МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1995

УДК 532.546

© 1995 г. Р. Ш. МАРДАНОВ, Ф. М. МУХАМЕТЗЯНОВ, А. Г. ФАТЫХОВ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Решаются задачи фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде, состоящей из трещин и блоков с отличными друг от друга фильтрационными характеристиками.

Массообмен между трещинами и блоками принимается пропорциональным разности давлений в них. Пористость в трещинах предполагается пренебрежимо малой. В этих предположениях определение полей давления сводится к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений.

Решение проводится операционным методом с привлечением теоремы Эфроса. Рассмотрены случаи эксплуатации нефтяного пласта как галереями, так и скважинами. Решения получены в аналитической форме, удобной для проведения расчетов.

1. В [1] показано, что распределение давлений p_1, p_2 соответственно в трещинах и блоках определяется следующей системой линейных дифференциальных уравнений, описывающей фильтрацию жидкости в трещинах и массообмен последних с блоками:

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta \frac{\partial p_1}{\partial t} + A (p_2 - p_1) = 0, \quad \varkappa \Delta p_1 - A (p_2 - p_1) = 0 \tag{1.1}$$

$$A = \frac{\alpha k_2}{\mu l^2 m_{20} (\beta_{22} + \beta_*)}, \quad \varkappa = \frac{k_1}{\mu m_{20} (\beta_{22} + \beta_*)}, \quad \beta = \frac{\beta_{21}}{\beta_{22} + \beta_*}$$

где Δ — оператор Лапласа, β_* — коэффициент сжимаемости жидкости.

Постоянные величины m_{20}, β_{21}, β_{22} связаны с учетом зависимости пористости блоков m_2 от давлений p_1, p_2 формулой

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = m_{20} \left(\beta_{21} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \beta_{22} \frac{\partial p_1}{\partial t} \right)$$

Массообмен между трещинами и блоками характеризуется количеством перетекающей жидкости за единицу времени t в единице объема q

$$q = \alpha \frac{\rho k_2}{\mu} \frac{p_2 - p_1}{l^2}$$

где μ — вязкость жидкости, ρ — ее плотность, k_1 — проницаемость трещин, k_2 — проницаемость блоков, l — их средний размер, α — безразмерная постоянная, связанная с геометрией среды. Трещинная пористость m_1 (отношение объема трещин к полному объему среды) принимается пренебрежимо малой.

Особенностью решения системы (1.1) является то, что нельзя задавать начальные значения для p_1 и p_2 произвольно [1]. Требуется, задав начальное значение для p_1, найти начальное значение для приведенного давления $p = p_2 - \beta p_1$ из условия

$$\varkappa \Delta p_1 - (1 - \beta) A p_1 = A p (x, y, 0)$$

Затем найти начальное значение для p_2 как

$$p_2(x, y, 0) = p(x, y, 0) + \beta p_1(x, y, 0)$$

Из системы (1.1) легко исключить p_2, выразив его из второго уравнения [1]

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t} \Delta p_1 = \frac{\varkappa}{1-\beta} \Delta p_1 \tag{1.2}$$

$$\eta = \frac{\varkappa}{A(1-\beta)} = \frac{k_1 l^2}{\alpha k_2 (1-\beta)}$$

При $\beta \ll 1$ величиной β можно по сравнению с единицей пренебречь.

При $\eta \to 0$ уравнение (1.2) переходит в обычное уравнение упругого режима с коэффициентом пьезопроводности $\varkappa/(1-\beta)$.

На основании этой модели рассмотрим одномерную фильтрацию жидкости между двумя галереями $y = 0$, $y = L$, на которых давление $p_1(y, t)$ соответственно равно постоянным величинам p_{11} и p_{12}. Начальное условие $p_1(y, 0) = 0$. В этом случае уравнение (1.2) примет вид

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right) = \varkappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

Применяя к уравнению (1.2) преобразование Лапласа

$$\bar{p}_1(y, \sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma\tau} p_1(y, t)\, dt = L(p_1) \tag{1.4}$$

