

УДК 532.5.013.4:519.67

© 1995 г. О. Ю. ЗИКАНОВ

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ И ВТОРИЧНЫХ РЕЖИМОВ В СФЕРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

Во всех проведенных ранее численных исследованиях сферического течения Куэтта рассматривались только осесимметричные режимы. В то же время в экспериментах [1—4] было обнаружено, что при вращении обеих сфер и малой толщине слоя центробежная неустойчивость основного течения приводит к появлению неосесимметричных вторичных течений типа бегущих азимутальных волн. Ниже излагаются результаты первого численного исследования таких течений. Решение линейной задачи об устойчивости основного течения и моделирование вторичных течений на основе полных нелинейных уравнений Навье — Стокса позволили дополнить и объяснить многие экспериментально полученные результаты. Определены тип бифуркации и структура возмущений, рост которых приводит к появлению трехмерных нестационарных течений, описаны переходы между различными вторичными режимами в области небольшой закритичности.

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в слое между двумя концентрическими сферами, возникающее из-за вращения сфер вокруг общей оси с постоянными угловыми скоростями. Течение обычно называется сферическим течением Куэтта. Используются следующие определяющие параметры задачи: относительная толщина жидкого слоя  $\delta = (R_2 - R_1)/R_1$ , число Рейнольдса  $Re_1 = R_1^2 \Omega_1 / \nu > 0$  и отношение угловых скоростей вращения граничных сфер  $\omega = \Omega_2 / \Omega_1$  или заменяющее его второе число Рейнольдса  $Re_2 = R_2^2 \Omega_2 / \nu$ . Здесь  $R_i$ ,  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) — радиусы и угловые скорости внутренней ( $i = 1$ ) и внешней ( $i = 2$ ) сфер,  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Проведенные ранее исследования показали, что поведение течения сильно зависит от значений всех параметров задачи. В экспериментах [1—4] было показано, что в тонких слоях  $\delta \leq 0,24$  при достаточно быстром вращении обеих граничных сфер в одну или в разные стороны центробежная неустойчивость основного течения приводит к формированию трехмерных, периодических по времени вторичных течений, имеющих вид бегущих азимутальных волн. Для численного исследования этих неустойчивостей выбрано значение  $\delta = 0,11$ , поскольку наиболее полные экспериментальные наблюдения были проведены для слоя с близкой толщиной  $\delta = 0,1096$ . Данные экспериментов определили и рассматриваемый в статье диапазон значений  $-1200 \leq Re_2 \leq 2500$ . При обзоре полученных ранее результатов особое внимание уделено работам, в которых рассматривались близкие значения параметров.

Характерной особенностью задачи об устойчивости сферического течения Куэтта является то, что, как было показано еще в самых первых экспериментальных и теоретических исследованиях (обзор можно найти в [3]), само основное течение имеет достаточно сложный вид и не может быть описано аналитически. Ранее предпринимались попытки вычисления основного течения при помощи разложения поля скоростей по степеням  $Re_1$  [5] или численно, при помощи спектральных, полуспектральных и разностных методов. Более поздние вычисления [6—8] показали, что точное представление основного течения вблизи

предела устойчивости требует трудоемких вычислений, использующих большое число пробных функций или точек дискретизации.

Экспериментальные исследования неустойчивости и вторичных режимов в сферическом течении Куэтта долгое время касались лишь первой неустойчивости в случае вращения только внутренней сферы, т. е.  $Re_2 = 0$  (см., например, [9—11]). Было обнаружено, что в тонких слоях, так же как и в цилиндрическом течении Куэтта, центробежная неустойчивость основного течения приводит к формированию осесимметричных стационарных кольцевых вихрей Тейлора. Отличие состоит в том, что в сферическом слое благоприятное распределение завихренности образуется сначала только в приэкваториальной области и формируются лишь два вихря, располагающиеся симметрично вблизи экватора. На более высоких широтах сохраняется меридиональная циркуляция, характерная для основного течения. Течение с одной парой вихрей Тейлора далее называется режимом *1*.

Экспериментальное исследование первой неустойчивости сферического течения Куэтта при  $\delta = 0,1096$  и различных значениях  $Re_2$  было проведено в [1—4]. Оказалось, что описанный выше переход к режиму *1* происходит лишь в узком диапазоне  $-500 < Re_2 < 1940$ . При больших или меньших  $Re_2$  на пределе устойчивости образуются неосесимметричные течения, имеющие вид бегущих азимутальных волн.

Формирующееся при  $1940 < Re_2 < 4900$  вторичное течение далее называется течением со спиральными вихрями Тейлора или режимом *C*. Оно подобно режиму *1* с тем отличием, что приэкваториальные вихри Тейлора разомкнуты и вся структура движется в направлении вращения сфер. Это же течение появляется на пределе устойчивости при  $1320 < Re_2 < 1940$  как метастабильное. После некоторого времени существования, зависящего от  $Re_2$ , оно превращается в течение с одной парой вихрей Тейлора. Эксперименты показали, что при  $-10^3 < Re_2 < 1940$  течение с разомкнутыми вихрями Тейлора устойчиво при критических значениях  $Re_1$ .

При вращении граничных сфер в разные стороны, при  $-3350 < Re_2 < -500$  на пределе устойчивости основного течения также наблюдается вторичный режим типа бегущей азимутальной волны. Это течение отличается от режима *C* более сложной структурой в радиальном направлении и имеет аналог в цилиндрическом течении Куэтта [12]. При  $Re_2 < -3350$  или  $Re_2 > 4900$  происходят переходы к иным вторичным течениям, но эти значения  $Re_2$  находятся за пределами выбранного диапазона.

Характерными свойствами задачи являются сильно выраженная неединственность вторичных течений и зависимость формы этих течений и структуры переходов между ними от значений параметров. Лучше всего изучен случай вращения только внутренней сферы. Диаграмму различных экспериментально наблюдаемых режимов для этого случая при  $\delta = 0,1096$  можно найти, например, в [3]. Кроме течения с одной парой вихрей Тейлора в области небольшой закритичности  $Re_{1c} = 1225 \leq Re_1 < 2500$  существуют режимы с двумя, тремя и четырьмя парами вихрей (далее режимы *1*, *2*, *3* и *4*), модификации всех этих течений с волнообразными возмущениями на кольцевых вихрях и течение со спиральными вихрями. В некотором диапазоне значений  $Re_1$  одновременно могут существовать 5 различных вторичных режимов (*1—4* с синусоидальными возмущениями и *C*). Подобная неединственность вторичных течений имеет место и при других значениях  $Re_2$  [1—4]. Например, при  $1940 < Re_2 < 4900$ , где на пределе устойчивости формируется режим *C*, течение с одной парой вихрей Тейлора может быть получено скачкообразным изменением  $Re_1$  с докритического значения до значения, несколько превышающего критическое. При еще больших значениях  $Re_1$  неединственность вторичных течений усиливается — кроме режимов *1* и *C* в экспериментах получался и режим *2*.

