

УДК 532.59

© 1995 г. Д. В. МАКЛАКОВ

## ОБТЕКАНИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ С ОБРАЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ

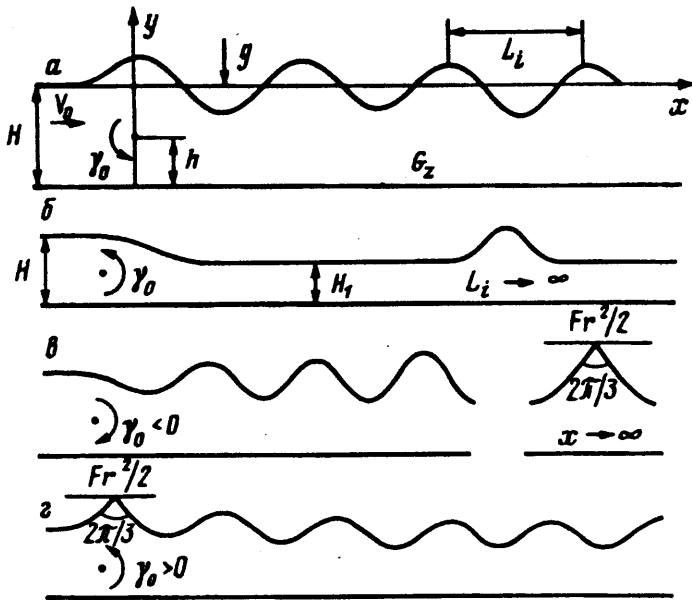
Предлагается численно-аналитический метод расчета докритического обтекания препятствия, основанный на выделении в искомым функциях асимптотики поведения волнового цуга. Метод позволяет производить расчеты как крутых, так и длинных волн. Эффективность метода продемонстрирована для задачи об обтекании вихря. Введено понятие предельного режима обтекания как режима с максимальным значением параметра возмущения, при котором еще существует стационарное течение. Дан анализ различных типов предельных режимов, полученных при расчетах.

Исследование в точной постановке стационарных задач обтекания препятствий под свободной поверхностью весомой жидкости в докритическом режиме отличается особой сложностью ввиду образования цуга нелинейных волн вниз по потоку. К настоящему времени рядом авторов разработаны методы решения подобных задач (см. работы [1—4]). В этих статьях цуг нелинейных волн учитывается за счет выбора достаточно длинного расчетного участка за обтекаемым телом, на котором должно уместиться 4—5 периодов волн. Однако такой подход приводит к значительным вычислительным трудностям, если генерируемые препятствием волны имеют большую длину, ввиду катастрофического удлинения расчетного интервала.

Основная особенность предлагаемого в данной работе метода состоит в выделении в искомым функциях асимптотики поведения решения на бесконечности. Полученная система интегральных уравнений в явном виде содержит три параметра, определяющих длину, амплитуду и фазу волн бесконечного цуга. Выведены дополнительные условия для определения этих параметров. Это позволяет производить расчет как очень длинных, так и очень крутых волн, генерируемых препятствием. В статье метод применяется к задаче об обтекании вихря, которая является модельной для задачи о поступательном движении подводного крыла и имеет все характерные особенности последней: за вихрем образуются волны, он обладает подъемной силой и волновым сопротивлением. Метод был применен автором для исследования и других задач (см. [5]).

Введено понятие предельного режима обтекания как режима с максимально возможным значением параметра возмущения, при котором еще существует стационарное течение. Дан анализ различных типов предельных режимов.

1. Постановка задачи. Пусть вихрь интенсивности  $\gamma_0$  обтекается установившимся потенциальным потоком идеальной несжимаемой весомой жидкости,  $H$  — глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности,  $V_0$  — скорость набегающего потока,  $h$  — расстояние от точки расположения вихря до дна (фиг. 1, *a*). Будем искать конформное отображение  $z(t)$  полосы  $G_1$  ( $0 < \eta < \pi/2$ ) параметрической плоскости  $t = \xi + i\eta$  на область течения  $G_2$ . При этом бесконечно удаленным точкам течения соответствуют бесконечно удаленные точки полосы  $G_1$ , образ точки расположения вихря лежит на мнимой оси  $\eta$ ,  $a$  — ордината вихря в параметрической плоскости.



Фиг. 1

Обозначим через  $W$  — комплексный потенциал течения. Тогда

$$W(t) = \frac{2V_0H}{\pi} \left[ t + \frac{\gamma}{4i} \ln \frac{\text{sh}(t - ia)}{\text{sh}(t + ia)} \right], \quad \gamma = \frac{\gamma_0}{V_0H} \quad (1.1)$$

где  $\gamma$  — безразмерная циркуляция вихря.