вместо (1.3) для p_1 получаем

$$\frac{d^2\bar{p}_1}{dy^2} = \psi \bar{p}_1, \qquad \psi = \frac{\sigma}{\varkappa + \eta\sigma} \tag{1.5}$$

Граничные условия для $\bar{p}_1$ переписываются в форме

$$\bar{p}_1|_{y=0} = \frac{p_{11}}{\sigma} = \bar{p}_{11}, \qquad \bar{p}_1|_{y=L} = \frac{p_{12}}{\sigma} = \bar{p}_{12} \tag{1.6}$$

Общее решение (1.5) дается выражением

$$\bar{p}_1 = A_1 e^{\sqrt{\psi} y} + B_1 e^{-\sqrt{\psi} y}$$

где A_1, B_1 — постоянные, подлежащие нахождению из (1.6).

В итоге для $\bar{p}_1$ получаем

$$\bar{p}_1 = [\bar{p}_{12} \operatorname{Sh} \sqrt{\psi}\, y + \bar{p}_{11} \operatorname{Sh} \sqrt{\psi}\,(L-y)] (\operatorname{Sh} \sqrt{\psi}\, L)^{-1} \tag{1.7}$$

Представим далее (1.7) в виде

$$\bar{p}_1 = F(\eta\psi)\, \Phi(\sigma) \tag{1.8}$$

$$F(\sigma) = \left[p_{12} \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\, y + p_{11} \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\,(L-y)\right] \left(\sigma \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\, L\right)^{-1}$$

$$\Phi(\sigma) = \frac{\eta}{\varkappa + \eta\sigma}$$

Для нахождения оригинала (1.7) рассмотрим вначале функцию

$$F(\sigma) = \left[p_{12} \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\, y + p_{11} \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\,(L-y)\right] \left(\sigma \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\, L\right)^{-1} \tag{1.9}$$

Оригинал $f(\tau)$ изображения легко отыскивается. В самом деле, согласно теореме обращения

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\sigma\tau} F(\sigma)\, d\sigma$$

где $\gamma > \gamma_0 > 0$, и определяет область аналитичности $F(\sigma)$ в полуплоскости справа от прямой $\operatorname{Re}\sigma \geq \gamma_0$. Так что все особые точки $F(\sigma)$ должны лежать слева от этой прямой. При этом $F(\sigma)$ должна равномерно стремиться к нулю при $|\sigma| \to \infty$. Функция (1.9) удовлетворяет этим условиям и имеет простые полюса в точках $\sigma = 0$, $i\sqrt{\sigma/\eta}\, L = \pi n$ $(n \in N)$ или $\sigma = 0$, $\sigma_n = \pi^2 n^2 \eta / L^2$ $(n = 1, 2$ и т. д.$)$. Вводя теперь в рассмотрение замкнутый контур, состоящий из отрезка интегрирования $(\gamma - i\omega,\ \gamma + i\omega)$ и полуокружности Γ радиуса $R_1 = \pi^2 (n + 1/2)^2 \eta / L^2$, так, чтобы полюс не приходился на Γ, и учитывая, что интеграл

$$\int e^{\sigma\tau} F(\sigma)\, d\sigma$$

по этому замкнутому контуру равен сумме вычетов $F(\sigma)$ относительно названных выше простых полюсов, умноженных на $e^{\sigma_n \tau}$, получаем

$$\int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\sigma\tau} F(\sigma)\, d\sigma = \int\limits_{\Gamma} e^{\sigma\tau} F(\sigma)\, d\sigma + \Sigma \operatorname{Res} F(\sigma)\, e^{\sigma_n \tau}$$

Устремляя далее R_1 (или n) к бесконечности и принимая во внимание, что при этом [2]

$$\int\limits_{\Gamma} e^{\sigma\sigma} F(\sigma)\, d\sigma \to 0$$

находим (обобщенная теорема Ващенко — Захарченко)

$$f(\tau) = \Sigma \operatorname{Res} F(\sigma)\, e^{\sigma_n \tau}$$

Эта формула применительно к (1.9) дает

$$f(\tau) = p_{12} \left\{ \frac{y}{L} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{\sin \pi n y / L}{n} e^{-(\pi n/L)^2 \tau\eta} \right\} +$$

$$+ p_{11} \left\{ \left(1 - \frac{y}{L}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{\sin \pi n (1 - y/L)}{n} e^{-(\pi n/L)^2 \tau\eta} \right\} \tag{1.10}$$