Практически все проведенные ранее численные исследования устойчивости и

вторичных режимов касались только осесимметричных течений в случае неподвижной внешней сферы. В частности, для перехода от основного течения к режиму 1 показано [13, 14], что основное течение при  $Re_1 = Re_c$  теряет устойчивость по отношению к осесимметричному, антисимметричному относительно плоскости экватора возмущению. Переход к течению с одной парой вихрей Тейлора происходит в результате докритической бифуркации и связан с нарушением экваториальной симметрии.

Подробные расчеты для слоя  $\delta = 0,11$  при  $Re_2 = 0$  и  $Re_1 \leq 2700$  проводились в [6]. Стационарные осесимметричные решения полной нелинейной задачи находились методом установления. Показано, что имеется неединственность численных решений при закритических значениях параметров. Получена диаграмма существования режимов 1—4 в зависимости от значений  $Re_1$  и структура переходов между режимами, происходящих при квазистационарном изменении  $Re_1$ . Области существования различных режимов оказались качественно подобны обнаруженным в экспериментах. В то же время не все из экспериментально наблюдаемых переходов удалось получить при численном моделировании. В частности, связанный с первой неустойчивостью переход  $0 \rightarrow 1$  (символ 0 обозначает основное течение) получался только при добавлении к основному течению конечных возмущений специальной формы. Причина этого, очевидно, в том, что в расчетах [6] накладывалось условие симметричности течения относительно плоскости экватора.

1. Постановка задачи и численные методы. Стационарные и периодические по времени  $t$  режимы течения находятся как предел при  $t \rightarrow \infty$  решения начально-краевой задачи, состоящей из полных нелинейных уравнений Навье — Стокса и неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости, граничных условий прилипания на сферах и начального условия, в качестве которого обычно принимается решение, полученное при близких значениях параметров. Применяемый здесь численный метод является модификацией методов, использованных в [6, 8, 14] для вычисления осесимметричных течений и в [14] для решения линейной задачи об устойчивости. Подробное изложение метода можно найти в [15].

Для вычисления осесимметричных течений используется разложение полей компонент скорости и давления по функциям Лежандра  $P_l, P_l^j$ . Так, например, для радиальной компоненты скорости

$$u \approx \sum_{l=0}^L u_l(r, t) P_l(\cos \theta) \quad (1.1)$$

Соленоидальное поле скоростей трехмерных течений представляется в виде суммы тороидальной и полоидальной составляющих

$$U = \text{rot}(T(r, \theta, \varphi, t) e_r) + \text{rot}^2(S(r, \theta, \varphi, t) e_r) \quad (1.2)$$

Скалярные функции  $T, S$  и давление  $P$  разлагаются в ряды по сферическим функциям. Так, например,

$$S \approx \sum_{m=-M}^M \sum_{l=|m|}^L S_{lm}(r, t) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (1.3)$$

$$Y_l^m = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

где  $P_l^m$  — присоединенная функция Лежандра.

Это позволяет разделить переменные в линейных частях уравнений движения. Коэффициенты разложения нелинейных членов соответственно по полиномам Лежандра или сферическим функциям находятся интегрированием по методу Гаусса. Для решения полученных после преобразований линейных систем уравнений в частных производных по  $r, t$  применяется двухслойная по времени,

трехточечная по радиусу разностная схема. На каждом временном шаге получаются краевые задачи для систем линейных алгебраических уравнений, которые решаются методом матричной прогонки. При этом размерность матриц не превышает трех.

Факт окончания переходных процессов и формирования решения, соответствующего данным значениям параметров, определяется по установлению суммарных вращательных моментов, передаваемых течением на внутреннюю ( $\tau_1$ ) и внешнюю ( $\tau_2$ ) сферы

$$\tau = - \frac{3}{8\pi R_1^3 \Omega_1 \rho V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tau_{\varphi} R_i^3 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{R_i^3}{R_1^3} \left( \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{w_1}{r} \right) \Big|_{r=R_i/R_1} \quad (1.4)$$

где  $w_1$  — коэффициент при  $P_1$  в разложении азимутальной компоненты скорости. Очевидно, что в установившемся течении должно выполняться соотношение  $\tau_1 + \tau_2 = 0$ . Необходимо отметить, что единственное полученное нестационарное решение имеет вид бегущей азимутальной волны и поэтому формула (1.4) и упомянутые выше критерии установления вполне пригодны для него.

Почти во всех работах по численному исследованию сферического течения Куэтта отмечается критическое влияние пространственного разрешения численной схемы не только на количественную, но и на качественную картину течения. Расчеты показали, что в большей части рассматриваемого диапазона параметров достаточно хорошая точность достигается при числе точек дискретизации по радиусу  $K = 10$ . При  $Re_2 < -800$  оказалось необходимым увеличить значение  $K$  до 15. При увеличении  $K$  до соответственно 15 и 20 интегральные характеристики течения менялись менее чем на 1% и пространственная структура течения оставалась практически той же самой.

Выбор числа гармоник  $M$  по азимутальному углу  $\varphi$  в случае расчета неосесимметричных течений определялся соображениями экономии машинного времени и тем фактом, что наблюдаемые экспериментально в исследуемом диапазоне параметров трехмерные вторичные течения имеют малую периодичность по  $\varphi$ , которая примерно соответствует главному волновому числу  $m = 1$  [1—4]. Поэтому все расчеты неосесимметричных течений проводились при  $M = 6$ .

