

УДК 533.695.5 : 534.231

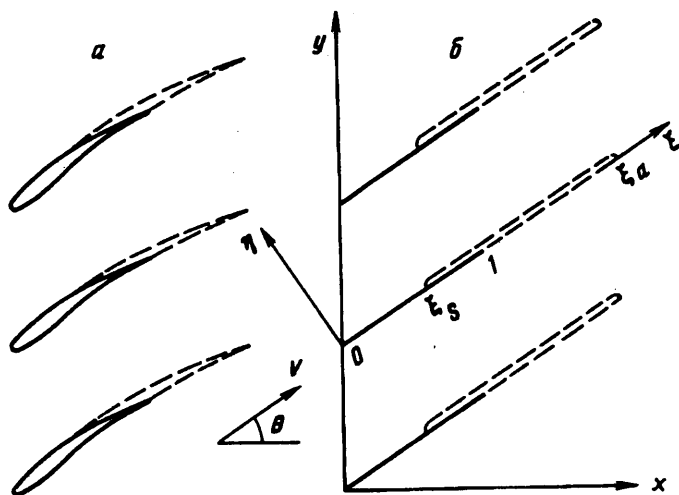
© 1995 г. А. А. ОСИПОВ, К. С. РЕЕНТ

## РЕШЕТКА ТОНКИХ СЛАБОНАГРУЖЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ, ВИБРИРУЮЩИХ В ДОЗВУКОВОМ ОТРЫВНОМ ПОТОКЕ

Приближенно решена задача расчета нестационарных аэродинамических характеристик решетки тонких слабонагруженных профилей, обтекаемой дозвуковым потоком с образованием тонких отрывных зон конечной протяженности. Как и в [1—5], использован подход, опирающийся на линейный анализ малых возмущений, в рамках которого течение считается невязким, а границы нестационарных отрывных зон моделируются колеблющимися линиями контактного разрыва. Однако вместо условия заданного фиксированного давления на границе отрывной зоны, использованного в [1—5], в настоящей работе предложено условие более общего вида, согласно которому давление в каждом элементе длины тонкого отрывного слоя колеблется с амплитудой, пропорциональной местному значению амплитуды колебаний его толщины. Задача сведена к системе двух сингулярных интегральных уравнений, решаемых численно.

Как показывают экспериментальные данные и опыт эксплуатации турбомашин, значительные отрывные зоны, возникающие при обтекании лопаток в реальных условиях их работы, часто оказываются важным фактором, который необходимо учитывать при решении проблемы обеспечения вибрационной надежности турбомашин. В последние годы в связи с развитием вычислительной техники и численных методов для расчета нестационарного отрывного обтекания отдельных профилей и решеток все шире применяются численные подходы. В исследованиях, проводимых в рамках модели несжимаемой жидкости, такого рода задачи решаются, как правило, с использованием метода дискретных вихрей [6—8]. При этом само течение рассматривается как невязкое, а вводимая в поток отрывная зона моделируется с помощью вихревой пелены, индуцируемой в соответствии с каким-либо критерием отрыва (основанным, например, на интегральной теории пограничного слоя). В ряде работ используется более общий подход, опирающийся на интегральное представление решений уравнений Навье — Стокса [9]. Для прямого численного моделирования нестационарных отрывных сжимаемых и несжимаемых течений весьма интенсивно развиваются различные конечно-разностные схемы численного интегрирования уравнений Навье — Стокса [10, 11].

Широкое использование расчетных методов данного класса для практических исследований в области аэроупругости турбомашин в настоящее время не представляется возможным, так как это потребовало бы чрезмерно больших вычислительных ресурсов. В этом отношении предпочтителен приближенный подход, в рамках которого течение считается невязким и условно разделяется на отрывные зоны конечной или бесконечной протяженности с заданными точками отрыва и основной поток, обтекающий профили вместе с отрывными зонами. При этом анализ нестационарных аэродинамических характеристик решетки проводится в рамках линейной теории малых возмущений, а границы отрывных зон моделируются колеблющимися линиями контактного разрыва. Такого рода подход использован в работах [1, 2] для моделирования нестационарного обтекания решетки пластин [1] или тонких дужек [2] несжимаемым потоком с образованием отрывных зон бесконечной протяженности вниз по потоку. Задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, решаемой методами теории ана-



Фиг. 1

литических функций [1] или дискретных вихрей [2]. Случай одиночного телесного профиля с конечной отрывной зоной рассмотрен в [3] с помощью панельного метода.

Аналогичная задача линейных колебаний в случае сжимаемого газа может быть сведена к интегральным уравнениям лишь для тонких слабонагруженных профилей, эквивалентных в линейном приближении отрезкам прямых. Обтекание решетки профилей с бесконечными отрывными зонами в случае сжимаемого газа рассматривалось в [4], а одиночного профиля с отрывной зоной, замыкающейся в его задней кромке, — в [5].