Функцию  $dz/dt$  будем искать в виде

$$\frac{dz}{dt} = \left( \frac{2}{\pi} \right) H \exp[\chi(t)] \quad (1.2)$$

Для определения аналитической в полосе  $G_1$  функции  $\chi(t)$  и параметра  $a$  ( $0 < a < \pi/2$ ) с помощью (1.1), (1.2) получим краевую задачу [6]

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \frac{2}{\pi Fr^2} \frac{\exp(3\mu)}{f(\xi)} \sin(\tau) + f_0(\xi) \quad \left( \eta = \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.3)$$

$$\text{Im } \chi = 0 \quad (\eta = 0), \quad \chi \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow -\infty) \quad (1.4)$$

$$\text{Im} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp[\chi(t)] dt = \frac{h}{H} \quad (1.5)$$

$$f(\xi) = 1 - \frac{\gamma \sin(2a)}{2 [\text{ch}(2\xi) + \cos(2a)]}, \quad f_0(\xi) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$$

$$\mu(\xi) = \text{Re } \chi \left( \xi + i \frac{\pi}{2} \right), \quad \tau(\xi) = \text{Im } \chi \left( \xi + i \frac{\pi}{2} \right), \quad Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gH}}$$

Здесь  $Fr$  — число Фруда,  $g$  — ускорение силы тяжести. Условие (1.3) — это условие постоянства давлений на свободной поверхности, первое условие (1.4) вытекает из непроницаемости прямолинейного дна, второе — из отсутствия возмущений в потоке слева на бесконечности, соотношение (1.5) обеспечивает заданное расстояние вихря от твердого дна.

Доказательство разрешимости задачи (1.3)—(1.4) при наличии справа на бесконечности цуга нелинейных волн проведено в [6]. Предлагаемый в данной

работе численно-аналитический метод базируется на полученных в [6] результатах, которые сформулируем в виде следующей теоремы.

*Теорема.* Для каждого  $0 < a < \pi/2$ ,  $L > 0$  и достаточно малых  $|\gamma|$  найдутся  $\text{Fr} < 1$  и непрерывная вплоть до границы области  $G$ , аналитическая функция  $\chi(t)$ , удовлетворяющие условиям (1.3)—(1.4), при этом для  $\chi(t)$  существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(t + kL) = \chi^*(t)$$

где  $\chi^*(t)$  — периодическая с периодом  $L$  непрерывная вплоть до границы аналитическая функция. Характер поведения  $\chi(t)$  при больших  $|\xi|$  ( $\xi = \text{Re} t$ ) определяется неравенствами

$$|\chi(t)| \leq \text{const exp}(2\xi) \quad (\xi < 0); \quad |\chi(t) - \chi^*(t)| \leq \text{const exp}(-2\xi) \quad (\xi > 0) \quad (1.6)$$

Величину  $L$  будем называть длиной волны в параметрической плоскости. Следуя условиям сформулированной теоремы, будем а priori предполагать наличие справа на бесконечности цуга нелинейных волн, считая величину  $L$  заданной, а число  $\text{Fr}$  определять в ходе решения задачи.

Параметр  $L$  связан с длиной волны  $L_1$  в физической плоскости соотношением

$$L_1 = \frac{2V_0HL}{\pi V_s}, \quad V_s = \frac{1}{L_1} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+L_1} V(x) dx$$

где  $V_s$  — средняя скорость частиц жидкости на одном периоде волн справа на бесконечности.

Введенная ранее нормировка конформного отображения  $z(t)$  области  $G_1$  на  $G_2$  требовала, чтобы образ вихря лежал на мнимой оси. Для удобства дальнейших рассуждений примем, что абсцисса вихря  $D$  не определена и должна находиться в ходе решения задачи, зато известно, что

$$\chi^*(t) = \overline{\chi^*(-\bar{t})} \quad (1.7)$$

В силу симметрии нелинейных прогрессивных волн это всегда возможно. В результате появляется новый параметр  $D$ , определяющий фазу волнового цуга. В краевом условии (1.3) аргумент  $\xi$  у функций  $f(\xi)$  и  $f_0(\xi)$  при этом заменится на  $\xi - D$ .

Таким образом, необходимо при заданных  $\gamma, L$  найти  $\chi(t)$ ,  $a$ ,  $D$ ,  $\text{Fr}$ , удовлетворяющие условиям (1.3)—(1.7).

2. Нелинейное интегральное уравнение и метод его решения. Пусть  $p = nl$ , где  $n$  — натуральное число. Функцию  $d\mu/d\xi$  ищем в виде

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \lambda(\xi) + I(\xi) \rho(\xi) \quad (2.1)$$

$$\rho(\xi) = \frac{d\mu^*}{d\xi}, \quad \mu^*(\xi) = \text{Re} \chi^*\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right); \quad \lambda(\xi) \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \pm\infty)$$

$$I(\xi) = 0 \quad (\xi \leq p), \quad I(\xi) = 1 \quad (\xi \geq p)$$

В представлении (2.1) выделена асимптотика поведения функции  $d\mu/d\xi$  на бесконечности справа.