Определяющим является выбор числа  $L$  пробных функций по меридиональному углу  $\theta$ . Как было обнаружено еще в [6], минимальным значением  $L$ , при котором результаты численного моделирования течений в слое  $\delta = 0,11$  согласуются с экспериментальными данными, является  $L = 60$ . Расчеты подтвердили, что такое значение позволяет получить качественно верную картину переходов между различными режимами. Однако при этом пространственные характеристики течений, такие, как, например, меридиональный размер вихрей Тейлора, отличаются от наблюдаемых в эксперименте (в вычисленном режиме  $I$  вихри оказались на 10—15% больше, чем в экспериментальном). Увеличение  $L$  до 90 позволяет уменьшить это расхождение до 3—5%, но практически не меняет интегральных характеристик течений и значений  $Re_1$ , при которых происходят переходы между режимами. Поэтому большая часть расчетов проводилась при  $L = 60$ .

Для вычисленных таким образом основного течения и осесимметричных стационарных вторичных течений решалась задача о линейной устойчивости. Независимость коэффициентов уравнений движения и граничных условий от азимутального угла  $\varphi$  позволяет отдельно рассматривать устойчивость относительно возмущений с различной периодичностью по  $\varphi$ . Кроме того, симметрия основного течения относительно экватора позволяет разделить экваторосимметричные и экватороантисимметричные линейные моды. (Антисимметричным относительно экватора здесь называется течение, для которого, в противоположность случаю симметричного течения, радиальная и азимутальная компоненты скорости являются нечетными функциями широты, а меридиональная компонента — четной функцией.)

Так же как при расчете неосесимметричных течений, соленоидальное поле возмущений скорости представляется в виде суммы тороидальной и полоидальной составляющих. Задача решается полуспектральным методом, аналогичным описанному выше. Скаляры  $T$ ,  $S$  и давление  $P$  для моды с волновым азимутальным числом  $m$  разлагаются по сферическим функциям Лежандра

$$T = \sum_{l=m}^L T_{lm}(r, t) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (1.5)$$

В суммировании участвует половина членов каждого ряда, соответствующая экваториальной симметрии исследуемого возмущения. Уравнения в частных производных по  $r, t$  от неизвестных  $T_{lm}, S_{lm}, P_{lm}$  решаются при помощи конечно-разностной схемы, аналогичной использованной при

вычислении основного течения. Собственный вектор и собственное число  $\lambda + i\omega$  наиболее неустойчивой (или наименее устойчивой) моды находятся в результате вычисления решения начально-краевой задачи для возмущения при  $t \rightarrow \infty$

2. Линейная задача об устойчивости основного течения. Основное течение имеет достаточно сложный вид и существенно зависит от всех определяющих параметров задачи. Движение состоит из азимутального почти кругового вращения и значительно меньшей по интенсивности основной меридиональной циркуляции, форма которой определяется соотношением между угловыми скоростями вращения граничных сфер. Вычисления показали, что большая часть исследуемого диапазона параметров входит в область доминирования внутренней сферы, где меридиональное течение состоит из двух симметричных относительно экватора вихрей, по одному в каждом полушарии. Направление циркуляции в вихрях таково, что на экваторе жидкость течет от внутренней сферы к внешней. Кроме того, часть вычислений была проведена в области смешанного влияния обеих сфер, где при вращении сфер в разные стороны меридиональное течение в каждом полушарии состоит из двух вихрей с разным направлением вращения. Граница между областями с различным типом меридиональной циркуляции пересекает кривую  $Re_{1c}(Re_2)$  линейной устойчивости основного течения при  $Re_2 \approx 940$ .

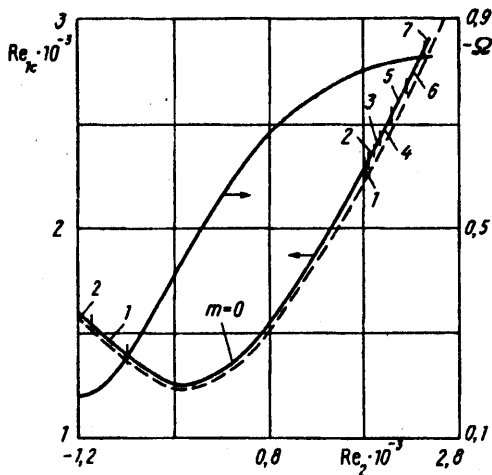
В работах [7, 8, 14] было обнаружено, что в случае  $Re_2 = 0$  при  $Re_1$ , приближающемся к критическому значению  $Re_{1c}$  потери устойчивости, основное течение модифицируется с образованием структуры, которая обычно называется течением типа «pinch flow». (В этих же работах показано, что данную модификацию нельзя считать бифуркацией.) По обе стороны от экватора, на небольшом (порядка толщины слоя) расстоянии от него линии тока меридионального течения сжимаются, образуя сепаратрису. Это приводит к достаточно сильному перераспределению углового момента течения, которое выражается в искривлении линий постоянной угловой скорости вблизи экватора. Одновременно в спектре разложения поля скоростей по функциям Лежандра появляется второй локальный максимум при значениях  $l$ , примерно соответствующих масштабу толщины слоя.

Аналогичное изменение структуры основного течения было обнаружено автором во всем рассматриваемом диапазоне  $Re_2$ . При значениях  $Re_1$ , меняющихся от 0 до примерно  $Re_{1c} - 50$ , основное течение может быть точно описано рядами типа (1.1) с небольшим числом членов  $L$  [15]. Например, можно взять  $L = 20$ . Напротив, при  $Re_1 \rightarrow Re_{1c}$  для описания появляющихся мелкомасштабных движений необходимо использовать значительно большее  $L$ . Из расчетов следует, что минимальным достаточным значением является  $L = 60$ . Далее будет показано, что учет достаточного числа пробных функций по  $\theta$  при вычислении основного течения имеет решающее значение при исследовании линейной устойчивости.

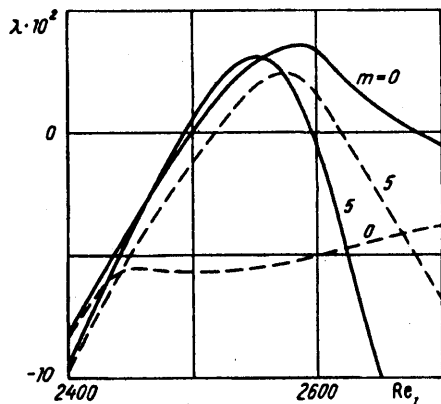
Критические числа  $Re_{1c}$  линейной устойчивости основного течения находились в следующем диапазоне параметров:  $\delta = 0,11$ ,  $Re_2 \in [-1200; 2500]$ . Поиск наиболее опасного возмущения потребовал определения устойчивости относительно осесимметричной моды и первых девяти неосесимметричных мод. При этом отдельно рассматривались возмущения, симметричные и антисимметричные относительно плоскости экватора.