В настоящей работе рассмотрена задача о нестационарном дозвуковом отрывном обтекании решетки тонких слабонагруженных профилей, аналогичная [4, 5]. Однако вместо условия заданного фиксированного давления на границе отрывной зоны, естественного в случае стационарного обтекания и необоснованно переносимого в [1—5] на нестационарный случай, в настоящей работе предложено условие более общего вида. Указанное условие, приближенно моделирующее упругие свойства сжимаемой среды внутри области отрыва, сводится к допущению о том, что давление в каждом элементе длины тонкого отрывного слоя колеблется с амплитудой, пропорциональной местному значению амплитуды колебаний его толщины. Приведенные результаты расчетов показывают, что распределение нестационарной аэродинамической нагрузки вдоль профиля колеблющейся решетки, соответствующее данному условию, может значительно (не только количественно, как на безотрывной части профиля, но и качественно на его отрывной части) отличаться от распределения, отвечающего фиксированному давлению в отрывной зоне.

Сравнение теоретических результатов, полученных в настоящей работе и в [1, 2, 4, 5] с использованием моделей данного класса, с экспериментом оказывается затруднительным. Дело в том, что имеющиеся в литературе экспериментальные данные соответствуют более сложным схемам отрывного обтекания, как, например, схеме полного отрыва с обширной отрывной зоной, начинающейся в передней кромке профиля [12], или случаю малых отрывных зон, локализованных на небольших участках его поверхности [13]. Кроме того, такое сравнение потребовало бы проведения специального исследования для определения тех значений неизвестного параметра  $\zeta$ , которые удовлетворительно описывали бы упругие свойства отрывной зоны согласно принятой в настоящей работе модели.

1. Рассмотрим обтекание однородным дозвуковым набегающим потоком идеального газа бесконечной плоской решетки (фиг. 1, а) тонких слабонагруженных профилей и будем исследовать ее нестационарные аэродинамические характеристики, соответствующие произвольным гармоническим по времени  $t$  малым ко-

лебаниям профилей с круговой частотой  $\omega$  и постоянным вдоль решетки сдвигом фазы  $\sigma$  между колебаниями любых двух соседних профилей.

Далее будем рассматривать такие режимы обтекания, когда в стационарном потоке, обтекающем неподвижную решетку, имеются отрывные зоны, начинающиеся, например, на верхних поверхностях профилей и простирающиеся вниз по потоку на некоторое расстояние. Будем считать, что толщина отрывных зон мала по сравнению с хордой профиля, а их протяженность вниз по потоку конечна. Границами отрывной зоны, соответствующей одному профилю, являются две линии тока, одна из которых (верхняя) начинается в точке отрыва, а другая (нижняя) — в задней кромке профиля (штриховые линии на фиг. 1, а).

В данной работе не рассматривается вопрос о происхождении указанных отрывных зон и о корректном описании их на основе уравнений для вязких течений. Наличие этих зон представляет интерес лишь в отношении того влияния, которое они оказывают на нестационарные аэродинамические характеристики решетки главным образом за счет таких факторов, как изменяющееся воздействие на профиль со стороны газа из-за специфического поведения давления в отрывной зоне, а также изменения в самом акустическом поле в потоке около колеблющейся решетки вследствие его взаимодействия с отрывными зонами. Определение нестационарных аэродинамических сил, действующих на колеблющуюся решетку, заключается по существу в расчете волн давления, распространяющихся в рассматриваемом отрывном потоке, и можно надеяться, что вязкость не оказывает значительного влияния на результирующее акустическое поле. Сказанное соответствует пренебрежению эффектами таких сложных и слабо изученных явлений, как восприимчивость сдвиговых слоев к внешним акустическим воздействиям и развитие в них волн неустойчивости [14, 15].

Граничные условия, описывающие в линейном приближении воздействие отрывных зон на нестационарные возмущения потока, формулируются на их невозмущенных границах, а с учетом малой толщины отрывных зон и профилей и слабой искривленности последних указанные граничные условия задаются на соответствующих хордах профилей отрезках прямых линий и на линиях тока однородного невозмущенного течения, выходящих из их задних кромок, как показано на фиг. 1, б.

Согласно сказанному выше, приходим к следующей краевой задаче. Рассматриваются гармонические по времени линейные колебания, возбуждаемые в однородном плоском потоке газа и описываемые уравнением [16]

$$[\Delta - (-i\omega M + M\nabla)^2] \varphi = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $\varphi$  — комплексная амплитуда колебаний акустического потенциала  $\varphi' = \varphi \exp(-i\omega t)$ ,  $M = V/a$ , где  $V$  — вектор скорости однородного невозмущенного потока,  $M = |M|$ ,  $a$  — скорость звука в невозмущенном потоке,  $i$  — мнимая единица,  $\Delta$  — оператор Лапласа. Все величины в (1.1) и далее будем считать безразмерными. При этом скорость отнесена к  $V$ , длина — к хорде профиля  $b$ , время — к  $b/V$ , давление — к  $\rho V^2$ , где  $\rho$  — плотность газа в невозмущенном потоке.