Функция  $\rho(\xi)$  — периодическая (с периодом  $L$ ), нечетная, должна удовлетворять интегральному уравнению для нелинейных периодических волн над плоским горизонтальным дном

$$\rho(s) = E \exp(3J\rho) \sin(\Theta J\rho) \quad (2.2)$$

Здесь  $J\rho$ ,  $\Theta\rho$  — линейные интегральные операторы

$$J\rho = \int_0^L \rho(\xi) d\xi, \quad \Theta\rho = \frac{1}{\pi} \int_0^{L/2} [\rho(\xi) - \rho(s)] [S(\xi - s) - S(\xi + s)] d\xi$$

$$S(u) = \frac{\pi}{L} \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \operatorname{th} \left( \frac{k\pi^2}{L} \right) - 1 \right] \sin \left( \frac{2k\pi u}{L} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin(u + kL)}$$

$$E = \frac{2}{\pi F\Gamma^2} \exp \left[ 3 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\xi) d\xi \right] \quad (2.3)$$

В качестве параметра, определяющего при фиксированных  $L$  нетривиальное решение уравнения (2.2), возьмем величину

$$A = \int_0^{L/2} \rho(\xi) d\xi = \mu^* \left( \frac{L}{2} \right) - \mu^*(0) = \ln \frac{V_+}{V_-} \quad (2.4)$$

где  $V_+$  и  $V_-$  — скорости на бесконечности в горбах и впадинах волн соответственно. Система (2.2), (2.4) после дискретизации эффективно решается методом Ньютона. Поэтому  $\rho = \rho(\xi, A)$ ,  $E = E(A)$  можно считать известными функциями.

Функция  $\chi(t)$  может быть построена по заданной действительной части  $\mu(\xi)$  на верхней границе полосы и первому условию (1.4) [7]

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(\xi) d\xi}{\operatorname{ch}(\xi - t)} \quad (2.5)$$

Из формулы (2.5) легко получить интегральный оператор, связывающий действительную и мнимую части функции  $\chi(t)$  при  $\eta = \pi/2$

$$\tau = T\mu = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(\xi) - \mu(s)}{\operatorname{sh}(\xi - s)} d\xi \quad (2.6)$$

Из второго условия (1.4) и соотношений (1.3), (2.1), (2.6) выводим интегральное уравнение для определения функции  $\lambda(\xi)$

$$\lambda(s) = \frac{2}{\pi F\Gamma^2} \frac{\exp [3I(s) r(s, A) + 3M\lambda]}{f(s - D)} \sin [F_*(s, A) + TM\lambda] + f_0(s - D) - I(s) \rho(s, A) \quad (2.7)$$

$$F_*(s, A) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{L/2} r(\xi, A) [S_1(s - \xi) - S_1(s + \xi - L)] d\xi$$

$$r(s, A) = \int_0^L \rho(\xi, A) d\xi, \quad M\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\xi) d\xi, \quad S_1(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin(u - kL)}$$

В уравнении (2.7) необходимо найти  $\lambda(\xi)$ ,  $F\Gamma$ ,  $D$ ,  $A$ . Функции  $F_*(s, A)$ ,  $r(s, A)$  представляют собой функции влияния бесконечного цуга волн. Они выражаются через  $\rho(\xi, A)$  и являются известными.

Для определения числа  $F\Gamma$  имеем соотношение (2.3), отражающее то обстоятельство, что (2.7) должно переходить справа на бесконечности в уравнение (2.2). Помимо числа  $F\Gamma$  в (2.7) входят еще два неизвестных параметра  $D$  и  $A$ , для определения которых необходимо получить два дополнительных условия, замыкающих задачу. При выводе этих условий существенными являются неравенства (1.6), а именно тот факт, что степень экспоненциального убывания правых частей в (1.6) равна  $-2|\xi|$ .

Проинтегрируем функции  $[\chi(t) - \chi(t - L)] \exp(\pm t)$  по границе полосы  $G_r$ ,

обходя бесконечно удаленные точки по вертикальным отрезкам прямых. В силу (1.6) это интегрирование возможно. После некоторых преобразований получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\xi) \exp(\pm \xi) d\xi = \frac{\exp(\pm p)}{\operatorname{sh}(L/2)} \int_0^{L/2} \rho(\xi, A) \operatorname{sh}\left(\frac{L}{2} - \xi\right) d\xi \quad (2.8)$$

Система (2.3), (2.7), (2.8) представляет собой замкнутую систему соотношений для определения функции  $\lambda(\xi)$  и параметров  $D$ ,  $A$ ,  $\operatorname{Fr}$  и после дискретизации решается методом Ньютона.