Вычисления проводились при двух значениях параметра усечения  $L$  в (1.5):  $L = 60$  и 90. Использовалось то же число  $K$  точек дискретизации по радиусу, что и при вычислении основного течения. Оказалось, что расчеты при  $L = 60$  дают не совсем точное представление о пространственной структуре возмущений. При этом значения собственных чисел, вычисленные при двух значениях  $L$ , практически неразличимы. Поэтому большая часть расчетов проводилась при  $L = 60$ .

Основные результаты расчетов приведены на фиг. 1, где изображены критические числа  $Re_{1c}(Re_2)$  (сплошная кривая) и номера  $m$  наиболее опасной моды. Штриховая кривая на фиг. 1 соответствует экспериментально определенной в



Фиг. 1



Фиг. 2

[1—4] нижней границе существования вторичных режимов. При сравнении численной и экспериментальной кривых необходимо учитывать, что, как показано в экспериментах [1—4] и расчетах [13—17], ветви вторичных решений ответвляются докритически. Величина гистерезиса  $\Delta Re_1$  в рассматриваемом диапазоне параметров не превышает 25 [15]. Поэтому можно говорить о достаточно хорошем (в пределах 4%) согласии результатов экспериментов и описываемых здесь расчетов.

Ценность решения линейной задачи заключается, в частности, в том, что оно дает информацию о структуре возмущений, рост которых вызывает переход ко вторичному течению. Как уже упоминалось, до сих пор исследовался только случай  $Re_2 = 0$  и было показано [13, 14], что в тонких слоях неустойчивость обусловлена растущими монотонными, осесимметричными, антисимметричными относительно экватора возмущениями. Расчеты показали, что аналогичная неустойчивость имеет место при  $-646 < Re_2 < 1811$ . Вне этого диапазона наиболее опасные возмущения имеют вид бегущих азимутальных волн. При  $1811 < Re_2 \leq 2500$  эти возмущения антисимметричны относительно плоскости экватора. При  $-1200 \leq Re_2 < -646$ , напротив, наиболее опасные возмущения симметричны относительно экватора.

Пространственная структура наиболее опасных возмущений подробно описана в [15] для различных значений  $Re_2$ . Мода  $m = 0$  представляет собой систему занимающих всю область течения осесимметричных кольцевых вихрей с чередующимся направлением циркуляции. Интенсивность вихрей резко падает от экватора к полюсам. Неосесимметричные моды имеют подобную пространственную структуру с тем отличием, что отходящие от экватора кольцевые вихри теперь не замкнуты.

Все неосесимметричные возмущения в задаче имеют вид азимутальных бегущих волн. Оказалось, что при одинаковых значениях  $Re_2, Re_1$  фазовые скорости распространения всех волн практически совпадают, т. е. частоты осцилляций  $\omega_m$  возмущений с различным значением волнового числа  $m$  и с различной симметрией относительно экватора связаны соотношением  $\omega_m = m\Omega$ . Это соотношение выполняется с точностью до третьего знака для всех  $m$  почти во всем диапазоне  $Re_2$ . Исключение составляет лишь область больших отрицательных  $Re_2$ , где фазовые скорости экваторосимметричных и экватороантисимметричных возмущений различаются на величину, зависящую от  $Re_2$  и имеющую порядок 10—15%.

Зависимость вычисленной при  $Re_1 = Re_c$  фазовой скорости наиболее быстро растущих (или наименее медленно убывающих) неосесимметричных возмущений от  $Re_2$  изображена на фиг. 1. Всюду в рассматриваемом диапазоне  $Re_2$   $\Omega < 0$ , т. е. бегущие волны распространяются в направлении вращения внутренней сферы. В экспериментах [1—4] не проводились точные измерения фазовых скоростей вторичных режимов типа бегущих волн. Известно только, что при  $Re_2 > 1940$  фазовая скорость режима  $C$  имеет значение, промежуточное между угловыми скоростями вращения граничных сфер. Можно видеть, что результаты, изображенные на фиг. 1, соответствуют этим экспериментальным данным.

Наложение искусственного требования экваториальной симметрии позволяет вычислять стационарные решения, лежащие на ветви основного течения в закритической области  $Re_1 > Re_c$ . При этом, конечно,  $Re_1$  должно быть меньше значения, при котором основное течение становится неустойчивым относительно моды, имеющей ту же степень симметрии, что и основное течение, т. е. осесимметричной экваторосимметричной моды. Это ограничение оказалось существенным лишь при больших отрицательных  $Re_2$ , где уже при малой закритичности основное течение становится неустойчивым относительно осциллирующей моды с такой симметрией. Подобные осцилляции были исследованы для более толстого слоя в [8]. Таким образом, в закритической области могут быть найдены временные декременты различных линейных мод и вычислены критические числа  $Re_1^m$ , при которых основное течение становится неустойчивым относительно моды  $m$ .

Результаты подробно описаны в [15]. На фиг. 2 показана картина зависимости вещественных частей  $\lambda$  собственных чисел возмущений с волновыми числами  $m = 0$  и 5 от  $Re_1$  при  $Re_2 = 2050$ . Сплошные линии соответствуют экватороантисимметричным возмущениям, штриховые — экваторосимметричным. Скорости роста возмущений с одинаковым  $m$ , но с различной симметрией относительно плоскости экватора начинают различаться только при  $Re_1$ , приближающемся к  $Re_c$ . Далее будет показано, что это связано с описанной выше модификацией основного течения при  $Re_1 \rightarrow Re_c$ .

