

УДК 532.516.5

© 1995 г. С. И. ЧЕРНЫШЕНКО

АСИМПТОТИКА СТАЦИОНАРНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Рассмотрено осесимметричное стационарное отрывное обтекание тела при больших числах Рейнольдса. Показано, что течение в масштабе тела не описывается моделью Кирхгофа: вблизи тела сохраняется достаточно интенсивное возвратное течение, что и приводит к возникновению вторичной отрывной зоны, наблюдаемой и численных расчетах. Полученные количественные результаты сопоставлены с результатами численных расчетов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное осесимметричное обтекание тела потоком вязкой несжимаемой жидкости. Обезразмерим все переменные, выбрав в качестве основных масштабов характерный размер тела и скорость на бесконечности. Тогда уравнения Навье — Стокса, описывающие это течение, принимают в цилиндрических координатах вид

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega}{y} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega}{y^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\omega y \quad (1.2)$$

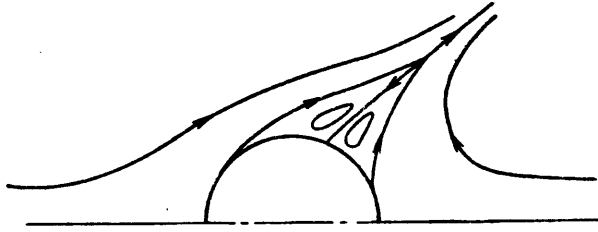
$$u = \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Здесь ψ — функция тока, ω — завихренность, x — координата вдоль оси симметрии, y — расстояние до оси симметрии, u и v — осевая и радиальная компоненты скорости соответственно, Re — число Рейнольдса. Граничными условиями являются условие стремления скорости на бесконечности к единице и условия прилипания и непротекания, т. е. равенство нулю обеих компонент скорости на поверхности тела. Форма тела предполагается такой, что безотрывное его обтекание при больших числах Рейнольдса оказывается невозможным.

Решение сформулированной задачи зависит от числа Рейнольдса Re как от параметра. Численные расчеты обтекания сферы [1] показывают, что при больших числах Рейнольдса вблизи сферы возникают вторичные отрывные зоны. Набросок соответствующей картины линий тока дан на фиг. 1. В аналогичном плоскопараллельном течении вторичный отрыв не возникает [2]. Цель описываемого ниже исследования состоит в том, чтобы путем асимптотического анализа решения системы уравнений (1.1) при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности объяснить возникновение вторичного отрыва.

Асимптотика решения аналогичной задачи о плоскопараллельном обтекании изолированного тела дана в [3]. Асимптотике плоского отрывного течения было уделено очень много внимания (см. список литературы в [3]), в то время как интерес к осесимметричным течениям был заметно слабее. Следует, однако, указать работы [4, 5], посвященные этому вопросу.

2. Течение в масштабе отрывной зоны. Предположим, что при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности продольный и поперечный размеры отрывной



Фиг. 1

зоны тоже стремятся к бесконечности, оставаясь величинами одного порядка. Напомним, что именно так ведет себя форма отрывной зоны в плоскопараллельных течениях [3, 4]. Кроме того, результаты численных расчетов [1] тоже говорят в пользу такого предположения.

Рассмотрим решение в характерном пределе, в котором $x \sim R$, $y \sim R$, где R — половина длины отрывной зоны. Нетрудно видеть, что в этом пределе $\psi \sim R^2$. Если произвести соответствующие подстановки в (1.1) и перейти к пределу $Re \rightarrow \infty$, то вязкие члены выпадут из уравнений. Поэтому в рассматриваемом пределе течение должно стремиться к некоторому течению идеальной жидкости. На масштабе длины отрывной зоны в силу сделанного предположения тело стягивается в пределе в точку. Однако размеры отрывной зоны в этом масштабе остаются конечными. На линиях тока, приходящих из бесконечности, завихренность равна нулю, т. е. течение потенциально. На замкнутых линиях тока внутри отрывной зоны $\omega = F(\psi)$ в силу известных свойств течений идеальной жидкости. По теореме Прандтля — Бэтчелора [6] величина F одинакова на всех линиях тока.

