

УДК 533.694.2

© 1995 г. А. В. ПОТАШЕВ

ПОСТРОЕНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ С ЗАКРЫЛКОМ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Предложен метод проектирования механизированных профилей, сохраняющий преимущества обратных краевых задач для односвязных областей и позволяющий применять квазиразрешения для удовлетворения условий разрешимости. Рассмотрены задачи построения профиля с бесконечно тонким закрылком конечной длины и с закрылком конечной толщины.

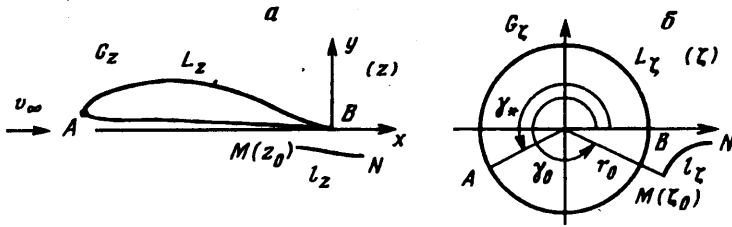
Теория и численные методы аэродинамического проектирования крыловых профилей, обладающих заданными свойствами, разработаны достаточно хорошо (см. обзор [1]). Однако подавляющее большинство работ в этом направлении посвящено задачам отыскания формы изолированных крыловых профилей. В то же время известно, что для улучшения аэродинамических свойств крыльев, особенно в режимах взлета и посадки, широко применяется их механизация — используются закрылки и предкрылки.

В [2] в предположении, что закрылок (предкрылок) моделируется точечным вихрем, изучена задача нахождения формы крылового профиля по заданному распределению скорости $v = v(s)$ (s — дуговая абсцисса контура профиля). Однако трудность выполнения условий разрешимости (получения замкнутого контура профиля) не позволила довести решение задачи до числа. В [3] эту трудность удалось преодолеть с помощью метода квазиразрешений обратных краевых задач [4].

Моделирование закрылка точечным вихрем [2, 3] не всегда позволяет правильно описать влияние закрылка на поток и, следовательно, на искомую форму профиля. Во-первых, при такой замене размеры закрылка должны быть малы по сравнению с размерами профиля или закрылок должен быть достаточно удален от профиля. Во-вторых, остается открытым вопрос об интенсивности вихря и его местоположении в потоке. Решение же задачи построения профиля с телесным закрылком приводит к многосвязным областям, что существенно усложняет математический аппарат. Особенно трудным при этом становится получение профилей с замкнутым контуром.

1. Бесконечно тонкий закрылок. Искомый непроницаемый крыловой профиль плавно обтекается плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости; контур L_z этого профиля является замкнутым и гладким, за исключением, быть может, задней кромки B (выбранной в качестве начала координат плоскости $z = x + iy$), где внешний кривоугол к профилю угол равен $\pi\varepsilon$ ($1 \leq \varepsilon \leq 2$) (фиг. 1, а). Скорость набегающего потока на бесконечности параллельна оси x , а ее величина v_∞ задана. Дуговая координата s контура L_z отсчитывается по часовой стрелке от $s = 0$ в точке B до $s = L$ в ней же (L — периметр L_z). Вдоль L_z задано распределение скорости $v = v(s)$ (требования к $v(s)$ те же, что и в обратной задаче для изолированного профиля [4]). Требуется определить форму профиля, если в потоке имеется закрылок с заданными аэродинамическими и геометрическими характеристиками.

В случае бесконечно тонкого закрылка в качестве таких характеристик принимаются длина l закрылка, координаты $z_0 = x_0 + iy_0$ его передней кромки



Фиг. 1

M , являющейся точкой разветвления потока, и распределение перепада давления $f_0(s) = c_p^+(s) - c_p^-(s)$ как функция его дуги $s \in [0, l]$, отсчитываемой от точки M (c_p^+ и c_p^- — коэффициенты давления на верхней и нижней сторонах закрылка). Форма закрылка является искомой.