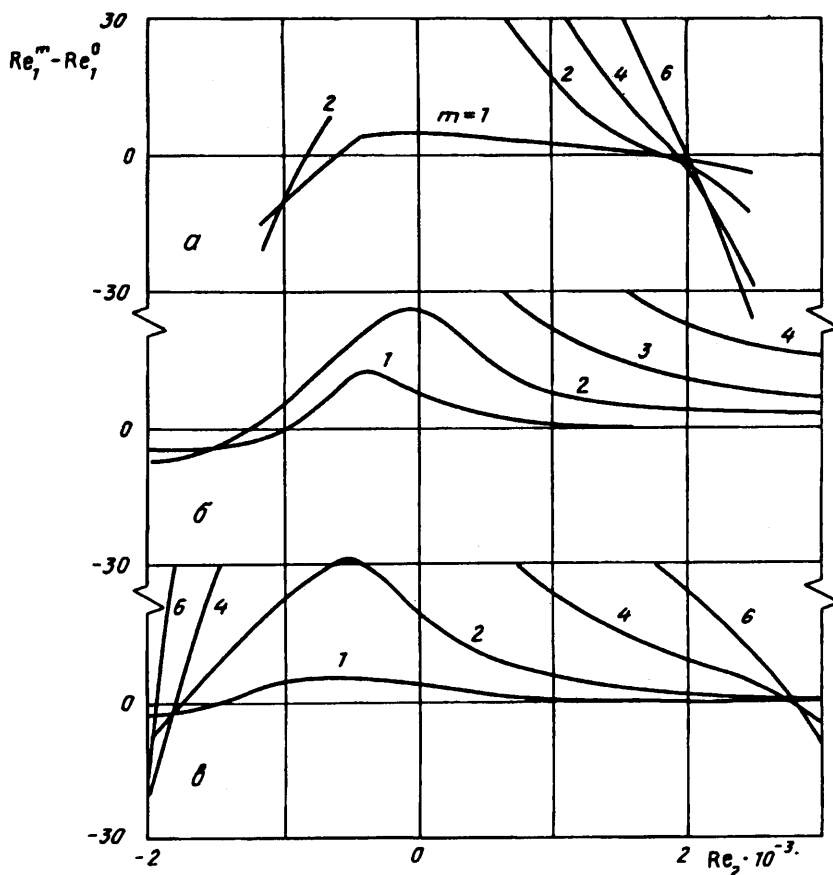
Для того чтобы выяснить, какие особенности структуры основного течения определяют описанную выше картину линейной устойчивости, были проведены дополнительные расчеты. Исследовалась устойчивость чисто азимутального течения Стокса и основного течения, вычисленного при представлении его недостаточным числом членов галеркинского разложения (1.1) ( $L = 20$ ).

Течение Стокса представляет собой стационарное решение задачи для основного течения, полученное в классическом приближении Стокса, т. е. в пределах  $Re_1 \rightarrow 0$  при  $\omega = \text{const}$

$$U_s = \frac{(\alpha^3 \omega - 1) r^3 - \alpha^3 (\omega - 1)}{(\alpha^3 - 1) r^2} \sin \theta e_\varphi, \quad a = \frac{R_2}{R_1} = 1 + \delta \quad (2.1)$$

Ясно, что (2.1) не является решением полной задачи при конечных значениях  $Re_1$ . Однако можно формально исследовать его устойчивость, заменив в уравнениях для возмущений поле скоростей основного течения на  $U_s$ . Следует сказать, что в тонких слоях в рассматриваемом здесь диапазоне  $Re_2$  и  $Re_1$  меридиональная скорость основного течения значительно меньше азимутальной. При этом азимутальная скорость мало отличается от описываемой формулой (2.1). Некоторое отличие наблюдается в приэкваториальной области при формировании «pinch flow». Поэтому течение Стокса является хорошим приближением для азимутальной составляющей основного течения.

Расчет основного течения с  $L = 20$  дает правильный результат до тех пор, пока при увеличении  $Re_1$  не начинает формироваться «pinch flow». При больших  $Re_1$  получается неверно вычисленное основное течение с неискаженными вихрями меридиональной циркуляции и линиями постоянной угловой скорости, т. е.



Фиг. 3

качественно подобное течению при меньших  $Re_1$ . В отличие от полного основного течения, вычисленного при  $L = 60$ , это течение называется далее неполным. Исследование устойчивости такого течения и сравнение результатов с описанными выше позволяют определить роль образования «pinch flow» в появлении того или иного типа неустойчивости. Точно так же исследование устойчивости течения Стокса позволяет определить собственную роль меридиональной циркуляции.

Вычисления показали, что как течение Стокса, так и неполное основное течение равно устойчивы или неустойчивы относительно возмущений с различной экваториальной симметрией. Экваторосимметричная и экватороантисимметричная моды с одинаковым значением  $m$  всегда имеют одинаковые (в пределах точности вычислений) собственные числа. Уже упоминалось, что подобное вырождение нарушается для полного основного течения лишь при образовании «pinch flow». Таким образом, можно сделать вывод, что именно эта модификация основного течения при  $Re_1 \rightarrow Re_{1c}$  приводит к тому, что первая неустойчивость оказывается связанной с растущим возмущением определенной экваториальной симметрии.

На фиг. 3 для различных течений изображены кривые значений  $Re_1^m - Re_1^0$  для некоторых  $m$ . Можно видеть, что, так же как и для полного основного течения (фиг. 3, а), для течения Стокса (фиг. 3, б) и неполного основного течения (фиг. 3, в) существует интервал значений  $Re_2$  вблизи нуля, в котором эти течения впервые теряют устойчивость относительно осесимметричных монотонных возмущений (моды  $m = 0$ ). Пространственная структура этих возмущений подобна структуре возмущения основного течения, рост которого инду-



цирует переход к течению с парой вихрей Тейлора. Это согласуется с представлением о вихрях Тейлора как о результате центробежной неустойчивости.