При фиксированной длине отрывной зоны существует однопараметрическое семейство течений идеальной жидкости, отвечающее указанным требованиям. Численный расчет некоторых течений этого семейства описан в [7]. Параметром этого семейства служит скачок постоянной Бернулли на границе отрывной зоны. Чтобы определить величину этого скачка в течении, являющимся правильным пределом вязкого течения при вязкости, стремящейся к нулю, необходимо рассмотреть вязкий пограничный слой на границе отрывной зоны. Этот анализ во многом аналогичен анализу, проведенному в [3], и дает аналогичный результат: в предельном течении скачок постоянной Бернулли оказывается равным нулю. Можно, впрочем, принять этот результат в качестве еще одного предположения и считать самосогласованность получающегося разложения достаточным обоснованием всех сделанных предположений.

Течение с нулевым скачком постоянной Бернулли оказывается особенно простым — это хорошо известный вихрь Хилла. Отрывная зона имеет сферическую форму, а введенная ранее величина R есть радиус этой сферы. Функция тока в этом течении имеет вид

$$\psi = -\frac{3r^2}{4R^2} (R^2 - r^2) \sin^2 \vartheta; \quad \psi = \frac{1}{2} r^2 [1 - (R/r)^3] \sin^2 \vartheta; \quad F = -\frac{15}{2R^2} \quad (2.1)$$

Здесь r и ϑ — сферические координаты с началом в центре вихря, первая формула справедлива внутри отрывной зоны, а вторая — снаружи.

Анализ течения в масштабе отрывной зоны позволяет получить еще одно важное соотношение. Согласно формуле Бобылева — Форсайта [8], скорость диссипации энергии во всем поле течения выражается с учетом граничного условия на бесконечности формулой

$$\iiint_V \Phi \, dv = \mu \iiint_V \omega^2 \, dv \quad (2.2)$$

Эта формула записана в размерном виде. В ней μ — динамическая вязкость

жидкости. Скорость диссипации энергии очевидным образом связана с силой сопротивления. Предположим теперь по аналогии с плоскопараллельным течением, что основной вклад в интеграл от квадрата завихренности дает рассматриваемый сейчас характерный предел. Это предположение можно будет проверить после того, как решения в остальных характерных пределах будут построены. Подставив $\omega = F(\psi)$ и используя последнюю формулу из (2.1), нетрудно вывести из (2.5) формулу для коэффициента сопротивления

$$c_d = \frac{P}{\pi L^2 (\rho U_\infty^2 / 2)} = 60 \frac{R}{Re} \quad (2.3)$$

где P — сила сопротивления, L — масштаб длины, использованный при обезразмеривании всех величин, ρ — плотность жидкости, U_∞^2 — размерная скорость течения на бесконечности. Заметим, что радиус вихря Хилла $R = R(Re)$ пока неизвестен.

3. Пограничный слой для завихренности на границе отрывной зоны. Распределение скоростей, даваемое формулами (2.1), непрерывно. Поэтому, если ввести обычным образом пограничный слой на границе отрывной зоны, т. е. слой достаточно тонкий для того, чтобы в нем проявлялось действие вязкости, в главном члене разложения распределение скоростей внутри этого слоя, как легко проверить, будет тривиальным: поперек слоя скорость не меняется и равна скорости невязкого течения на разделяющей линии тока. Тем не менее построенное выше решение, представляющее собой вихрь Хилла, не является равномерно пригодным на границе отрывной зоны, так как завихренность на этой границе терпит разрыв, в то время как в точном решении завихренность непрерывна. В распределении скорости эта неравномерность проявляется только во втором члене разложения. Проще, однако, рассмотреть главный член разложения завихренности в этом пограничном слое.