Обозначим через  $\xi$  координату вдоль хорды какого-либо профиля (отрезки прямых линий на фиг. 1, составляющие решетку), отсчитываемую от его передней кромки. Пусть  $\xi_s$  — координата точки отрыва стационарного потока на верхней стороне профиля, а  $\xi_e$  — координата конца отрывной зоны, так что  $0 \leq \xi_s \leq 1$ ,  $\xi_s \leq \xi_e < \infty$ . Тогда линеаризованное граничное условие непротекания на колеблющемся профиле имеет вид

$$v_\eta \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -i\omega h_p + \frac{dh_p}{d\xi} \quad (1.2)$$

$$(\eta = +0, 0 \leq \xi \leq \xi_s, \quad \eta = -0, 0 \leq \xi \leq 1)$$

Здесь  $h_p$  — комплексная амплитуда смещения каждой точки поверхности про-

филя по нормали к хорде, а  $\eta$  — координата, нормальная к оси  $\xi$  и отсчитываемая от хорды данного профиля в направлении верхней нормали. В рамках решения линеаризованной задачи нестационарное смещение точки отрыва в процессе колебаний профиля несущественно.

На границе отрывной зоны формулируется условие для возмущения давления, которое в линейном приближении можно записать в виде

$$p \equiv i\omega\varphi - \frac{d\varphi}{d\xi} = p, \quad (1.3)$$

$$(\eta = +0, \xi_s \leq \xi \leq \xi_a, \eta = -0, 1 \leq \xi \leq \xi_a)$$

Здесь величина  $p_s$  считается либо заданной, либо известной функцией возмущений других параметров течения, вид которой будет рассмотрен далее.

В однородном основном стационарном потоке перед решеткой поле возмущений, индуцируемых колеблющимися профилями, содержит лишь уходящие акустические волны (подробно см. [17]). В области ниже по потоку от сечения  $x = x_a$ , соответствующего концам отрывных зон в решетке, помимо уходящих акустических волн имеются нестационарные контактные разрывы, связанные с изменяющейся по времени циркуляцией вокруг профилей, которые могут быть представлены в виде соленоидальных возмущений скорости, распространяющихся с частицами газа [17].

Если отрывные зоны имеют бесконечную протяженность ( $\xi_a = \infty$ ), то вопрос о структуре поля возмущений за решеткой значительно усложняется. В этом случае основной стационарный поток за решеткой не является однородным, так как он содержит периодическую по  $y$  последовательность отрывных слоев полубесконечной по  $\xi$  протяженности. Решение задачи в этой области, удовлетворяющее условию отсутствия приходящих из  $+\infty$  возмущений, представляет собой суперпозицию всевозможных уходящих волн, которые могут распространяться в такой системе потока с отрывными слоями. Указанные волны описываются собственными решениями соответствующей однородной задачи, которые будут рассмотрены далее.

2. Для решения краевой задачи (1.1)—(1.3) воспользуемся методом интегральных уравнений. С этой целью представим индуцируемое решеткой поле возмущений как результат нестационарных подвода импульса со стороны колеблющихся профилей и вытесняющего воздействия со стороны пульсирующих отрывных зон. В соответствии с этим искомое решение задачи можно представить в виде суперпозиции двух компонент, одна из которых определяется нестационарной аэродинамической нагрузкой  $\Delta p \equiv p^+ - p^-$  на профилях решетки, а другая — величиной  $\Delta v_\eta \equiv v_\eta^+ - v_\eta^-$  на отрывных зонах. Здесь  $p^+ \equiv p(\xi, \eta = +0)$ ,  $p^- \equiv p(\xi, \eta = -0)$ , а  $v_\eta^\pm$  определяется аналогичным образом.

Для описания первой компоненты возмущения воспользуемся функцией Грина  $G(x - x_0, y - y_0)$  для давления, описывающей поле возмущений давления от бесконечной цепочки точечных источников, соответствующей периодичности задачи по оси  $y$  (см., например, [17]). Тогда для возмущения давления в произвольной точке потока  $(x, y)$  можно записать формулу

$$p(x, y) = \oint_{\Gamma} \left\{ p(x_0, y_0) \frac{\partial G}{\partial n_0} - G \frac{\partial p(x_0, y_0)}{\partial n_0} - M_n [p(x_0, y_0) (M \nabla G) - \right. \\ \left. - G (M \nabla p(x_0, y_0)) - 2i\omega M p(x_0, y_0) G] \right\} dS_0 \quad (2.1)$$

Здесь  $\Gamma$  — замкнутый контур, охватывающий точку  $(x, y)$ ,  $n$  и  $n_0$  — направление внешней нормали к нему соответственно в переменных  $x, y$  и  $x_0, y_0$ ,  $M_n$  — проекция вектора  $M$  на нормаль,  $dS_0$  — элемент длины дуги.