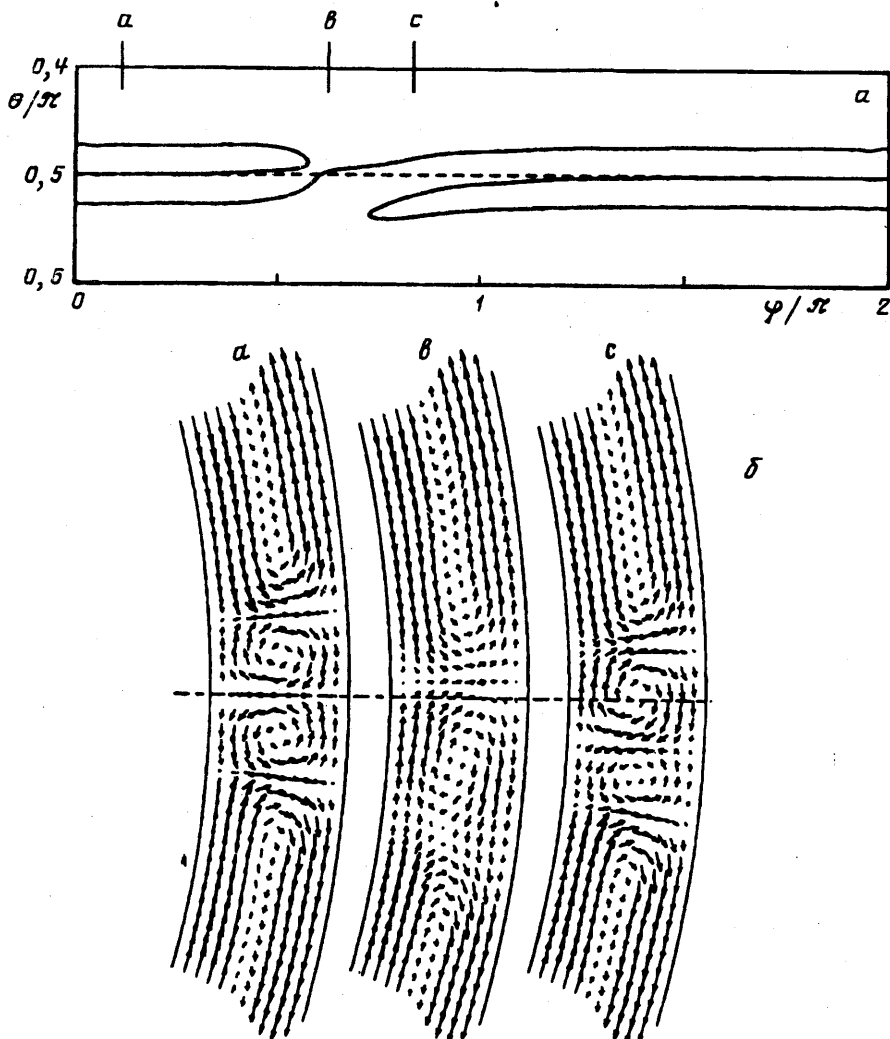
При уменьшении  $Re_2$  для всех трех случаев (фиг. 3) происходит смена типа неустойчивости — наиболее опасными становятся моды типа бегущих азимутальных волн. Отличие состоит в том, что в случаях *б, в* это происходит при несколько меньших значениях  $Re_2$ . Можно в связи с этим предположить, что появление первой неустойчивости относительно трехмерных возмущений при отрицательных  $Re_2$  связано в основном с изменением структуры дифференциального вращения основного течения.

Иначе обстоит дело при больших положительных  $Re_2$ . Если уменьшение числа  $L$  пробных меридиональных функций вызывает лишь сдвиг области наиболее опасных возмущений типа бегущих волн вправо (фиг. 3, *а, в*), то редукция основного течения к чисто азимутальному течению Стокса приводит к еще одному вырождению: при увеличении  $Re_2$  критические числа  $Re_1^m$  сходятся друг к другу, сохраняя при этом соотношение  $Re_1^0 < Re_1^1 < Re_1^2 < \dots$ . Для проверки этого явления вычисление устойчивости течения Стокса было проведено при значениях  $Re_2$  до 4500. Можно сделать вывод, что изменение азимутального движения при увеличении  $Re_2$  и  $Re_1$ , близком к критическому (оно начинает удовлетворять основному ограничению теоремы Тейлора — Праудмена — относительно медленные движения в быстро вращающейся системе), может сблизить пределы устойчивости относительно осесимметричных и трехмерных возмущений. При этом только наличие меридиональной циркуляции, перераспределяющей угловой момент основного течения, приводит к тому, что возмущения типа бегущих волн становятся наиболее опасными.

Полученные результаты исследования устойчивости сферического течения Куэтта достаточно хорошо согласуются с данными экспериментов [1—4]. При  $Re_2 > 1940$  и при  $Re_2 < -500$  в экспериментах на пределе устойчивости появлялись вторичные режимы типа азимутальных бегущих волн. Расчеты дают качественно подобные области  $Re_2 > 1811$  и  $Re_2 < -646$ , в которых неустойчивость связана с растущими возмущениями этого типа. Есть достаточно хорошее согласие между границей линейной устойчивости и экспериментально определенной нижней границей существования вторичных режимов.

**3. Моделирование вторичных течений.** Вторичные течения вычислялись при единственном значении  $Re_2 = 2050$ . Согласно результатам решения линейной задачи, при таком значении  $Re_2$  на пределе устойчивости должен происходить переход к течению типа бегущей азимутальной волны. Большое количество вычислений, необходимых для выполнения одного шага по времени при решении нелинейной неосесимметричной задачи, не позволило моделировать этот переход путем квазистационарного увеличения  $Re_1$ . Значение  $Re_1$  увеличивалось скачком с критического числа устойчивости основного течения  $Re_{1c} = 2492,9$  до значения  $Re_1 = 2495$ , при котором становятся растущими экватороантисимметричные линейные моды типа бегущих волн с азимутальными волновыми числами  $m = 2, 3, 4, 5$ . Для того чтобы ускорить переход, на основное течение накладывалось возмущение специального вида, энергия которого составляла 0,1 от энергии основного течения. Вычисления показали, что переход происходит с нарушением экваториальной симметрии и может быть разделен на два этапа. На первом этапе суммарная энергия антисимметричных относительно экватора компонент скорости растет, на втором — падает до ненулевого значения, соответствующего окончательно сформировавшемуся вторичному течению, которое, таким образом, не симметрично относительно плоскости экватора.