Удобно воспользоваться введенными выше сферическими координатами r и ϑ с началом в центре вихря. Введем переменную $f = \omega/y$. Использование этой переменной удобно, так как в невязком течении именно f , а не ω , остается постоянным вдоль линий тока. Введем, наконец, поперечную координату n в пограничном слое так, чтобы $r = R + \delta_2(Re)n$. Здесь δ_2 — характерная толщина пограничного слоя. Записав уравнение для завихренности системы (1.1) в переменных f, n и ϑ , получим, что конвективные и вязкие члены будут одного порядка, если положить $\delta_2 = \sqrt{R/Re}$. Тогда в пределе $Re \rightarrow \infty$ это уравнение стремится к уравнению пограничного слоя

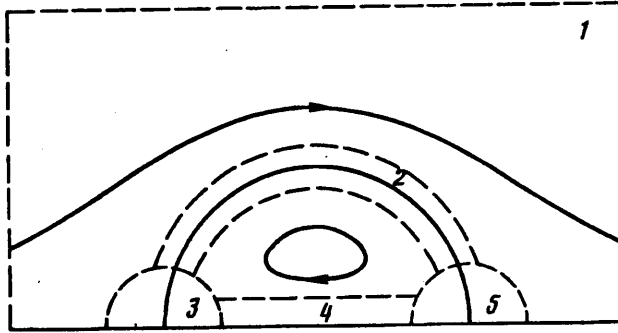
$$u_\vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + v_r \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}$$

Здесь u_ϑ и u_r — соответствующим образом нормированные компоненты скорости в пограничном слое. Поскольку речь идет о вычислении главного члена разложения, эти компоненты уже известны и могут быть вычислены из (2.1). В частности, $u_\vartheta = -(3 \sin \vartheta)/2$. Нормируем функцию тока в пограничном слое с помощью замены $\psi = \delta_2(Re)R(Re)\Psi$. Переходя к переменным Мизеса, т. е. рассматривая Ψ как независимую переменную (вместо n) и используя приведенное выше выражение для окружной компоненты скорости, получим

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{2} \sin^3 \vartheta \frac{\partial^2 f}{\partial \Psi^2} \quad (3.1)$$

Рассматриваемый слой начинается при $\vartheta = \pi$ и оканчивается при $\vartheta = 0$. Поперек слоя Ψ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Сращивание с разложением внутри отрывной зоны показывает, что $f \rightarrow F$ при $\Psi \rightarrow -\infty$.

Чтобы получить начальные условия для f в рассматриваемом слое, необходимо рассмотреть области 3 и 5 вблизи точек торможения и область 4 около оси



Фиг. 2

симметрии в течении (см. фиг. 2), описываемом вихрем Хилла. Это такие области, через которые проходит жидкость из пограничного слоя 2. (Область 1 на этом рисунке — это область с масштабом порядка размеров отрывной зоны.) Дело в том, что при приближении к точкам торможения пограничный слой становится толще и уравнения пограничного слоя перестают описывать течение. С помощью сравнительно простых оценок можно показать, что в этих областях вязкие члены в уравнении (1.1) в пределе при $Re \rightarrow \infty$ выпадают. Соответственно в этих областях $f = \omega/\nu$ остается постоянным вдоль линий тока, как это имеет место в невязких течениях: $f = f(\Psi)$.

Теперь нетрудно указать крайние условия для уравнения (3.1). Так как жидкость, покидающая пограничный слой 2 при $\Psi < 0$, $\vartheta = 0$, возвращается обратно при $\vartheta = \pi$, пройдя через области 5, 4 и 3, в которых $f(\Psi)$ не изменяется, то $f(\pi, \Psi) = f(0, \Psi)$, $\Psi < 0$. Условие при $\Psi \geq 0$ пока запишем в виде $f(\pi, \Psi) = \chi(\Psi)$, $\Psi \geq 0$. Следующая замена сводит уравнение (3.1) и граничные условия к виду

$$\tau = -\frac{3}{4} \int_{\pi}^{\vartheta} \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \vartheta \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \right), \quad \Psi = -2\zeta \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \quad (3.2)$$

$$\zeta > 0, \quad f(0, \zeta) = f(1, \zeta); \quad \zeta < 0, \quad f(0, \zeta) = \chi(-2\sqrt{2}\zeta); \quad \zeta \rightarrow +\infty, \quad f \rightarrow F$$