В качестве  $\Gamma$  выберем контур, состоящий из двух параллельных линий тока

невозмущенного однородного течения, проходящих через соседние профили, и двух линий  $x = \text{const}$ , одна из которых проходит перед решеткой, а вторая — ниже по потоку от сечения  $x = x_*$ . Можно показать, что интегралы по всем участкам  $\Gamma$ , кроме поверхностей профилей, исчезают вследствие условий периодичности по  $y$ , которым удовлетворяют  $p$  и  $G$ , и свойств этих функций, определяемых упомянутой выше структурой решения перед и за решеткой. В результате из (2.1) получим

$$p(\xi, \eta) = - \int_0^1 \Delta p(\xi_0) \frac{\partial G}{\partial \eta_0} d\xi_0 \quad (2.2)$$

С помощью уравнения движения в проекции на ось  $\eta$  можно получить аналогичное выражение для  $v_\eta$  в точке  $(\xi, \eta)$

$$v_\eta(\xi, \eta) = - \int_0^1 \Delta p(\xi_0) K_v(\xi, \eta, \xi_0) d\xi_0 \quad (2.3)$$

Здесь  $K_v$  — ядро, в которое преобразуется ядро  $\partial G / \partial \eta_0$  при переходе от (2.2) к (2.3).

Для описания второй компоненты поля возмущений, связанной с вытесняющим воздействием отрывной зоны, также воспользуемся функцией Грина, отвечающей теперь цепочке точечных источников в уравнении для акустического потенциала. Записав для  $\varphi(x, y)$  формулу, аналогичную (2.1), для  $p$  и  $v_\eta$  можно получить

$$p(\xi, \eta) = \int_{\xi_*}^{\xi_*} \Delta v_\eta(\xi_0) K_p(\xi, \eta, \xi_0) d\xi_0 \quad (2.4)$$

$$v_\eta(\xi, \eta) = \int_{\xi_*}^{\xi_*} \Delta v_\eta(\xi_0) \frac{\partial G}{\partial \eta_0} d\xi_0 \quad (2.5)$$

Здесь  $K_p \equiv (i\omega - \partial / \partial \xi)G$ , а вклад от всех прочих участков границы  $\Gamma$ , кроме отрезка  $[\xi_*, \xi_*]$ , как и в (2.2), исчезает.

В случае отрывных зон бесконечной протяженности вниз по потоку ( $\xi_* = \infty$ ) данный анализ значительно усложняется, так как  $\Delta v_\eta$  и компоненты ядер в (2.4) и (2.5), отвечающие распространяющимся модам возмущений, не затухают при  $\xi \rightarrow \infty$ . Для получения соответствующих интегральных формул в этом случае целесообразно в качестве правой границы, входящей в контур  $\Gamma$ , взять отрезок прямой  $x = x_* > \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол вектора  $V$  с осью  $x$ . При этом в (2.4), (2.5) появятся интегралы по указанному отрезку правой границы, которые, вообще говоря, должны быть учтены при предельном переходе  $x_* \rightarrow \infty$ . Однако соответствующий анализ выходит за рамки настоящей работы и здесь не проводится.

Неизвестные функции  $\Delta p(\xi)$  и  $\Delta v_\eta(\xi)$  в (2.2) — (2.5) находятся из граничных условий (1.2), (1.3). Для этого в интегралах (2.2) — (2.5) необходимо сделать предельный переход при  $\eta \rightarrow \pm 0$  с учетом сингулярности их ядер согласно формулам Сохоцкого [18]. В результате граничные условия (1.2), (1.3) сводятся к следующим интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 K_v(\xi - \xi_0) \Delta p(\xi_0) d\xi_0 + \int_{\xi_*}^{\xi_*} \frac{\partial G}{\partial \eta_0}(\xi - \xi_0) \Delta v_\eta(\xi_0) d\xi_0 = \\ & = i\omega h_p - \frac{dh_p}{d\xi} + \begin{cases} 0, & 0 < \xi < \xi_* \\ 1/2 \Delta v_\eta(\xi), & \xi_* < \xi < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\int_{\xi_s}^{\xi_*} K_p (\xi - \xi_0) \Delta v_\eta (\xi_0) d\xi_0 - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \eta_0} (\xi - \xi_0) \Delta p (\xi_0) d\xi_0 =$$

$$= p_s + \begin{cases} 0, & 1 < \xi < \xi_* \\ -1/2 \Delta p (\xi), & \xi_s < \xi < 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Ядра  $K_v(\xi - \xi_0)$  и  $K_p(\xi - \xi_0)$  в (2.6), (2.7) имеют особенность Коши вида  $(\xi - \xi_0)^{-1}$ , а ядро  $\partial G(\xi - \xi_0)/\partial \eta_0$  является регулярной функцией.

3. Для замыкания системы (2.6), (2.7) необходимо задать величину  $p_s$ . Для ее определения воспользуемся следующими соображениями. Будем рассматривать внутренность отрывной зоны как однородную сжимаемую среду и предположим, что происходящий в ней линейный колебательный процесс, вызванный воздействием внешнего акустического поля, описывается определенной зависимостью между возмущениями ее удельного объема и давления. В задачах данного класса естественно ограничиться рассмотрением колебаний, безразмерная частота которых является величиной порядка единицы, и считать, что безразмерная скорость распространения возмущений в отрывной зоне не мала. Тогда в масштабе малой толщины отрывного слоя данный нестационарный процесс можно считать квазистационарным, а возмущения параметров среды — постоянными поперек слоя.