Ряды, входящие в (1.10), равномерно и быстро сходятся. Тогда согласно теоремы Эфроса [2] находим, что оригинал p_1 изображения (1.8) дается выражением

$$p_1 = \int\limits_0^{\infty} f(\tau)\, \Psi(\tau, t)\, dt \tag{1.11}$$

в котором $\Psi(\tau, t)$ служит решением нитегрального уравнения

$$e^{-\tau\varphi(\sigma)} \Phi(\sigma) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\sigma t} \Psi(\tau, t)\, dt$$

$$\Phi(\sigma) = \frac{\eta}{\varkappa + \eta\sigma}$$

или, в данном случае

$$e^{-\tau} e^{\varkappa\tau\Phi(\sigma)/\eta} \Phi(\sigma) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\sigma t} \Psi(\tau, t)\, d\tau \tag{1.12}$$

Из (1.12) очевидно, что функция $e^{\varkappa\tau\Phi(\sigma)/\eta}\Phi(\sigma)$ является изображением оригинала $e^{-\sigma t}\Psi(\tau, t)$. Известно [2], что оригинал изображения $1/\sigma e^{\varkappa\tau/\eta\sigma}$ есть

$$I_0\left(2\sqrt{\frac{\varkappa\tau t}{\eta}}\right)$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка. Оригиналом же $e^{\varkappa\tau\Phi(\sigma)/\eta}$, согласно теореме запаздывания [2], будет выражение

$$e^{-\varkappa t/\eta}I_0\left(2\sqrt{\frac{\varkappa\tau t}{\eta}}\right)$$

Таким образом

$$\Psi(\tau, t) = e^{-\varkappa t/\eta-\tau}I_0\left(2\sqrt{\frac{\varkappa\tau t}{\eta}}\right) \qquad (1.13)$$

Подставляя это выражение в (1.11) и учитывая (1.10), найдем распределение давления в трещинах

$$p_1(y, t) = e^{-\varkappa/\eta}\int_0^\infty\left[p_{12}\left\{\frac{y}{L} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi ny/L}{n}e^{-(\pi n/L)^2\tau\eta}\right\} + \right.$$

$$\left. + p_{11}\left\{\left(1 - \frac{y}{L}\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi n(1 - y/L)}{n}e^{-(\pi n/L)^2\tau\eta}\right\}\right] \times$$

$$\times I_0\left(2\sqrt{\frac{\varkappa\tau t}{\eta}}\right)e^{-\tau}d\tau \qquad (1.14)$$

Разложив I_0 в ряд и учитывая, что

$$\int_0^\infty I_0\left(2\sqrt{\frac{\varkappa\tau t}{\eta}}\right)e^{-\tau}d\tau = \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\varkappa\tau t}{\eta}\right)^k\int_0^\infty t^k e^{-\tau}d\tau \qquad (1.15)$$

формулу (1.14) можно записать в удобном для расчетов виде

$$p_1(y, t) = p_{12}\frac{y}{L} + p_{11}\left(1 - \frac{y}{L}\right) + \frac{2}{\pi}e^{-\varkappa t/\eta}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=0}^\infty(-1)^n\frac{p_{12}\sin\pi ny/L + p_{11}\sin\pi n(1 - y/L)}{n\,[(\pi/L)^2n^2\eta + 1]^k}\left(\frac{\varkappa\tau t}{\eta}\right)^k \qquad (1.16)$$

Обозначив искомую функцию ненулевых начальных значений через p_1^* и положив $p_1 = p_1^* - p_{10}$, придем к нулевому начальному значению, а в окончательной формуле (1.15) вместо p_{11}, p_{12} будут фигурировать числа $p_{11} - p_{10}, p_{12} - p_{10}$. Зная $p_1(y, t)$, из второго уравнения системы (1.1) найдем и распределение давления в блоках $p_2(y, t)$.