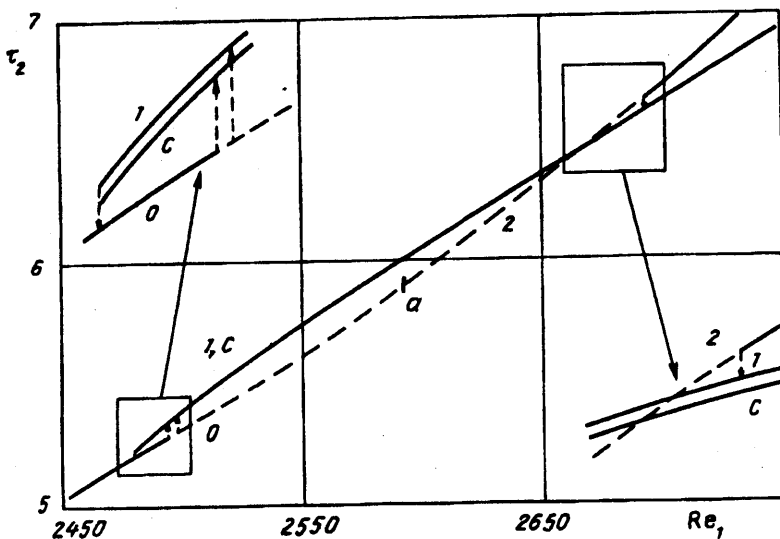
Опишем структуру получающегося в результате перехода трехмерного течения. Оно имеет вид азимутальной бегущей волны, распространяющейся в направлении вращения сфер. Фазовая скорость распространения с точностью до 2% совпадает с фазовой скоростью распространения неосесимметричных линейных мод при тех же



Фиг. 4

значениях параметров. Пространственная структура течения при  $Re_1 = 2495$  показана на фиг. 4, а. В сферическом сечении  $r = 1 + (7/11)\delta$  изображаются линии нулевой меридиональной скорости  $U_0$ . Приведенные на фиг. 4, б рисунки проекций поля скоростей на меридиональные сечения, построенные при различных значениях азимутального угла  $\varphi$ , показывают, что линии нулевой меридиональной скорости на фиг. 4, а соответствуют границам кольцевых вихрей. Толщина вихрей мало отличается от вычисленной при тех же значениях параметров для режима 1. Выше и ниже расположенных в приэкваториальной области вихрей сохраняется меридиональная циркуляция основного течения. Полученное решение представляет собой течение с парой разомкнутых вихрей Тейлора и может быть отождествлено с наблюдавшимся в экспериментах режимом С.

В [15] приведены спектры разложения различных составляющих радиальной скорости вычисленного режима С по сферическим функциям. Отдельно построены спектры экваторосимметричных и экватороантисимметричных составляющих с различным азимутальным волновым числом  $m$ . Показано, что антисимметричные моды всегда имеют меньшую амплитуду, чем симметричные. При этом амплитуда убывает с ростом  $m$ .



Фиг. 5

Используя описанное выше решение в качестве начальных условий удалось получить режим  $C$  при больших и меньших значениях  $Re_1$ . Увеличение  $Re_1$  приводит к росту амплитуды всех составляющих скорости и относительного вклада компонент большим  $m$ . Пространственная структура внешне меняется слабо — происходит лишь некоторое уменьшение диапазона  $\varphi$ , в котором вихри основной меридиональной циркуляции выходят на экватор. При уменьшении  $Re_1$  происходят обратные процессы. Путем уменьшения  $Re_1$  с шагом  $\Delta Re_1 = 4$  удалось получить решения типа режима  $C$  в докритической области. Точку обратного перехода  $C \rightarrow 0$  можно определить как  $Re_1 = 2474 \pm 2$ . Более точные вычисления провести не удалось, так как при приближении к этой точке время установления режима  $C$  или основного течения после изменения  $Re_1$  сильно возрастает и начинает превосходить возможности имеющейся в распоряжении автора вычислительной техники.

Кроме трехмерного течения с разомкнутыми вихрями Тейлора в области небольшой закритичности при  $Re_2 = 2050$  были получены два осесимметричных стационарных вторичных течения с одной и двумя парами вихрей Тейлора (режимы 1 и 2). Диаграмма решений приведена на фиг. 5.

При наложении искусственного условия осевой симметрии ветвь основного течения (режима 0) может быть продолжена в закритическую область. При  $Re_1 = 2497$  решения этой ветви становятся неустойчивыми относительно осесимметричной экватороантисимметричной моды. Расчеты показали, что при квазистационарном увеличении  $Re_1$  и сохранении осевой симметрии в этой точке происходит переход к течению с одной парой вихрей Тейлора. Этот переход подобен хорошо изученному для случая  $Re_2 = 0$  [8, 13, 16] переходу  $0 \rightarrow 1$ , происходящему в этом случае в результате первой неустойчивости основного течения. Он связан с нарушающей экваториальную симметрию докритической вилочковой бифуркацией. Расчеты показали, что путем квазистационарного уменьшения  $Re_1$  ветвь решений режима 1 может быть продолжена в область меньших значений  $Re_1$ . Обратный переход  $1 \rightarrow 0$  происходит при  $Re_1 = 2473,8$ , т. е. практически при том же (в пределах точности вычислений) значении  $Re_1$ , при котором распадается режим  $C$ .

Описанная картина замечательно согласуется с данными экспериментов [1—4], где переход  $0 \rightarrow 1$  получался при  $Re_2 > 1940$  в результате скачкообразного ускорения внутренней сферы, а режимы 1 и  $C$  распались при одинаковых значениях  $Re_1$ .

Переход  $1 \rightarrow 0$  происходит в точке поворота ветви режима  $1$  и не связан с нарушением экваториальной симметрии. Это находит отражение в результатах исследования устойчивости режима  $1$  — в этой точке течение становится неустойчивым относительно осесимметричной экваторосимметричной моды.

Наложение дополнительного искусственного ограничения экваториальной симметрии позволяет вычислять решения ветви режима  $0$  при дальнейшем увеличении  $Re_1$ . Увеличение  $Re_1$  приводит к образованию все более ярко выраженного «pinch flow». При  $Re_1 \approx 2592$  на месте сепаратрис линий тока меридионального течения появляются вихри с противоположным направлением циркуляции, которые при дальнейшем росте  $Re_1$  увеличиваются в размерах — формируется течение с двумя парами вихрей Тейлора. Точка появления режима  $2$  отмечена  $a$  на ветви решений  $0-2$ , показанной на фиг. 5. В этой точке не наблюдается появление новой неустойчивой моды или излом кривой  $\tau_2(Re_1)$ . Таким образом подтверждается полученный в [13] для более толстого слоя  $\delta = 0,18$  при  $Re_2 = 0$  вывод о том, что режимы  $0$  и  $2$  принадлежат одной ветви решений.

При  $Re_1$ , превышающем  $2592$ , скорости роста всех неустойчивых линейных мод задачи об устойчивости решений ветви  $0-2$  уменьшаются (фиг. 2). При  $Re_1 = 2681,1$  становится равной нулю скорость роста последней из неустойчивых мод — осесимметричной экватороантисимметричной моды и режим  $2$  становится устойчивым в линейном приближении. Если условие экваториальной симметрии не наложено, при квазистатическом уменьшении  $Re_1$  в этой точке происходит переход  $2 \rightarrow 1$ , который, так же как и переход  $0 \rightarrow 1$ , связан с нарушением экваториальной симметрии.