При сделанных предположениях поведение газа в отрывной зоне может быть описано с помощью одномерного приближения для тонкого слоя с колеблющимися границами. Собственные решения, соответствующие такой модели и отвечающие зависимости от  $t$  и  $\xi$  вида  $\exp[i(\alpha\xi - \omega t)]$ , где  $\alpha$  — волновое число, характеризуются линейной связью между комплексными амплитудами колебаний давления и толщины отрывного слоя с коэффициентом, зависящим от  $\alpha$ . Исходя из этого, с целью дальнейшего упрощения задачи в качестве модели, приближенно описывающей поведение отрывного слоя, примем соотношение

$$p_s = -\zeta \Delta h \quad (3.1)$$

Здесь  $\zeta$  — некоторая комплексная константа, а  $\Delta h \equiv h(\xi, \eta = +0) - h(\xi, \eta = -0)$  — разность амплитуд нормального смещения верхней и нижней границ отрывной зоны, где  $h(\xi)$  определяется из уравнения

$$-i\omega h + \frac{dh}{d\xi} = v_\eta \quad (3.2)$$

Формула вида (3.1) получается, например, из упомянутого выше одномерного приближения в случае малых значений  $\alpha$ , что соответствует пренебрежению перетеканием газа вдоль отрывного слоя. Отвечающее этому случаю значение  $\zeta = \zeta_* \equiv \rho_0 a_0^2 / H$  есть не что иное, как величина, обратная сжимаемости объема газа, заключенного в элементе длины отрывного слоя, и характеризует его упругость. В последней формуле  $\rho_0, a_0$  — безразмерные плотность и скорость звука среды в отрывном слое, а  $H$  — его толщина. Так как, согласно принятым допущениям, величина  $H$  мала, то значения  $\zeta$  следует считать величинами много больше единицы.

Условие (3.1) на границе отрывной зоны, очевидно, аналогично импедансному условию, используемому в акустике на проницаемых границах. При этом величина  $\zeta$  может быть задана и из каких-либо других соображений или считаться известной из опыта. Ее отличие от  $\zeta_*$  можно рассматривать как следствие отличия отвечающих данному  $\zeta$  условий на границе отрывной зоны от использованных выше идеализированных представлений. Так,  $\zeta = 0$  соответствует фиксированному давлению  $p_s = 0$  в абсолютно мягкой отрывной зоне и задает условие, использованное в [1—5]. Неограниченный рост  $|\zeta|$  при ограниченной величине  $p_s$  соответствует стремлению  $\Delta h$  к нулю, что может означать стремление к нулю как величины

$\Delta v_\eta$  (как, например, в контактном разрыве), так и самой амплитуды смещения  $h$  границ отрывной зоны. Таким образом, варьирование  $\zeta$  можно рассматривать как варьирование в определенных пределах физических свойств отрывного слоя.

Множитель  $\zeta$  может быть, вообще говоря, как постоянной, так и изменяющейся по длине отрывной зоны комплексной величиной, что соответствует, например, изменяющейся по  $\xi$  толщине отрывного слоя  $H(\xi)$ . Кроме того, неизвестными параметрами, определяющими воздействие отрывной зоны на поток в рамках предложенной модели, являются координаты точки отрыва  $\xi_0$  и концевой точки отрывного слоя  $\xi_1$ , которые также должны быть заданы. Произвол в выборе указанных трех величин характеризует те возможности, которые данная модель предоставляет для приближенного описания реакции отрывного слоя в реальном потоке.

Соотношение (3.1), приближенно моделирующее свойства отрывной зоны, определяет структуру поля возмущений в соответствующей области потока. Для того чтобы выявить типы волн, которые могут распространяться в этой области, целесообразно рассмотреть собственные решения однородной задачи для периодической системы отрывных слоев, имеющих бесконечную протяженность вдоль оси  $\xi$ . Указанные собственные решения удовлетворяют уравнению (1.1), условию обобщенной периодичности вида  $p(x, y + S) = p(x, y)e^{i\sigma}$  для возмущений всех параметров течения и условию  $p = -\zeta \Delta h$  на линиях  $y = x \operatorname{tg} \theta + mS$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а  $S$  — шаг решетки.

Согласно [17], одно семейство собственных решений составляют кусочно-потенциальные возмущения, формирующие периодическую систему контактных разрывов, на которых  $p = \Delta h = \Delta v_\eta = 0$  и условие (3.1) выполняется тождественно. Данный тип возмущений, распространяющихся с частицами газа, мы будем называть следовыми. Как показывает анализ, существуют еще два семейства собственных решений, первый из которых при  $\zeta = 0$  вырождается в возмущения следового типа с  $\Delta v_\eta \neq 0$  и  $p = 0$ , а второй при  $\zeta = 0$  переходит в акустические волны, отвечающие каналу с абсолютно мягкими стенками, заключенному между двумя соседними отрывными слоями.

При малых действительных  $\zeta$  собственные решения двух последних семейств перестают быть соответственно чисто следовыми или акустическими и между этими типами возмущений возникает взаимодействие. При этом в возмущениях следового семейства появляются малые возмущения давления, а в возмущениях акустического семейства появляется слабое затухание по  $x$ , связанное с указанным взаимодействием.