2. Аналогично решается задача и в случае круговых галерей. Здесь распределение давления в трещинах p_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = \varkappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) \qquad (2.1)$$

Граничные условия при заданных постоянных давления на окружностях $r = r_c$ и $r = R$ будут

$$p_1|_{r=r_c} = p_c, \quad p_1|_{r=R} = p_k \qquad (2.2)$$

где r_c — радиус скважины.

Прибегая к преобразованию Лапласа (1.7), при нулевых начальных условиях взамен (2.1) и (2.2) получаем соотношения

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\bar{p}_1}{dr}\right) - \psi\bar{p}_1 = 0 \tag{2.3}$$

$$\bar{p}_1|_{r=r_c} = \frac{p_c}{\sigma} = \bar{p}_c$$

$$p_1|_{r=R} = \frac{p_k}{\sigma} = \bar{p}_k \tag{2.4}$$

Общее решение (2.3) и (2.4) записывается в форме

$$\bar{p}_1 = A_1 I_0(\sqrt{\psi}\, r) + B_1 K_0(\sqrt{\psi}\, r)$$

где I_0, K_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Удовлетворяя граничным условиям (2.4), найдем

$$A_1 = \{\bar{p}_c K_0(\sqrt{\psi}\, R) - \bar{p}_k K_0(\sqrt{\psi}\, r_c)\}\Delta^{-1}$$

$$B_1 = \{\bar{p}_k I_0(\sqrt{\psi}\, r_c) - \bar{p}_c I_0(\sqrt{\psi}\, R)\}\Delta^{-1}$$

$$\Delta = I_0(\sqrt{\psi}\, r_c) K_0(\sqrt{\psi}\, R) - I_0(\sqrt{\psi}\, R) K_0(\sqrt{\psi}\, r_c)$$

Таким образом, для $\bar{p}_1$, согласованного с (2.4), получаем выражение

$$\bar{p}_1 = \{\bar{p}_c [I_0(\sqrt{\psi}\, r) K_0(\sqrt{\psi}\, R) - I_0(\sqrt{\psi}\, R) K_0(\sqrt{\psi}\, r)] +$$

$$+ \bar{p}_k [I_0(\sqrt{\psi}\, r_c) K_0(\sqrt{\psi}\, r) - I_0(\sqrt{\psi}\, r) K_0(\sqrt{\psi}\, r_c)]\}\Delta^{-1} \tag{2.5}$$

Опять, как и в прямолинейных галереях, чтобы найти оригинал (2.5), рассмотрим изображение

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\{p_c [I_0(\bar{\sigma} r) K_0(\bar{\sigma} R) - I_0(\bar{\sigma} R) K_0(\bar{\sigma} r)] +$$

$$+ p_k [I_0(\bar{\sigma} r_c) K_0(\bar{\sigma} r) - I_0(\bar{\sigma} r) K_0(\bar{\sigma} r_c)]\}\Delta^{-1} \tag{2.6}$$

$$\Delta = I_0(\bar{\sigma} r_c) K_0(\bar{\sigma} R) - I_0(\bar{\sigma} R) K_0(\bar{\sigma} r_c), \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$$

Поступая, как и раньше в (1.9), найдем, что оригиналом изображения (2.6) служит функция [3]

$$f(\tau) = p_c \frac{\ln u}{\ln w} + p_k \frac{\ln v}{\ln w} + 2\sum_{n=1}^{\infty} [p_c J_0(\alpha_n u) -$$

$$- p_k J_0(\alpha_n)] [J_0(\alpha_n v) Y_0(\alpha_n) - J_0(\alpha_n) Y_0(\alpha_n v)] \times$$

$$\times J_0^2(\alpha_n w) [J_0^2(\alpha_n w) - J_0^2(\alpha_n)]^{-1} e^{-\alpha_n^2 \eta\tau / r_c^2}$$