Для дискретизации системы на оси  $\xi$  выделяется расчетный интервал  $[q, p]$ :  $-q \gg 1$ ,  $p \gg 1$ ,  $p = nL$ . На интервал  $[q, p]$  наносится неравномерная сетка узлов  $\xi_i$  ( $i = 1, N$ ),  $\xi_1 = q$ ,  $\xi_N = p$  и отыскиваются значения  $\lambda_i = \lambda(\xi_i)$ . Вне  $[q, p]$  функция  $\lambda(\xi)$  полагается равной нулю. Численное интегрирование в уравнениях (2.3), (2.7), (2.8) проводится путем аппроксимации подынтегральных функций кубическими сплайнами. В результате получается система  $N + 3$  уравнений с  $N + 3$  неизвестными  $\lambda_i$  ( $i = 1, N$ ),  $D$ ,  $A$ ,  $\operatorname{Fr}$ . Параметр  $a$  также отыскивается в ходе общего итерационного процесса присоединением к системе (2.3), (2.7), (2.8) уравнения (1.6).

Точка  $p = nL$  является точкой склейки решения, полученного на расчетном интервале  $[q, p]$ , с бесконечным периодическим цугом волн на интервале  $[p, \infty)$ . Практика расчетов по предлагаемому алгоритму показала, что независимо от  $L$  при  $q \leq -5$ ,  $p \geq 5$  величины  $\lambda_1 = \lambda(q)$ ,  $\lambda_N = \lambda(p)$  имеют порядок  $10^{-4}$  и склейка получается вполне удовлетворительной. Таким образом, правую границу  $p = nL$  расчетного интервала в данном методе при  $L \geq 5$  можно выбирать равной  $L$ , что и позволяет производить расчеты очень длинных волн.

Пусть  $C_x$  и  $C_y$  — коэффициенты волнового сопротивления и подъемной силы вихря, отнесенные к  $\rho V_0^2 H/2$ , где  $\rho$  — плотность жидкости. По формуле Чаплыгина — Блазиуса имеем

$$C_x - iC_y = i\gamma \exp[-\lambda(D + ia)] \{2 + \gamma [2 \operatorname{ctg}(2a) + i\lambda'(D + ia)]/4\} \quad (2.9)$$

Волновое сопротивление можно подсчитать и с помощью теоремы об изменении количества движения. В результате

$$C_x = 2 - R_+ + \left(\frac{R_+ - 1}{\operatorname{Fr}}\right)^2 - R_-, \quad R_{\pm} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp[\pm \lambda^*(i\eta)] d\eta \quad (2.10)$$

Формулы (2.9), (2.10) являются мощным средством проверки правильности расчетов, так как величина  $C_x$  мала и очень чувствительна к численным погрешностям. Предлагаемый алгоритм позволяет добиться совпадения  $C_x$ , подсчитанного этими двумя независимыми способами, с точностью до  $10^{-5}$ .

**3. Числовые расчеты.** Вместо параметра  $L$  ( $0 < L < \infty$ ) при выполнении числовых расчетов удобно ввести параметр

$$F = \sqrt{\operatorname{th}(\pi^2/L)/(\pi^2/L)}, \quad 0 < F < 1 \quad (3.1)$$

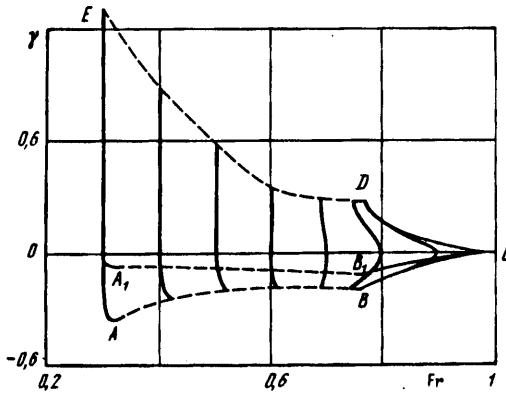
Для малых  $|\gamma|$ , согласно линейной теории,  $L_1 = 2HL/\pi$ , а число  $\operatorname{Fr}$  связано с длиной волны  $L_1$  дисперсионным соотношением

$$2\pi \operatorname{Fr}^2 H/L_1 = \operatorname{th}(2\pi H/L_1) \quad (3.2)$$

Из (3.1), (3.2) следует, что для малых  $|\gamma|$   $\operatorname{Fr} \cong F$ . Отклонение числа  $\operatorname{Fr}$  от  $F$  — следствие нелинейных искажений.

Введем понятие предельного режима обтекания. Пусть значения  $\operatorname{Fr}$  и  $h/H$  — фиксированы. При  $\gamma = 0$  решением задачи является равномерный поток, движущийся со скоростью  $V_0$ . Будем увеличивать параметр возмущения  $\gamma$ , стремясь достичь максимальных  $|\gamma|$ , при которых возможен стационарный режим обтекания с образованием волн вниз по потоку. Соответствующее такому  $\gamma$  течение будем называть предельным режимом обтекания.

