Ml} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\Phi_{0l}(\theta)} \Phi_{Ml}(\theta) \frac{B(\lambda_{2l}, \theta)}{|r_l|} d\theta \quad (1.11)$$

$$B(\lambda_2, \theta) = \chi_4(\lambda_2), \quad \theta \leq (\gamma - \pi/2)$$

$$B(\lambda_2, \theta) = \pi \cos(\lambda_2) - \chi_4(\lambda_2), \quad \theta > (\gamma - \pi/2)$$

$$\chi_4(s) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\mu s)}{\mu^2 + 1} d\mu = [\text{Ci}(s) + C] \sin s + \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(s) \right] \cos s$$

Здесь  $\text{Ci}(s)$ ,  $\text{Si}(s)$  — интегральные косинус и синус [9],  $C$  — постоянная Эйлера, а неоднозначность выбора ветви интегрального косинуса устраняется наличием разреза.

Таким образом, исследование трехмерных возмущений поверхности бассейна, обусловленных внутренними волнами, образующимися при движении на заданной глубине экспоненциально стратифицированной жидкости источника постоянной интенсивности, сводится к вычислению интегралов (1.9) — (1.11) по  $\theta$ . Содержащиеся в подынтегральных выражениях функции  $\chi_j$  можно вычислять при любых значениях их аргумента  $s$ . Отметим, что  $\chi_1(0) = \chi_2(0) = \chi_3(0) = 0$ . Для больших значений  $s$  методом интегрирования по частям можно получить асимптотические разложения

$$\chi_1(s) = \frac{1}{s} \left[ 1 - \frac{24}{s^4} \left( 1 - \frac{1680}{s^4} + O\left(\frac{1}{s^8}\right) \right) \right]$$

$$\chi_2(s) = -\frac{2}{s^3} \left[ 1 - \frac{360}{s^4} \left( 1 - \frac{5040}{s^4} + O\left(\frac{1}{s^8}\right) \right) \right]$$

$$\chi_3(s) = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{2}{s^2} \left[ 1 + \frac{12}{s^2} \left[ 1 + \frac{30}{s^2} \left( 1 + \frac{56}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^4}\right) \right) \right] \right] \right\}$$

погрешность которых при  $s \geq 8$  не превышает 2%. Свойства функции вида  $\chi_4$  рассмотрены в [3].

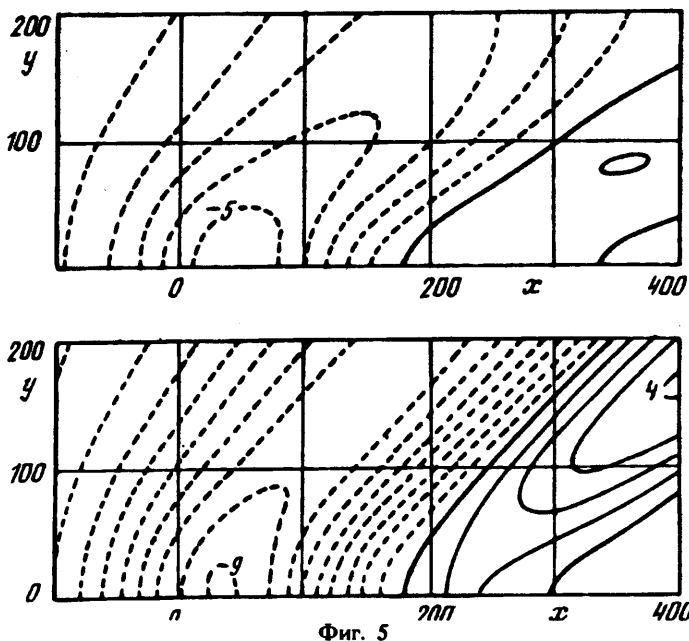
Если  $f \neq f_l$ , то подынтегральные выражения в (1.9) — (1.11) могут иметь только интегрируемые особенности в точках  $\theta_l = \pm \arccos[(\pi l f)^{-1}]$ . Здесь  $f_l = (\pi l)^{-1}$  — критическое значение числа Фруда для моды с номером  $l$ .

Так как  $\zeta_l$  с ростом  $l$  убывают как  $l^{-2}$ , то ряд (1.7) сходящийся. Это позволяет вычислять  $\zeta$  с заданной точностью путем учета необходимого числа мод внутренних волн.

2. Количественный анализ зависимости проявлений внутренних волн на поверхности бассейна от скорости перемещения источника, глубины его погружения и характеристик пластины проводился при  $Q = 100 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $H = 100 \text{ м}$ ,  $\rho_0(H) = 1,02 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ . Рассматривалась ледяная пластина с физическими параметрами [10, 11]  $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\nu = 0,34$ ,  $\rho = 0,87 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ . Ее толщина полагалась равной 0 и 2 м. Источник перемещался со скоростью 0,7 и 1,2 м · с<sup>-1</sup> на глубинах 1; 12,5; 25; 37,5; 50; 62,5; 75; 87,5 и 99 м. Эти значения выбирались таким образом, чтобы прослеживались структурные изменения картины возмущений. Отметим, что скорость 0,7 м · с<sup>-1</sup> является докритической для первой моды и сверхкритической для всех последующих, а значение 1,2 м · с<sup>-1</sup> сверхкритическое для всех мод внутренних волн.