Задача (3.2) — частный случай задачи, рассмотренной в [9], где было показано, что ее решение существует только при условии

$$F = 4 \int_{-\infty}^0 D(\xi, 1) \chi(-2\sqrt{2}\xi) d\xi \quad (3.3)$$

Функция $D(\xi, b)$ имеет универсальный характер и была затабулирована в [9] (значение параметра b в других задачах может отличаться от единицы). Обратимся теперь к анализу вида функции $\chi(\Psi) = \chi(\psi/(\delta_2 R))$. Эта функция представляет собой распределение величины f непосредственно после выхода из области поворота 3 (см. фиг. 2). Внутри области поворота $f = f(\psi)$. Если допустить, что вязкостью можно пренебречь также и во всех более мелких масштабах, вплоть до масштаба тела, то, значит, всюду $f = f(\psi)$. Это предположение будет подтверждено далее при анализе этих областей. Введем $H(\psi)$ такое, что $dH/d\psi = -f(\psi)$. Легко проверить, что если вязкостью действительно можно пренебречь, то H есть постоянная Бернулли. На всех линиях тока, приходящих к телу из бесконечности сверху по течению, $H = H_{\infty}$ и поэтому $dH/d\psi = 0$. Однако поток, приходящий к телу из отрывной зоны, не обязательно имеет такое же распределение H по линиям тока. Более того, естественно предположить,

что при переходе через линию тока, выходящую из точки отрыва, величина H может иметь разрыв

$$H(\psi + 0) - H(\psi - 0) = B = (q^2(\psi = + 0) - q^2(\psi = - 0))/2$$

Здесь q — модуль скорости. Нетрудно убедиться, что $2\pi B$ есть взятый с обратным знаком поток величины f , исходящий из области с характерным размером тела в циклический пограничный слой. Наличие этого потока нельзя не учитывать, поэтому положим

$$\chi(\Psi) = \chi(\psi/(R\delta_2)) = f(\psi) = -B\delta(\psi + 0), \quad \psi \geq 0$$

Здесь $\delta(\psi)$ — дельта-функция, т. е. такая обобщенная функция, которая равна нулю всюду, кроме точки $\psi = 0$, и такая, что интеграл от нее по любому отрезку, содержащему точку $\psi = 0$, равен единице. Подставив полученное выражение для χ в (3.3), получим

$$F = \frac{-2BD(0, 1)}{\sqrt{2} R\delta_2} = \frac{-2BD(0, 1) \operatorname{Re}^{1/2}}{\sqrt{2} R^{3/2}} \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) выражает баланс между потоком завихренности (или, точнее, величины f), сходящей с поверхности тела, и величиной f внутри отрывной зоны. В частности, при фиксированном размере отрывной зоны и толщине пограничного слоя на ее границе поток f с тела и значение f в отрывной зоне прямо пропорциональны.

4. Основные соотношения. Если бы течение в масштабе тела было течением по схеме Кирхгофа, то скорость на свободной линии тока была бы равна $\sqrt{2B}$. Обычно, рассматривая течение Кирхгофа, скорость на свободной линии тока принимают равной единице и вводят соответствующий коэффициент сопротивления k_d . При этом $c_d = 2k_d B$. Как будет показано далее, течение в масштабе тела в рассматриваемом здесь осесимметричном случае не является течением по схеме Кирхгофа. Тем не менее величину k_d все равно можно ввести, положив $k_d = c_d/(2B)$. Постановка задачи о течении в масштабе тела будет дана ниже, а пока просто предположим, что $k_d = O(1)$.

Формулы (2.4), (2.6), (3.4) и соотношение $c_d = 2k_d B$ представляют собой замкнутую систему четырех алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных c_d , B , R и F . Решение этой системы дает

$$R = 32^{-1/3} (k_d/D_0)^{2/3} \operatorname{Re}^{1/3} \quad (4.1)$$

$$B = 30 (32k_d D_0^2)^{-1/3} \operatorname{Re}^{-2/3} \quad (4.2)$$

$$c_d = 60 (32D_0^2)^{-1/3} k_d^{2/3} \operatorname{Re}^{-2/3} \quad (4.3)$$

Здесь $D_0 = D(0, 1)$. Таким образом, если предположение о том, что k_d остается величиной порядка единицы при $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$ справедливо, то длина отрывной зоны растет пропорционально корню кубическому из числа Рейнольдса.