На фиг. 2 показаны результаты систематических числовых расчетов, проведенных при  $h/H = 0,5$ . Параметр  $F$  изменялся в пределах от 0,3 до 0,98 с шагом 0,1. Сплошными линиями изображены кривые  $\gamma(\operatorname{Fr})$  при  $F = \text{const}$ . Для каждого



Фиг. 2

$F$  путем постепенного увеличения  $|\gamma|$  достигались максимально возможные циркуляции. Как видно из фиг. 2, существенные отклонения чисел  $Fr$  от  $F$  имеют место при  $Fr > 0,7$ . Концы кривых  $\gamma(Fr)$  соединены штриховыми линиями  $AB$  и  $DE$ . Линии  $AB$  и  $DE$  вместе с  $BC$  ( $F=0,98, \gamma < 0$ ) и  $CD$  ( $F=0,98, \gamma > 0$ ) ограничивают в плоскости  $Fr, \gamma$  область, определяющую те значения  $Fr, \gamma$ , при которых возможен стационарный докритический режим обтекания вихря. Зависимости  $\gamma(Fr)$  для кривых  $AB, DE$  и  $BCD$  характеризуют три типа предельных режимов, полученных при расчетах. Назовем их режимами разрушающегося цуга волн, разрушающегося гребня над препятствием и водослива соответственно.

Линии  $BC$  и  $CD$  на фиг. 2 представляют собой зависимости  $\gamma(Fr)$  при  $F=0,98$ . При  $F=0,98$  имеем  $L=27,95$  и генерируемый вихрем цуг близок к «цугу уединенных волн». Таким образом, при переходе течения в водосливный режим длина волн за вихрем увеличивается вплоть до бесконечности.

На фиг. 3 показаны зависимости  $L'_i = L_i/H$  от  $Fr$  при  $h/H=0,5$  для  $\gamma = -0,19, -0,13, -0,07, -0,01, 0$  (кривые 1—5). Как видно из фиг. 3, существуют числа  $Fr$ , при которых эти зависимости имеют вертикальные асимптоты. Случай  $\gamma=0$  соответствует линейной теории, согласно которой  $L_i/H = \infty$  при  $Fr=1$  (формула (3.2)).

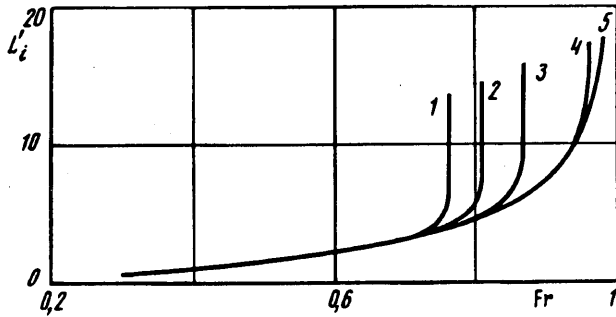
В работе [1] были произведены расчеты обтекания вихря при двух значениях пар параметров  $Fr, h/H$  ( $Fr=0,831, h/H=0,222$  и  $Fr=0,572, h/H=0,526$ ) и различных  $\gamma$ .

На фиг. 4 (кривые 1, 2) показаны формы свободных поверхностей при  $Fr=0,831, h/H=0,222$  и двух значениях  $\gamma < 0$  ( $X=x/H, Y=y/H$ ). Штриховой линией на фиг. 4 нанесены формы свободных границ, полученные в [1]. Кривая 1 соответствует минимальному  $\gamma=-0,2234$ , достигнутому в [1]. При этом  $L_i/H=6,48$ . Развиваемый в статье метод позволяет генерировать волны значительно большей длины. Полагая  $F=0,98$ , при  $\gamma=-0,244$  имеем  $Fr=0,831$  и  $L_i/H=15,0$ . При  $\gamma=-0,244$  (кривая 2 на фиг. 4) гребень первой волны значительно удален от вихря и течение жидкости в сечении  $x/H=6,5$  близко к одномерному. Это течение состоит из двух слабо взаимодействующих между собой частей: цуга очень длинных волн справа (на фиг. 4 эти волны не видны) и безволнового течения по схеме фиг. 1, б слева, которое будем называть предельным режимом типа водослива.

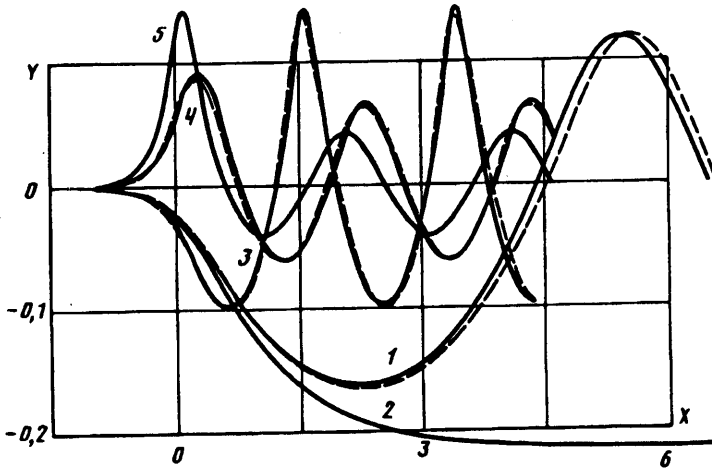
Для схемы фиг. 1, б с помощью интеграла Бернулли и условия сохранения расхода легко получить точные аналитические формулы для величин  $\beta = H_1/H, C_x$  и числа Фруда  $Fr(\infty)$  в сечении на бесконечности справа

$$\beta = \frac{Fr^2}{4} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8}{Fr^2}} \right), \quad C_x = \frac{(1-\beta)^3}{2\beta^2}, \quad Fr(\infty) = Fr \beta^{-3/2} \quad (3.3)$$