При действительных значениях  $\zeta$ , стремящихся к бесконечности, одно из двух рассматриваемых семейств переходит в акустические волны, удовлетворяющие условию обобщенной периодичности в направлении оси  $y$  и совпадающие с компонентами акустического поля перед и за решеткой при ее безотрывном обтекании [17]. Другое семейство решений при этом характеризуется неограниченным ростом волновых чисел пропорционально величине  $\zeta$  и описывает волны с быстро осциллирующей зависимостью от  $\xi$  и сильной экспоненциальной зависимостью от  $\eta$ . При заданной амплитуде возмущений давления эти волны характеризуются возмущениями  $\Delta v_\eta$  того же порядка, что и  $p$ , и возмущениями  $\Delta h$  порядка  $p/\zeta$ . Столь экзотическое поведение данного семейства решений при  $\zeta \rightarrow \infty$  является, очевидно, следствием нарушения тех упрощающих предположений, на основе которых была принята приближенная модель отрывного слоя (3.1).

Рассмотренные собственные решения соответствуют положительным значениям  $\zeta$ . Случай действительных  $\zeta < 0$  здесь обсуждаться не будет, так как он представляется физически нереальным. Касаясь поведения собственных решений при мнимых значениях  $\zeta = iZ$ , где  $Z$  — действительная величина, отметим только, что при больших  $|Z|$  возмущения одного из семейств описываются быстроос-

циллирующей зависимостью от  $\eta$  и сильной экспоненциальной зависимостью от  $\xi$ . При определенном знаке величины  $Z$  возмущение оказывается экспоненциально растущим в направлении его фазовой скорости, что, по-видимому, свидетельствует о неустойчивости данной системы в указанной области значений  $Z$ . Здесь уместно напомнить, что границы отрывной зоны, являющиеся тангенциальными разрывами, вообще говоря, неустойчивы, и это обстоятельство, по-видимому, находит свое отражение в отмеченной выше неустойчивости тонкого отрывного слоя в рамках приближенной модели (3.1).

4. Для замыкания системы интегральных уравнений (2.6), (2.7) величину  $p$ , в них необходимо выразить через  $\Delta v_\eta$  согласно (3.1) и (3.2). При этом решение системы будем искать в классе функций, отвечающих гладкому отходу границы отрывной зоны по касательной к профилю в точке  $\xi_s$  и, следовательно, нулевым значениям  $\Delta h(\xi_s)$  и  $\Delta v_\eta(\xi_s)$ , что, согласно свойствам решений сингулярных интегральных уравнений [18], соответствует неограниченному росту  $|\Delta v_\eta|$  в концевой точке отрывной зоны  $\xi_s$ . Бесконечное значение производной  $d\Delta h/d\xi$  в той же точке в этом случае естественно интерпретировать как результат использования линейного приближения при описании решения в окрестности той точки, где стационарная отрывная зона имеет форму затупленного тела. С тех же позиций следует рассматривать и то обстоятельство, что величина  $\Delta h(\xi_s)$ , найденная согласно (3.2), вообще говоря, отлична от нуля.

Выражение для давления  $p$ , в (2.7) в результате может быть записано в виде

$$p_s = -\zeta e^{i\omega\xi_s} \int_{\xi_s}^{\xi} \Delta v_\eta(\xi_0) e^{-i\omega\xi_0} d\xi_0 \quad (4.1)$$

Выбранному классу решений отвечают функции  $\Delta p(\xi)$  и  $\Delta v_\eta(\xi)$ , характеризующиеся следующими свойствами [18]:

$$\Delta p(\xi) \sim \xi^{-1/2} \quad (\xi \rightarrow +0); \quad \Delta p(\xi) - \Delta p(\xi_s) \sim \sqrt{\xi_s - \xi} \quad (\xi \rightarrow \xi_s - 0) \quad (4.2)$$

$$\Delta p(\xi) \sim \sqrt{1 - \xi} \quad (\xi \rightarrow 1 - 0); \quad \Delta v_\eta(\xi) \sim \sqrt{\xi - \xi_s} \quad (\xi \rightarrow \xi_s + 0)$$

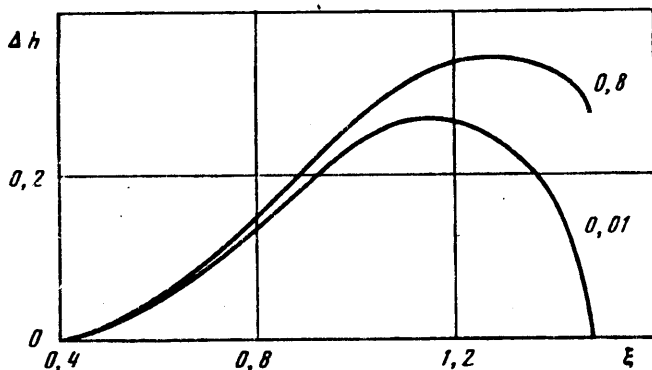
$$\Delta v_\eta(\xi) \sim (\xi_s - \xi)^{-1/2} \quad (\xi \rightarrow \xi_s - 0); \quad \Delta v_\eta(1) - \Delta v_\eta(\xi) \sim \sqrt{\xi - 1} \quad (\xi \rightarrow 1 + 0)$$