Здесь можно провести сравнение полученных формул с формулами работ [4, 5], которые были написаны в то время, когда аппарат асимптотических методов еще не был развит в степени, необходимой для решения рассматриваемой задачи. В обеих работах предельное течение в масштабе отрывной зоны предполагается описываемым вихрем Хилла. Соответственно и формулы, вытекающие из этого предположения, одинаковы как здесь, так и в [4, 5]. Это относится и к формуле (2.3). Но формулы (3.4) в этих работах нет. Вместо этого в качестве замыкающего соотношения используются другие, недостаточно обоснованные предположения. Кроме того, отсутствие в то время необходимого математического аппарата вынудило авторов довольно произвольным образом определять характер течения в масштабе тела. В результате количественные результаты получаются разными, хотя следует отметить, что результирующие формулы этих работ можно получить из приведенных выше, подобрав (разумеется, без всякого основания) значения k_d и D_0 .

5. Течение в масштабе тела. Оценим масштабы остальных характерных областей. Из (4.1) и условия баланса вязких и конвективных членов в циклическом пограничном слое $\delta_2 = \sqrt{R/Re}$ следует, что $\delta_2 \sim k_d^{1/3} Re^{-1/3}$. Скорость в слое 2 имеет порядок единицы. Соответственно порядок расхода жидкости в этой области равен $\delta_2 R \sim k_d$. Таким же должен быть и порядок расхода через области разворота пограничного слоя 3 и 5. Из (2.1) следует, что скорость в этих областях имеет порядок δ_3/R , где δ_3 — характерный размер этих областей. Отсюда легко получить, что $\delta_3 \sim k_d^{3/9} Re^{1/9}$. Соответственно масштаб скорости в этой области $U_3 \sim k_d^{-1/9} Re^{-2/9}$. В области 4 скорость имеет порядок единицы, а расход тот же, что и в областях 2, 3 и 5. Отсюда легко найти характерный поперечный размер области 4: $\delta_4 \sim k_d^{1/2}$.

Теперь нетрудно провести соответствующие оценки и убедиться, что в областях 3, 4 и 5 вязкие члены действительно выпадают (предполагая, что k_d имеет порядок единицы при $Re \rightarrow \infty$), что и было использовано при выводе граничных условий для уравнения (3.1).

Вблизи оси симметрии невязкие решения не будут, вообще говоря, обеспечивать достаточную гладкость распределения завихренности, так что необходимо ввести соответствующий вязкий подслои.

Итак, в области 3 течение является эффективно невязким. Главный член разложения функции тока в этой области можно получить непосредственно из (2.1)

$$\psi = -\frac{3}{2} \frac{(x - x_0) y^2}{R} + \dots$$

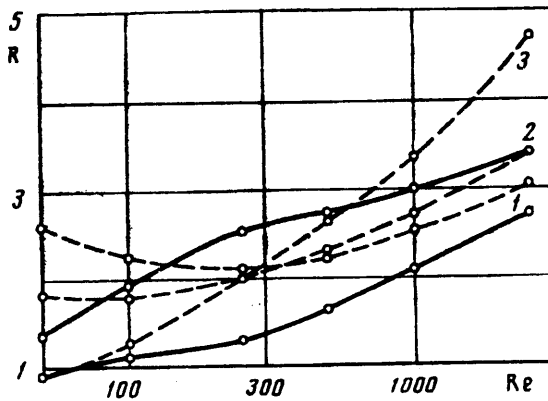
Он описывает невязкое потенциальное течение около критической точки, причем величина x_0 определяется просто выбором положения начала координат на оси симметрии. Завихренность, не равная нулю в отрывной зоне, индуцирует скорости порядка $U_{3\omega} \sim \omega \delta_3 \sim \delta_3^2 F$. Используя (4.1) и последнее соотношение из (2.1), чтобы оценить F , получим $U_{3\omega} \sim k_d^{-2/9} Re^{-4/9}$. Аналогично плоскому случаю [3] наличие потока завихренности с поверхности тела в масштабе области 3 проявляется как разрыв постоянной Бернулли на линии тока, отделяющей отрывную зону. Порядок величины индуцируемых этим разрывом скоростей определяется скачком квадрата скорости на разделяющей линии тока, равным $2B$. Поэтому поправка к скорости, индуцируемая разрывом, имеет порядок $U_{3B} \sim B/U_3 \sim k_d^{-2/9} Re^{-4/9}$. Таким образом, $U_{3B} \sim U_{3\omega}$. Учтя изменения, вносимые наличием скачка постоянной Бернулли, получим уточненное разложение для функции тока во внешней части области 3