Ниже приведены значения  $\beta$  для течений, описываемых кривой  $BC$  фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

(в качестве  $H_1$  выбиралась минимальная высота свободной поверхности над дном) и значения  $\beta$ ,  $Fr(\infty)$ , полученные из (3.3):

Fr	0,961	0,907	0,868	0,837	0,810	0,785	0,761
$\gamma$	-0,01	-0,04	-0,07	-0,10	-0,13	-0,16	-0,194
$\beta$	0,956	0,880	0,831	0,792	0,759	0,731	0,702
$\beta$ (3.3)	0,948	0,879	0,830	0,792	0,759	0,731	0,702
$Fr(\infty)$	1,04	1,10	1,15	1,19	1,22	1,26	1,29

Хорошее совпадение результатов говорит о том, что при  $F=0,98$  ( $L=27,95$ ) действительно реализуется режим обтекания вихря, близкий к водосливному. Вообще говоря, водосливный режим должен иметь место при  $F=1$ , когда  $L=\infty$ .

Водосливные режимы для неровного дна в точной нелинейной постановке исследуются в [8], [9], но они не рассматриваются как течения предельные для волновых. Предлагаемый метод позволяет, решая задачу в точной постановке, «проследить» за переходом волнового режима течения в водосливный и выяснить, при каких значениях  $Fr$  это явление будет иметь место.

Согласно интегралу Бернулли, высота свободной поверхности не может быть больше величины  $Y_{\max} = HF\Gamma^2/2$ .

При достижении этой высоты на свободной поверхности должна образоваться угловая точка с углом в  $120^\circ$  при вершине. Кривые  $AB$  и  $DE$  на фиг. 2 определяют

Fr	$\gamma$	$y_1/H$	$y_2/H$	$y_3/H$	$y_4/H$	$Fr^2/2$	$\delta, \%$
0,321	-0,358	0,0298	0,0385	0,0440	0,0440	0,0516	85
0,425	-0,239	0,0695	0,0776	0,0777	0,0777	0,0900	86
0,526	-0,199	0,1202	0,1216	0,1218	0,1218	0,1383	88

течения, максимальная высота свободной поверхности которых близка к максимально возможной и составляет не менее 85% величины  $Y_{\max}$ .

Поведение свободной поверхности для случаев  $\gamma < 0$  (положительная подъемная сила) и  $\gamma > 0$  (отрицательная подъемная сила) качественно различно. При  $\gamma < 0$  за вихрем образуются волны, каждый последующий гребень которых имеет большую или равную высоту по сравнению с предыдущим. Такое поведение свободной поверхности наблюдалось при  $\gamma < 0$  для всех рассчитанных случаев, включая и течения, соответствующие кривой *AB* фиг. 2. Подтверждением сказанному служит таблица, в которой приведены значения ординат первых четырех гребней волн для кривой *AB* при различных числах Фруда. Здесь  $\delta$  — отношение максимальной высоты свободной поверхности к величине  $HFr^2/2$  в процентах. Цуг периодических волн при расчете присоединялся, начиная с четвертой волны, т. е. для  $p = 3L$ . При  $Fr \geq 0,55$  высоты всех гребней получаются примерно одинаковыми.

Исходя из сказанного, можно предположить, что достижение свободной поверхностью высоты  $HFr^2/2$  будет иметь место при  $\gamma < 0$  на гребне у волны на бесконечности справа. Схема такого течения, которое будем называть предельным режимом типа разрушающегося цуга волн, показана на фиг. 1, в.

На фиг. 4 (кривые 3—5) показаны формы свободной поверхности при  $Fr = -0,572$ ,  $h/H = 0,526$  и трех значениях  $\gamma$ . Кривая 3 построена для течения, близкого к режиму разрушающегося цуга волн, при минимальном значении  $\gamma$ , достигнутом настоящим методом:  $\gamma_{\min} = -0,1776$ . Высоты всех гребней получились примерно одинаковыми ( $y_1/H = 0,1428$ ,  $y_2/H = 0,1438$ ,  $y_3/H = 0,1438$ ,  $y_4/H = 0,1438$ ). Цуг периодических волн присоединялся, начиная с четвертой волны ( $p = 3L = 9,408 > 5$ ). При  $p = 2L$  получаются практически те же результаты. Крутизна  $\kappa$  волнового цуга на бесконечности ( $\kappa = 2A_p/L_p$ , где  $A_p$  — амплитуда волн) равна  $\kappa = 0,1283$ . Штриховой линией нанесена кривая из работы [1] для минимального значения  $\gamma_{\min} = -0,179$ , достигнутого в [1] ( $y_1/H = 0,142$ ,  $y_2/H = 0,1365$ ,  $\kappa = 0,12$ ).