Исследование линейной устойчивости режимов  $1$  и  $2$ , проведенное при дальнейшем увеличении  $Re_1$ , показало, что эти режимы остаются устойчивыми во всем рассматриваемом диапазоне  $Re_1 \leq 2900$ . К сожалению, в случае больших  $Re_2$  отсутствуют экспериментальные данные о значениях  $Re_1$ , при которых на вихрях Тейлора появляются волнообразные возмущения.

Моменты  $\tau_2$  и  $\tau_1$ , вычисленные для режимов  $1$  и  $C$ , отличаются друг от друга очень мало — на величину порядка  $10^{-2}$ , которая, однако, значительно превышает погрешность вычислений. Режим  $1$  всегда имеет несколько больший момент, чем режим  $C$ .

На фиг. 5 можно видеть, что в большом диапазоне закритических значений  $Re_1$  наряду с осесимметричными режимами  $1$  и  $2$  устойчивым является трехмерное осциллирующее течение типа  $C$ . Было бы любопытно сравнить области притяжения этих решений. При различных  $Re_1 > 2497$  решалась полная (т. е. допускающая неосесимметричные решения) задача на установление. В качестве начальных условий всегда бралось основное течение, вычисленное в докритической или закритической области. Поэтому можно говорить лишь о пересечении областей притяжения режимов  $1$ ,  $2$  и  $C$  с множеством осесимметричных решений типа основного течения. В всех расчетах получался один из осесимметричных режимов. Таким образом, применяемый метод позволяет вычислять режим  $C$  либо в диапазоне  $Re_1 \in [2492,9; 2497]$ , где он является единственным устойчивым решением, либо используя в качестве начальных условий режим  $C$ , полученный при других (не очень далеких) значениях параметров. Трудно судить, свидетельствует ли это об относительной малости области притяжения режима  $C$  или является следствием недостаточности используемого числа пробных сферических функций и точек дискретизации.

**4. Заключение.** Проведенные расчеты позволяют сделать выводы о структуре наблюдавшихся в экспериментах [1—4] переходов от основного течения к вторичным неосесимметричным течениям типа бегущих азимутальных волн.

Решение линейной задачи об устойчивости основного течения показало, что эти переходы происходят в результате бифуркации Хопфа, связанной с неустойчивостью основного течения относительно осциллирующих неосесимметричных возмущений типа бегущих азимутальных волн. Модификация основного течения

при  $Re_1$ , приближающемся к  $Re_c$ , приводит к тому, что эти возмущения обладают определенным типом экваториальной симметрии: при вращении сфер в одну сторону они антисимметричны относительно экватора, при вращении сфер в разные стороны — симметричны.

Выполненное для случая вращении сфер в одну сторону моделирование вторичных течений позволило объяснить наблюдавшуюся в экспериментах [1—4] неединственность этих течений и показать, что трехмерное решение типа бегущей азимутальной волны отвечается докритически.

Описанные в статье исследования были начаты под руководством И. М. Яворской на основе ее идей. Автор чрезвычайно благодарен Н. М. Астафьевой и Ю. Н. Беляеву за плодотворные дискуссии и ценные советы, без которых проведение работы было бы невозможно.

Работа была завершена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 93-013-2869 и 93-013-17342).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яворская И. М., Беляев Ю. Н., Монахов А. А. Исследование устойчивости и вторичные течения во вращающихся сферических слоях при произвольных числах Россби//Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 804—807.
2. Беляев Ю. Н., Монахов А. А., Хлебутин Г. Н., Яворская И. М. Исследование устойчивости и неединственности течений во вращающихся сферических слоях: Препринт № 567. М.: ИКИ АН СССР, 1980.
3. Беляев Ю. Н., Яворская И. М. Течения вязкой жидкости во вращающихся сферических слоях и их устойчивость//Итоги науки и техники. ВИНТИ. Механика жидкости и газа. 1980. Т. 15. С. 3—80.
4. Yavorskaya I. M., Belyaev Yu. N. Hydrodynamical stability in rotating spherical layers: application to dynamics of planetary atmospheres//Acta Astronaut. 1986. V. 13. № 6/7. P. 433—440.
5. Овсеев Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами//Изв. вузов. Математика. 1963. № 4. С. 129—139.
6. Яворская И. М., Астафьева Н. М., Введенская Н. Д. Об устойчивости и неединственности течений жидкости во вращающихся сферических слоях//Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. № 1. С. 52—55.
7. Marcus P. S., Tuckerman L. S. Simulation of flow between concentric rotating spheres. Pt 1. Steady states//J. Fluid Mech. 1987. V. 185. P. 1—30.
8. Астафьева Н. М. Численное моделирование несимметричного относительно плоскости экватора сферического течения Куэтта//Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 56—62.
9. Хлебутин Г. Н. Устойчивость движения жидкости между вращающейся и неподвижной концентрическими сферами//Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 6. С. 53—56.
10. Wimmer M. Experiments on a viscous fluid flow between concentric rotating spheres//J. Fluid Mech. 1976. V. 78. № 2. P. 317—335.
11. Munson B. R., Menguturk M. Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Pt 3. Linear stability and experiments//J. Fluid Mech. 1975. V. 69. № 4. P. 705—719.
12. Snyder H. A. Stability of rotating Couette flow//Phys. Fluids. 1968. V. 11. № 4. P. 728—734.
13. Marcus P. S., Tuckerman L. S. Simulation of flow between concentric rotating spheres. Pt 2. Transitions//J. Fluid Mech. 1987. V. 185. P. 31—65.
14. Астафьева Н. М. Численное решение задачи о малых возмущениях сферического течения Куэтта: Препринт № 1027. М.: ИКИ АН СССР, 1985.
15. Zikanov O. Yu. Numerical simulation of the first instability in spherical Couette flow: Препринт № 531. М.: ИПМ РАН, 1993.
16. Schrauf G. The first instability in spherical Taylor-Couette flow//J. Fluid Mech. 1986. V. 166. P. 287—303.
17. Зиканов О. Ю. Численное исследование течений вязкой жидкости во вращающихся объемах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., МГУ, 1993.