где J_0, I_0 — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, нулевого порядка, а α_n — корни трансцендентного уравнения [3]

$$J_0(\alpha) Y_0(\alpha_n w) - J_0(\alpha_n w) Y_0(\alpha) = 0$$

Для искомого оригинала изображения (2.5), описывающего интересующее распределение давления в трещинах в кольце при нулевом начальном значении, согласно той же теореме Эфроса и (1.13), получаем выражение

$$p_1(r,t) = e^{\varkappa t/\eta} \int_0^\infty \Big[p_c \frac{\ln u}{\ln w} + p_k \frac{\ln v}{\ln w} +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \{p_c J_0(\alpha_n u) - p_k J_0(\alpha_n)\} [J_0(\alpha_n v) Y_0(\alpha_n) -$$

$$- J_0(\alpha_n) Y_0(\alpha_n v)\Big] J_0^2(\alpha_n w)\, e^{-(\alpha_n^2/r_c \eta + 1)\tau} \times$$

$$\times [J_0^2(\alpha_n w) - J_0^2(\alpha_n)]^{-1} I_0^{-1}\left(2\sqrt{\frac{\varkappa \tau t}{\eta}}\right) d\tau$$

или, упрощая его, как и в (1.14), с помощью (1.15) и (1.16), окончательно приходим к следующей удобной для расчетов формуле:

$$p_1(r,t) = p_c \frac{\ln u}{\ln w} + p_k \frac{\ln v}{\ln w} - 2e^{\varkappa t/\eta} \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\alpha_n u) \times$$

$$\times [p_c J_0(\alpha_n w) - p_k J_0(\alpha_n)] [J_0(\alpha_n v) Y_0(\alpha_n) -$$

$$- J_0(\alpha_n) Y_0(\alpha_n v)] [J_0^2(\alpha_n \omega) -$$

$$- J_0^2(\alpha_n)]^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[(1 + \alpha_n^2 \eta r_c^2)^k k!]} \left(\frac{\varkappa}{\eta} t\right)^k$$

Как ранее при начальном значении, равном постоянной величине P_{10}, в формуле (2.7) аддитивно добавляется эта величина, а вместо p_c, p_k войдут соответственно $p_c - p_{10}$, $p_k - p_{10}$, ибо замена искомой функции p_1^* на $p_1 = p_1^* - p_{10}$ приводит к нулевому начальному значению.

3. Так же решается задача и в случае скважинных систем. Например, если в круговом пласте радиуса R, ограниченном контуром питания, на котором поддерживается постоянное давление p_k, в центре действует скважина — точечный сток или источник с постоянным дебитом Q, то при начальном нулевом давлении в нем граничными условиями для уравнения (2.1) будут соответственно

$$p_1(R,t) = p_{1k}$$

$$\left(r \frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r=0} = \frac{\mu Q}{2\pi k_1 h} = Q_*$$

или в изображениях Лапласа

$$\bar{p}_1(R,t) = \frac{p_{1k}}{\sigma} \qquad (3.1)$$

$$\left(r \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial r}\right)_{r=0} = \frac{Q_0}{\sigma} = \bar{Q}_* \qquad (3.2)$$

Здесь решение-изображение Лапласа уравнения (2.1) и условий (2.2), записанное в цилиндрической системе координат (r, φ), ищем в виде

$$\bar{p}_1 = A_1 I_0(\sqrt{\psi}\, r) + B_1 K_0(\sqrt{\psi}\, r)$$

в котором I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Известно, что $K_0(\sqrt{\psi r})$ при $r = 0$ имеет особенность логарифмического типа и, следовательно, учитывает наличие источника (стока) в полюсе. Определив постоянные A_1, B_1 из условий (3.1) и (3.2), находим

$$\bar{p}_1 = \frac{p_{1k}}{\sigma} \frac{I_0(\sqrt{\psi}\, r)}{I_0(\sqrt{\psi}\, R)} + \frac{Q_*}{\sigma} \times$$

$$\times \frac{I_0(\sqrt{\psi}\, R)\, K_0(\sqrt{\psi}\, r) - K_0(\sqrt{\psi}\, R)\, I_0(\sqrt{\psi}\, r)}{I_0(\sqrt{\psi}\, R)} \tag{3.3}$$