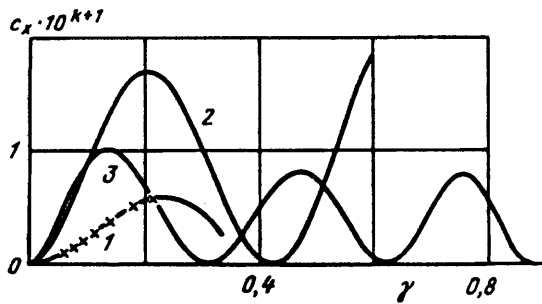
Незначительное расхождение результатов данной работы и [1] в величинах предельных  $\gamma$ , высоты вторых гребней и небольшой сдвиг по фазе формы свободной поверхности, начиная со второй волны, могут быть, видимо, объяснены произведенным в [1] обрезанием волнового цуга вниз по потоку.

При  $\gamma > 0$  максимальное возвышение свободной поверхности для всех рассчитанных случаев наблюдается на горбе, образующемся над вихрем (фиг. 4, кривые 4 и 5). Предельным режимом в этом случае должно быть течение, схема которого показана на фиг. 1, г. Этот режим мы будем называть режимом разрушающегося гребня над вихрем.

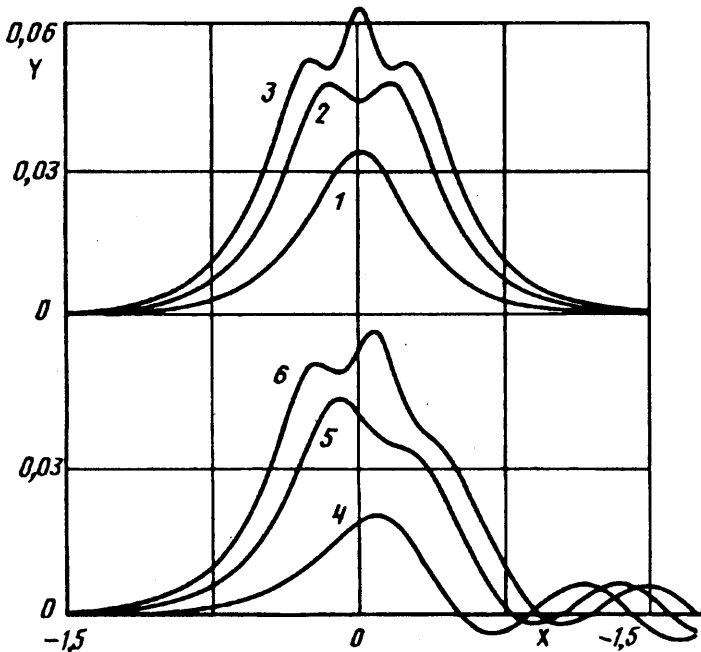
На фиг. 4 (кривая 5) показана форма свободной поверхности для течения, близкого к предельному при  $\gamma = 0,335$ . Амплитуда волнового цуга здесь значительно меньше максимально возможной. Кривая 4 на фиг. 4 построена для максимального значения  $\gamma = 0,212$ , достигнутого в работе [1].

На фиг. 5 показаны зависимости  $C_x(\gamma)$  при  $h/H = 0,526$ ,  $Fr = 0,572$ , (0,5, 0,5), (0,5, 0,4) (кривые 1—3). Масштаб по оси ординат на фиг. 5 зависит от номера нанесенной кривой  $k = \overline{1, 3}$ . Маркерами на кривую 1 нанесены результаты из [1]. На кривой 1 в диапазоне  $0,212 < \gamma < 0,335$ , который не был рассчитан в [1], имеется точка максимума  $C_x$ , а затем участок убывания. Наличие участка убывания волнового сопротивления на кривой 1 наводит на мысль о существовании докритических течений, у которых  $C_x = 0$ , а волны вниз по потоку отсутствуют. Такую возможность демонстрируют кривые 2, 3 на фиг. 5





Фиг. 5



Фиг. 6

и формы свободных границ на фиг. 6, построенные при  $h/H = 0,5$ ,  $Fr = 0,4$  для  $\gamma = 0,3025, 0,6241, 0,8675, 0,15, 0,485, 0,75$  (кривые 1—6).

При  $Fr = 0,5$  волновое сопротивление исчезает 1 раз (кривая 2, фиг. 5), а при  $Fr = 0,4$  уже 3 раза (кривая 3, фиг. 5). При  $Fr = 0,4$ ,  $\gamma = 0,3025$  волновое сопротивление равно нулю, а свободная поверхность симметрична относительно оси  $y$ , имеет один гребень над вихрем и не имеет волн ни вверх, ни вниз по потоку (фиг. 6, кривая 1). При дальнейшем увеличении  $\gamma$  над вихрем начинает образовываться второй гребень, высота первого при этом увеличивается (фиг. 6, кривая 5). При  $\gamma = 0,6241$  волновое сопротивление исчезает второй раз, а симметричная безволновая свободная поверхность имеет два гребня над вихрем (фиг. 6, кривая 2). При  $\gamma = 0,8675$  волновое сопротивление третий раз обращается в ноль, а симметричная свободная поверхность имеет три гребня (фиг. 6, кривая 3). Таким образом, число гребней для симметричной свободной поверхности равно количеству исчезновений волнового сопротивления, произошедших при ее образовании.