При вычислении  $\zeta$  в (1.7) учтен вклад 18 мод, если поверхность бассейна открытая, и 10 мод при наличии ледяной пластины. Такой выбор числа суммируемых мод в силу улучшения сходимости ряда за счет изгибной жесткости пластины обеспечивает одинаковую погрешность счета при  $h = 0$  и 2 м.

Иллюстрации топографий трехмерных возмущений поверхности бассейна за счет проявлений внутренних волн, возбуждаемых движущимся со скоростью 0,7 м · с<sup>-1</sup> источником, приведены на фиг. 1—3 при глубинах погружения источника 12,5; 50; 87,5 м соответственно. Верхние картины даны для  $h = 0$ , а нижние — для  $h = 2$  м. Топографии возмущений, соответствующие случаю  $U =$



Фиг. 5

$=1,2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , приведены при  $h=2 \text{ м}$  на фиг. 4, 5. Верхние и нижние картины на фиг. 4 отвечают глубинам погружения источника 12,5 и 37,5 м, на фиг. 5 — 62,5 и 87,5 м. В силу симметрии возмущений относительно трассы перемещения источника топографии на фигурах приведены только для  $y \geq 0$ . Штриховыми кривыми изображены изолинии на впадинах, а сплошными — на поднятиях. Шкала делений по координатным осям дана в метрах, а отклонения изолиний от невозмущенного уровня, представленного сплошными толстыми кривыми, — в миллиметрах.

Анализ результатов численных расчетов показал, что над источником, движущимся на малой глубине с докритической для первой моды скоростью, образуется локализованное поднятие поверхности бассейна. За поднятием, вершина которого отстает от источника, образуется впадина. Локальное углубление заметно и на первом гребне поперечных корабельных волн. Оно разделяет симметрично расположенные относительно трассы возвышения. На большем удалении от источника заметны возмущения, формируемые и поперечными, и продольными волнами с преобладающим для рассматриваемого значения  $U$  вкладом поперечных. Увеличение скорости перемещения источника ослабляет этот вклад.

При погружении источника на большую глубину высота ближайшего к нему поднятия поверхности бассейна уменьшается, а в формировании волнового следа усиливается роль продольных волн. Убывает при этом и глубина разделяющей впадины на первом гребне поперечных волн. Точки максимальной высоты локального поднятия и глубины впадины над трассой смещаются к источнику. В окрестности  $z = H/4$  первое поднятие над трассой практически исчезает, а точка максимальной глубины впадины располагается почти над источником. На месте разделяющего первый гребень углубления образуется холм. Для источника, движущегося в окрестности глубины  $H/2$ , этот холм трансформируется в вершину угловой зоны продольных корабельных волн. Вклад поперечных волн на этих глубинах практически отсутствует. При дальнейшем увеличении  $z_0$  первая над трассой впадина опережает источник, а в следе за ним усиливается вклад поперечных волн, высота гребней которых монотонно убывает с удалением от

трассы. Амплитуды возмущений в следе слабо зависят от глубины погружения источника, несмотря на существенные структурные изменения их пространственного распределения.

При сверхкритическом значении скорости перемещения источника увеличение глубины его погружения приводит качественно к тем же деформациям первого по трассе возвышения и следующей за ним впадины, что и в докритическом для первой моды диапазоне. Экстремальные точки этих отклонений поверхности с ростом скорости отстают от источника. Возмущения в следе формируются только продольными корабельными волнами, вершина угловой зоны которых приближается к источнику с ростом  $z_0$ .

Плавающая упругая пластина не вносит качественных изменений в структуру поверхностных проявлений генерируемых источником возмущений. Вместе с тем за счет изгибной жесткости пластины происходит уменьшение амплитудных значений деформаций поверхности бассейна как непосредственно над источником, так и в следе за ним. При этом проявления поперечных волн подвергаются меньшему воздействию жесткости пластины, чем продольных и возмущений вблизи источника. В целом увеличение жесткости пластины сглаживает ее изгибные колебания, обусловленные проявлением внутренних волн.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стурова И. В. Внутренние волны, возникающие в экспоненциально стратифицированной жидкости при произвольном движении источника//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 67—74.
2. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 9. С. 954—961.
3. Санников В. Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости//Теор. исслед. волновых процессов в океане. Севастополь: 1983. С. 68—76.
4. Боровиков В. А., Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Левченко Е. С. О расчете поля внутренних гравитационных волн, генерируемых неподвижным источником в потоке стратифицированной жидкости//ПМТФ. 1989. № 4. С. 58—61.
5. Schulkes R. M. S. M., Hosking R. J., Sneyd A. D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2//J. Fluid Mech. 1987. V. 180. P. 297—318.
6. Букатов А. Е., Жарков В. В. Генерация трехмерных внутренних волн движущейся по плавающему льду областью давлений//Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1992. Т. 28. № 4. С. 416—423.
7. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Влияние ледяного покрова на развитие внутренних волн от периодических возмущений//Мор. гидрофиз. исслед. 1976. № 4. С. 5—16.
8. Букатов А. Е., Соломаха Т. А. Влияние вязкости снега на вынужденные изгибно-гравитационные волны в бассейне со скачком плотности//Мор. гидрофиз. журн. 1991. № 4. С. 16—21.
9. Справочник по специальным функциям//Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
10. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
11. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 384 с.

Севастополь

Поступила в редакцию  
10.XI.1993