Для вычисления оригинала (3.3) определим прежде оригинал выражения

$$F(\sigma) = \frac{p_{1k}}{\sigma} \frac{I_0(\bar{\sigma} r)}{I_0(\bar{\sigma} R)} +$$

$$+ \frac{Q_*}{\sigma} \frac{I_0(\bar{\sigma} R)\, K_0(\bar{\sigma} r) - I_0(\bar{\sigma} r)\, K_0(\bar{\sigma} R)}{I_0(\bar{\sigma} R)} \tag{3.4}$$

Прибегая к теореме обращения [2], все условия применения которой в данном случае выполнены, и выбирая прежний контур интегрирования с учетом того, что подынтегральная функция (3.4) имеет простые полюса $\sigma = 0$, $\sigma_n = -\pi^2/R^2 n^2 \eta$ ($n = 1, 2, \ldots$), находим

$$f(\tau) = p_{1k} - 2p_{1k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \bar{u})}{J_0'(\alpha_n)} e^{\xi} + Q_* \ln u +$$

$$+ 2Q_* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \bar{u})\, e^{\xi}}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)}$$

$$\xi = -\alpha_n \tau \frac{\eta}{R^2}, \quad \bar{u} = \frac{r}{R}$$

где α_n — корни уравнения

$$J_0(\alpha_n) = 0, \quad n = 1, 2 \ldots$$

При отыскании вычетов относительно σ_n использованы тождества

$$I_0(z)\, K_0'(z) - K_0(z)\, I_0'(z) = \frac{1}{z}$$

а также то, что

$$I_0(iz) = J_0(z)\, I_0'(iz) = -iJ_0'(z)$$

Представляя (3.3), как и в случае галерей, в форме

$$\bar{p}_1 = F(\omega(\sigma))\, \Phi(\sigma)$$

где $\omega(\sigma)$, $\Phi(\sigma)$ — принятые там обозначения, и воспользовавшись снова теоремой Эфроса, а также произведя прежние упрощения с учетом того, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \tau^k d\tau = \frac{k!}{\gamma^k} \tag{3.5}$$

окончательно получаем

$$p_1(r, t) = p_{1k} + Q_* \ln \frac{R}{r} - 2p_{1k} e^{-\varkappa t/\eta} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r/R)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} \times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\alpha_n^2\eta/R^2)^k\,k!}\left(\frac{\varkappa t}{\eta}\right)^k+2Q_*e^{-\varkappa t/\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n r/R)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\alpha_n^2\eta/R^2)^k\,k!}\left(\frac{\varkappa t}{\eta}\right)^k$$

Если же скважина в круговом пласте расположена эксцентрично в точке с координатами (ρ_i, φ_i), то, как это следует из (1.2), p_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial\bar{p}_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\bar{p}_1}{\partial\varphi^2}-\psi p_1=0$$

Ищем его решение в виде

$$p_1=\frac{Q_*}{\sigma}K_0(\sqrt{\psi}\,R^*)+\sum_{n=0}^{\infty}A_nI_n(\sqrt{\psi}\,r)\cos(\varphi-\varphi_i)$$

$$R^*=\sqrt{r^2-2\rho_i\tau\cos(\varphi-\varphi_i)+\rho_i^2}$$

где $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя n-го порядка, A_n — постоянные величины, подлежащие определению из условия (3.1). Выполняя это условие, используем известное соотношение при $r>\rho_i$

$$K_0(\sqrt{\psi}\,R^*)=I_0(\sqrt{\psi}\,\rho_i)K_0(\sqrt{\psi}\,r)+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(\sqrt{\psi}\,\rho_i)K_n(\sqrt{\psi}\,r)\cos(\varphi-\varphi_i)$$

где K_n — модифицированная функция Бесселя n-го порядка.