Явление исчезновения волнового сопротивления имеет место только при  $Fr < 0,5$ . При  $Fr > 0,5$  течение переходит в предельный режим разрушающегося гребня раньше, чем исчезнет волновое сопротивление. Поэтому кривую 1 на

фиг. 5 нельзя «дотянуть» до значения  $C_x = 0$ . Концу этой кривой ( $\gamma = 0,335$ ) уже соответствует течение, близкое к предельному.

Переход течения в водосливный режим наблюдается как для отрицательных (кривая *BC* на фиг. 3), так и для положительных (кривая *CD* на фиг. 2) циркуляций вихря. Можно заметить, что при  $\gamma < 0$  абсцисса точки *B* всегда будет равна 0,761 независимо от глубины погружения вихря, т. е. при  $\gamma < 0$  водосливный режим обтекания будет при  $0,761 < Fr < 1$ , а режим разрушающегося цуга — при  $Fr < 0,761$ . В самом деле, точка *B* является общей для режимов разрушающегося цуга волн и водосливного и, следовательно, определяет течение, у которого справа к основному потоку присоединяется цуг бесконечно длинных предельных волн. Если подсчитать величину  $Fr(\infty)$  по формулам (3.3), то при  $Fr = 0,761$  получим  $Fr(\infty) = 1,29$ . Значение  $Fr = 1,29$  как раз и есть число Фруда, определяющее предельный солитон (см., например, [10]).

Подтверждением сказанному служат кривые *A, B, и B, C* на фиг. 2, определяющие предельные режимы разрушающегося цуга и водослива при  $\gamma < 0$  и  $h/H = 0,8$ .

При  $\gamma > 0$  нижняя граница чисел Фруда, при которых увеличение  $\gamma$  приводит к водосливному режиму, зависит от глубины погружения вихря. При  $h/H = 0,5$  эта граница равна  $Fr = 0,77$  (см. фиг. 2). Объясняется это тем, что кривая *CD* определяет предельный режим с разрушающимся гребнем над вихрем, а не волновым цугом. Возвышение гребней волн на бесконечности справа для течений, определяемых кривой *CD*, ниже величины  $HFr^2/2$ . Точка *D* определяет, таким образом, водосливный режим с волновым цугом, выродившимся в солитон, высота гребня которого не достигает предельной.

В заключение отметим, что реализация метода не требует дорогостоящей вычислительной техники. Весь объем расчетов данной работы (часть из них была ранее представлена в [5] и [11]) выполнен на персональном компьютере IBM PC/AT-286.

Автор выражает благодарность Г. Ю. Степанову за обсуждение результатов данной работы в процессе их получения, ценные советы и замечания.

Работа получила финансовую поддержку Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01763).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Salvesen N., Kerczek C.* Comparison of numerical and perturbation solutions of two-dimensional nonlinear water-wave problems//*J. Ship. Res.* 1976. V. 20. № 3. P. 160—170.
2. *Forbes L. K., Schwartz L. W.* Free-surface flow over a semicircular obstruction//*J. Fluid Mech.* 1982. V. 114. P. 299.
3. *King A. C., Bloor M. I. G.* Free-surface flow over a step//*J. Fluid Mech.* 1987. V. 182. P. 193—208.
4. *Mekias H., Vanden-Broeck J.-M.* Subcritical flow with a stagnation point due to a source beneath a free-surface//*Phys. Fluids. A.* 1991. V. 5. № 11. P. 2652—2663.
5. *Маклаков Д. В.* Нелинейная теория докритических течений. Предельные режимы обтекания: Препринт № 2. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. 47 с.
6. *Маклаков Д. В.* Существование решения задачи о докритическом обтекании вихря//Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. С. 92—105.
7. *Киселев О. М., Котляр Л. М.* Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 156 с.
8. *Forbes L. K.* Critical free-surface flow over a semicircular obstruction//*J. Eng. Math.* 1988. V. 22. № 1. P. 3—13.
9. *Dias F., Vanden-Broeck J.-M.* Open channel flow with submerged obstructions//*J. Fluid Mech.* 1989. V. 106. P. 155—170.
10. *Гузевский Л. Г.* Обтекание препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины//Динамика сплошной среды с границами раздела. Чебоксары, 1982. С. 61—69.
11. *Маклаков Д. В.* Предельные режимы докритического обтекания препятствия//Вычислительные технологии. Новосибирск: Ин-т вычисл. технологий СО РАН, 1993. Т. 2. № 4. С. 55—70.