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} / \delta_3 \rightarrow 0, \quad y^2 \gg BR^2$$

$$\psi = -\frac{3}{2} \frac{(x - x_0) y^2}{R} + \frac{BR}{3} (|x - x_0| - \sqrt{(x - x_0)^2 - y^2}) + \dots \quad (5.1)$$

Отсутствие здесь слагаемых связанных с завихренностью, объясняется как осевой симметрией, приводящей к уменьшению ω при уменьшении y , так и наличием вязкого подслоя вблизи оси симметрии в области 4, который продолжается в область 3, уменьшая величину завихренности при приближении к началу координат, как и в плоском случае [3].

При приближении к точке $x = x_0, y = 0$ скорость потенциального течения около критической точки уменьшается, в то время как скачок постоянной Бернулли сохраняет свое значение. В некоторой достаточно малой области скачок постоянной Бернулли необходимо учитывать уже в главном члене разложения. Из (4.1) и (4.2) следует, что первый и второй члены разложения для ψ в (5.1) становятся одного порядка при $x - x_0 \sim y \sim k_d^{1/2}$.



Фиг. 3

Этот результат резко контрастирует с ситуацией, возникающей в плоскопараллельных течениях [3]. В плоском течении размеры соответствующей области (области «носика») оказывались много больше размеров тела. Как следствие, скорость возвратного течения при приближении к телу обращалась в нуль в этой, много большей по масштабу, чем тело, области. Течение в масштабе тела при этом оказывалось течением по схеме Кирхгоффа.

Для осуществления аналогичной ситуации в осесимметричном случае, как видно из только что полученной оценки, необходимо, чтобы k_d было много больше единицы. Но такое предположение сразу ведет к противоречию, так как в течении по схеме Кирхгоффа $k_d \sim 1$.

Итак, в осесимметричном случае течение в масштабе тела не является течением по схеме Кирхгоффа. Вместо этого распределение скорости в масштабе тела при удалении от тела стремится к распределению, даваемому формулой (5.1). Иначе говоря, поток набегаёт на тело и слева, и справа. При этом на бесконечности набегающий поток потенциален, а константа Бернулли в левой половине потока больше константы Бернулли в правой половине на величину B (в исходной задаче скорость на бесконечности направлена слева направо). Наличие возвратного течения в масштабе тела и приводит к образованию вторичного отрыва, показанного на фиг. 1.

Для того чтобы завершить построение асимптотической теории, необходимо решить уравнения (1.1)–(1.2) с граничными условиями на бесконечности, вытекающими из (5.1), что позволит определить k_d как функцию Re , R и B . Затем полученная формула $k_d = k_d(Re, R, B)$ совместно с (4.1) и (4.2) составит замкнутую систему алгебраических уравнений, которая позволила бы получить количественные результаты. Это решение очень трудно построить асимптотическими методами, так как следует полагать [10], что с увеличением числа Рейнольдса вторичная отрывная зона будет продолжать дробиться на все более и более мелкие. Вместо этого было бы очень интересно попытаться решить задачу в масштабе тела численно на основе полных уравнений Навье — Стокса. Такой подход, однако, далеко выходит за рамки настоящей работы.