Найдем

$$A_0=\left[\frac{p_{1k}}{\sigma}-\frac{Q_*}{\sigma}I_0(\sqrt{\psi}\,\rho_i)K_0(\sqrt{\psi}\,R)\right]I_0^{-1}(\sqrt{\psi}\,R)$$

$$A_n=-\frac{2Q_*}{\sigma}I_n(\sqrt{\psi}\,\rho_i)K_n(\sqrt{\psi}\,R)I_n^{-1}(\sqrt{\psi}\,R)$$

Таким образом, для $\bar{p}_1$ получаем выражение

$$\bar{p}_1=\frac{p_{1k}}{\sigma}\frac{I_0(\sqrt{\psi}\,r)}{I_0(\sqrt{\psi}\,R)}+\frac{Q_*}{\sigma}[I_0(\sqrt{\psi}\,R)K_0(\sqrt{\psi}\,r)-$$

$$-I_0(\sqrt{\psi}\,r)K_0(\sqrt{\psi}\,R)\frac{I_0(\sqrt{\psi}\,\rho_i)}{I_0(\sqrt{\psi}\,R)}+\frac{2Q_*}{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\left[I_n(\sqrt{\psi}\,R)K_n(\sqrt{\psi}\,r)-\right.$$

$$\left.-I_n(\sqrt{\psi}\,r)K_n(\sqrt{\psi}\,R)\right]\frac{I_n(\sqrt{\psi}\,\rho_i)}{I_n(\sqrt{\psi}\,R)}\cos(\varphi-\varphi_i)$$

Имея в виду опять применение теоремы Эфроса, вычислим сначала оригинал $f(\tau)$ функции $F(\sigma)$

$$F(\sigma)=\frac{p_{1k}}{\sigma}\frac{I_0(\bar{\sigma}r)}{I_0(\bar{\sigma}R)}+\frac{Q_*}{\sigma}\left[I_0(\bar{\sigma}R)K_0(\bar{\sigma}r)-\right.$$

$$\left.-I_0(\bar{\sigma}r)K_0(\bar{\sigma}R)\right]\frac{I_0(\bar{\sigma}\rho_i)}{I_0(\bar{\sigma}R)}+\frac{2Q_*}{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\left[I_n(\bar{\sigma}R)K_n(\bar{\sigma}r)-\right.$$

$$\left.-I_n(\bar{\sigma}r)K_n(\bar{\sigma}R)\right]\frac{I_n(\bar{\sigma}\rho_i)\cos(\varphi-\varphi_i)}{I_n(\bar{\sigma}R)}$$

При этом, поступая, как и в случае центральной скважины, найдем

$$f(\tau) = p_{1k} - 2p_{1k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \bar{u})}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} e^{\xi} + Q_* \ln u +$$

$$+ 2Q_* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \rho_i / R) J_0(\alpha_n u)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} e^{\xi} +$$

$$+ 4Q_* \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k^* \rho_i / R) J_0(\alpha_k^* u)}{(\alpha_k^*)^2 J_{n+1}^2(\alpha_k^*)} e^{\xi} \cos(\varphi - \varphi_i)$$

где α_n, α_k^* — известные корни уравнений

$$J_0(\alpha_n) = 0, \quad J_n(\alpha_k^*) = 0$$

Теперь, зная $f(\tau)$ и имея $\Psi(\tau, t)$ в (1.13), а также принимая во внимание (3.5) и разложение I_0 в его степенной ряд по теореме Эфроса, легко получим следующее выражение для искомого поля давления $p_1(r, \varphi, t)$ от действия эксцентрично расположенной скважины в круговом пласте:

$$p_1(r, \varphi, t) = p_{1k} -$$

$$-2p_{1k} e^{-\varkappa t/\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r/R)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\varkappa t}{\eta}\right)^k \times$$

$$\times \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \eta / R^2)^k} + Q_* \ln \frac{R}{r} + 2Q_* e^{-\varkappa t/\eta} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n, \rho_i / R)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\varkappa t}{\eta}\right)^k \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \eta / R^2)^k} +$$

$$+4Q_* e^{-\varkappa t/\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k^* \rho_i / R) J_0(\alpha_k^* r/R)}{(\alpha_k^*)^2 J_{n+1}^2(\alpha_k^*)} \times$$

$$\times \cos n(\varphi - \varphi_i) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\varkappa t}{\eta}\right)^k \frac{1}{(1 - \alpha_n^2 \eta / R^2)^m}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в пористых пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
2. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Гостоптехиздат, 1952. 392 с.
3. *Грей Э., Мэтьюз Г. Б.* Функция Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 387 с.

Казань

Поступила в редакцию
14.X.1993