Найденное в работе [5] решение отвечает другому классу решений сингулярных интегральных уравнений. В отличие от (4.2) решение [5] отвечает функции  $\Delta v_\eta$ , сингулярной в точке отрыва  $\xi_s$  и равной нулю в концевой точке отрывной зоны  $\xi_s = 1$ , совпадающей с задней кромкой профиля. При этом  $\Delta p(\xi)$  в [5] неограниченно возрастает при  $\xi \rightarrow \xi_s - 0$  и равно нулю при  $\xi > \xi_s$ . Данный тип решения можно интерпретировать как обтекание отрывной зоны, имеющей форму затупленного тела в точке отрыва  $\xi_s$ .

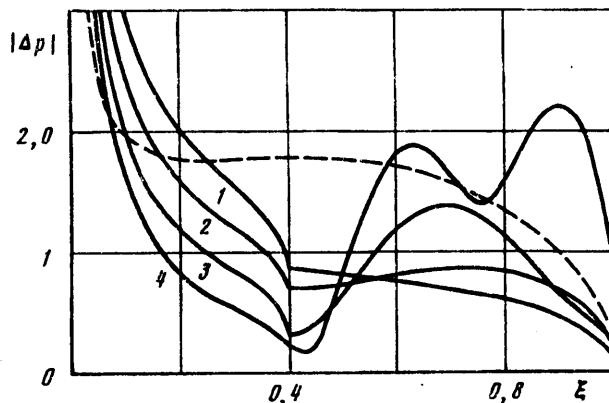
Рассмотрим далее некоторые результаты численного решения системы (2.6), (2.7), которое было получено методом, аналогичным простейшей схеме метода дискретных вихрей. Линейная алгебраическая система, полученная после дискретизации задачи, решалась методом исключения Гаусса. Расчеты проводились на персональном компьютере РС-АТ 286. Время расчета типичного варианта с общим числом расчетных точек для  $\Delta p$  и  $\Delta v_\eta$  около 50 составляет 40—50 с.

С помощью разработанного выше метода может быть рассчитано стационарное отрывное обтекание решетки, рассматриваемое как решение нестационарной задачи при малых значениях частоты. Для примера на фиг. 2 показана зависимость  $\Delta h(\xi)$ , характеризующая форму отрывной зоны, полученная для  $M = 0,8$  и  $0,01$ . Рассмотрена решетка с параметрами  $S = 1,0$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\xi_s = 0,4$ ,  $\xi_a = 1,5$ ,  $\zeta = 0$ . Найденная отрывная зона отвечает малому углу атаки профилей, а величина  $\Delta h$  на фиг. 2 отнесена к  $|\partial h_p / \partial \xi|$ . Видно, что при произвольно выбранных параметрах решетки и значениях координат  $\xi_s$ ,  $\xi_a$  отрывная зона оказывается





Фиг. 2



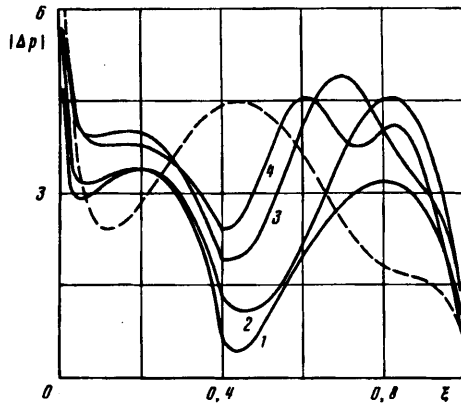
Фиг. 3

незамкнутой, однако при  $M \rightarrow 0$  происходит ее замыкание. Здесь следует иметь в виду, что решению квазистационарной задачи в отличие от стационарного решения соответствует возмущенный набегающий поток далеко перед решеткой. Данное возмущение может рассматриваться как произвол, за счет которого может быть обеспечено замыкание отрывной зоны.

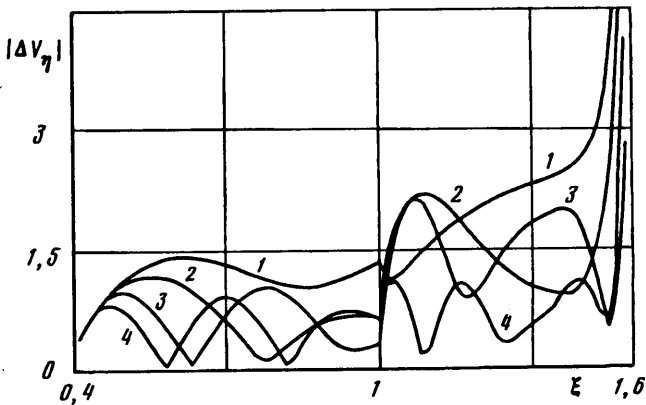
Важным аспектом рассматриваемой задачи является влияние задаваемой длины отрывной зоны на величину распределенной по профилю решетки нестационарной аэродинамической нагрузки  $\Delta p(\xi)$ . Проведенное численное исследование показало, что с ростом  $\xi_0$  наблюдается сходимость  $\Delta p(\xi)$  к некоторому предельному распределению. Для значений безразмерной частоты, не превышающих единицу, увеличение  $\xi_0$  свыше 4—5 не приводит к заметному изменению  $\Delta p(\xi)$ .