6. Сравнение с численными расчетами. Так как значение k_d осталось не определенным, то возможности количественного сопоставления ограничены. И все же возможно проверить если не всю теорию, то по крайней мере некоторые из ее положений. Результаты такого сравнения приведены на фиг. 3. Сплошные кривые показывают полудлину и радиус наибольшего поперечного сечения (полудлина больше) при обтекании сферы, отнесенные к радиусу сферы, согласно численным расчетам [1]. Отложенное по оси абсцисс число Рейнольдса подсчитано также по радиусу сферы. Согласно изложенной теории, с увеличением числа Рейнольдса отношение полудлины к радиусу наибольшего сечения должно стре-

миться к единице. Штриховые кривые 1—3 показывают радиус вихря Хилла, подсчитанный с использованием формул (2.1), (2.3) и (3.4) соответственно. Сплошные кривые и кривые 1 были приведены и в работе [1]. По их поведению можно судить, в какой мере предельное течение в масштабе отрывной зоны описывается вихрем Хилла. При $Re \rightarrow \infty$ все кривые должны иметь одинаковую асимптотику.

При построении кривой 1 были использованы значения F , полученные непосредственно из численных расчетов. При построении кривой 3 использованы значения c_d , полученные в численных расчетах. Значительное отклонение этой кривой от остальных при наибольших из рассчитанных числах Рейнольдса показывает, что, по-видимому, при этих числах Рейнольдса вклад в интеграл от квадрата завихренности, даваемый областью с характерным размером тела, еще не мал количественно. Заметим, что и в случае плоскопараллельного течения различия между теоретическими и численными результатами были наиболее заметны в коэффициенте сопротивления.

Для построения кривой 2 были использованы еще и значения B , которые полагались равными разности давлений в передней и задней критических точках на сфере. Численные значения этих давлений были получены измерением графиков фиг. 14 и 15 из [1]. Значение $D(0, 1) = D_0$ в формуле (3.4) было при этом взято равным 0,43. Линейная экстраполяция приведенных в [9] значений $D(0, b)$ на $b = 1$ дает $D_0 = 0,419$, а кубическая — $D_0 = 0,434$.

В целом можно заключить, что достигнутые в численных расчетах числа Рейнольдса еще недостаточно велики для того, чтобы можно было ожидать хорошего количественного соответствия, причем в первую очередь это относится к тем характеристикам, которые зависят от параметров течения в окрестности тела. Вместе с тем теоретические и численные результаты не противоречат друг другу, так что можно полагать, что данное выше объяснение возникновения вторичного отрыва в осесимметричных течениях правильно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17622).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fornberg B.* Steady viscous flow past a sphere at high Reynolds numbers//J. Fluid Mech. 1988. V. 190. P. 471—489.
2. *Fornberg B.* Steady viscous flow past a circular cylinder up to Reynolds number 600//J. Comput. Phys. 1985. V. 61. № 2. P. 297—320.
3. *Чернышенко С. И.* Асимптотика стационарного отрывного обтекания тела при больших числах Рейнольдса//ПММ. 1988. Т. 52. № 6. С. 958—966.
4. *Parlange J. Y.* Determination of the wake behind a bluff body of revolution at high Reynolds numbers//J. Aircraft. 1969. V. 6. № 6. P. 569—571.
5. *Таганов Г. И.* Вязкая диссипация и законы сопротивления тел при $0 < Re < 1$ //Числ. методы тех. сплош. среды. Новосибирск, 1973. Т. 4. № 4. С. 126—142.
6. *Batchelor G. K.* On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number//J. Fluid Mech. 1956. V. 1. № 2. P. 177—190.
7. *Кожуро Л. А.* Семейство осесимметричных вихревых течений с поверхностью разрыва постоянной Бернулли//ПММ. 1981. Т. 45. № 1. С. 88—94.
8. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
9. *Чернышенко С. И.* О приближенном способе определения завихренности в зоне отрыва при вязкости, стремящейся к нулю//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 10—15.
10. *Чернышенко С. И.* Отрывное обтекание уступа, высота которого много больше толщины нижнего подслоя области взаимодействия//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 25—30.