Главным вопросом, представляющим интерес в связи с предпринятым в настоящей работе исследованием, является вопрос о влиянии упругих свойств отрывной зоны на нестационарные аэродинамические характеристики решетки. На фиг. 3 показаны распределения  $|\Delta p(\xi)|$ , полученные для рассмотренной выше решетки, колеблющейся поступательно ( $h_p = \text{const}$ ) в случае  $M = 0,8$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\sigma = 0$ . Значения  $\Delta p$  отнесены к  $i\omega h_p$ . Кривые 1—4 соответствуют значениям  $\zeta$ , равным 0, 4, 12, 20. Штриховая линия на этой же фигуре отвечает безотрывному обтеканию решетки. Видно, что учет упругости отрывной зоны приводит к значительному отличию нестационарных нагрузок на профилях от их значений, полученных как при безотрывном обтекании решетки, так и в случае абсолютно мягкой отрывной зоны ( $p_s = 0$ ).

Аналогичные расчетные данные, полученные для  $\omega = 3,0$ ,  $\sigma = \pi$ , представлены



Фиг. 4



Фиг. 5

на фиг. 4. Влияние упругости отрывной зоны на нестационарные нагрузки на профиле здесь также оказывается сильным. Соответствующие распределения  $|\Delta v_\eta|$  вдоль отрывного слоя показаны на фиг. 5. Видна усиливающаяся с ростом  $\zeta$  немонотонность кривых, которая связана с рассмотренными выше особенностями поведения собственных возмущений в периодической системе отрывных слоев.

Авторы выражают признательность Г. Ю. Степанову за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16653).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перумал, Систо. Расчет подъемной силы и момента для колеблющегося профиля при изменении положения точки отрыва потока//Энергетич. машины и установки. 1974. Т. 96. № 4. С. 49—57.
2. Богомолов С. Б., Сарен В. Э. Решетка профилей, вибрирующих в отрывном несжимаемом потоке//Аэроупругость лопаток турбомашин: Тр. ЦИАМ. 1991. Вып. 6. № 2393. С. 57—78.
3. Tou H. B., Hancock G. J. Inviscid theory of two-dimensional aerofoil/spoiler configurations at low speed. Pt IV. Oscillatory aerofoil/spoiler characteristics//Aeronautic. J. 1987. V. 91. № 909. P. 410—428.
4. Chi R. M. Unsteady aerodynamics in stalled cascade and stall flutter prediction. ASME Paper № C2/Aero-1. 1980.
5. Chi R. M. Separated flow unsteady aerodynamic theory//J. Aircraft. 1985. V. 22. № 11. P. 956—964.
6. Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование нестационарного

отрывного обтекания решеток телесных профилей//Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 6. С. 1326—1330.

7. *Spalart P. R.* Simulation of rotating stall by vortex method//J. Propulsion and Power. 1985. V. 1. № 3. P. 235—241.
8. *Sisto F., Thangam S., Abdel-Rahim A.* Computational prediction of stall flutter in cascaded airfoils//AIAA Journal. 1991. V. 29. № 7. P. 1161—1167.
9. *Tuncer I. H., Wu J. C., Wang C. M.* Theoretical and numerical studies of oscillating airfoils//AIAA Journal. 1990. V. 28. № 9. P. 1615—1624.
10. *Shida Y., Kuwahara K., Ono K., Takami H.* Computation of dynamic stall of a NACA-0012 airfoil//AIAA Journal. 1987. V. 25. № 3. P. 408—413.
11. *Hulf D. L.* Numerical simulation of unsteady, viscous, transonic flow over isolated and cascaded airfoils using a deforming grid//AIAA Pap. 1987. № 1316. 14 p.
12. *Яшима, Танака.* Крутильный флаттер решетки при отрывном обтекании//Энергетич. машины и установки. 1978. Т. 100. № 2. С. 135—144.
13. *Tanaka H., Fujimoto I., Ishii S.* Aerodynamic response of a blade in pitching oscillation with partial and full separation//Proc. 2nd Int. Symp. Aeroelast. Turbomach. Lausanne, 1980.
14. *Goldstein M. E.* Scattering of acoustic waves into Tollmien-Schlichting waves by small streamwise variations in surface geometry//J. Fluid Mech. 1985. V. 154. P. 509—529.
15. *Рыжов О. С.* Возбуждение неустойчивых колебаний в пограничном слое источником в потенциальной области течения//Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 4. С. 820—824.
16. *Мунин А. Г., Кузнецов В. М., Леонтьев Е. А.* Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981. 248 с.
17. *Бутенко К. К., Осипов А. А.* Расчет нестационарного сверхзвукового обтекания плоской решетки пластин при воздействии на нее вихревых неоднородностей набегающего потока//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 152—160.
18. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1958. 543 с.

Москва

Поступила в редакцию  
8.IV.1993