Пусть функция $z = z(\zeta)$ конформно отображает внешность E^- круга $|\zeta| > 1$ во вспомогательной плоскости $\zeta = re^{i\theta}$ на внешность L_z так, что $z(\infty) = \infty$, $z(1) = 0$ (фиг. 1, б). При этом закрылку l_z соответствует некоторый отрезок l_ζ кривой, выходящий из точки M ($\zeta_0 = r_0 \exp(i\gamma_0)$).

В плоскости ζ рассмотрим обтекание окружности L_ζ и линии l_ζ потоком со скоростью на бесконечности $u_0 e^{i\beta}$. Комплексно-сопряженную скорость этого течения представим в виде

$$\bar{u} = \frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-i\beta} f(\zeta) \exp[-\Omega(\zeta)], \quad f(\zeta) = \left(1 - \frac{\zeta_A}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right),$$

$$\zeta_A = \exp(i\gamma_A) \quad (1.1)$$

где ζ_A — образ точки A , $\Omega(\zeta)$ — функция влияния закрылка l_ζ на поток.

Запишем краевые условия для $\Omega(\zeta)$. Для этого рассмотрим функцию

$$F(\zeta) = -\ln\left(\frac{1}{u_0} \frac{dw}{d\zeta}\right) = -\ln v + i\theta + \ln u_0 - \ln \frac{dz}{d\zeta} \quad (1.2)$$

где θ — аргумент вектора скорости в плоскости z . С учетом (1.1) $F(\zeta)$ можно также записать в виде

$$F(\zeta) = i\beta - \ln f(\zeta) + \Omega(\zeta) \quad (1.3)$$

В силу того что на l_z давление и, следовательно, v терпит разрыв, а θ меняется непрерывно, из сопоставления (1.2) и (1.3) получим

$$\Omega^+(\zeta) - \Omega^-(\zeta)|_{l_\zeta} = \ln\left(\frac{v^-(\sigma)}{v^+(\sigma)}\right) = \lambda(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq l_\sigma \quad (1.4)$$

где σ — дуговая координата l_ζ , отсчитываемая от точки M ($\zeta = \zeta_0$), l_σ — длина линии l_ζ . Так как M — точка разветвления потока, то функция $\lambda(\sigma)$ ограниченная, причем $\lambda(0) = \lambda(l_\sigma) = 0$.

Условие на бесконечности $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [dw/d\zeta] = u_0 e^{-i\beta}$ приводит к равенству

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\Omega(\zeta)] = 0 \quad (1.5)$$

а условие непротекания L_ζ дает

$$\text{Im } \Omega(\zeta)|_{L_\zeta} = 1/2(\gamma_A - \pi) - \beta \quad (1.6)$$

Рассмотрим решение задачи в полуобратной постановке. Предположим сначала, что l_ζ и $\lambda(\sigma)$ заданы. Тогда для нахождения $\Omega(\zeta)$, удовлетворяющей условиям (1.4)–(1.6), воспользуемся результатами, полученными в [5] при решении

задачи о построении профиля в двухслойном потоке жидкости. С учетом (1.4) — (1.5) функцию $\Omega(\zeta)$ представим в виде

$$\Omega(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(1/\zeta)} - \overline{\Phi(0)} \quad (1.7)$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_\zeta} \frac{\lambda[\sigma(t)] dt}{t - \zeta} \quad (1.8)$$

причем имеет место равенство

$$\beta = 1/2 (\gamma_A - \pi) - \text{Im } \Phi(0) \quad (1.9)$$

Для дальнейшего решения запишем распределение потенциала скорости на профиле L_z

$$\varphi(s) = \varphi_1(s) \equiv \int_{l_A}^s v(s) ds$$

и на окружности L_ζ

$$\varphi(\gamma) = \varphi_2(\gamma) \equiv 4u_0 \int_{\gamma_A}^{\gamma} \sin \frac{\gamma - \gamma_A}{2} \sin \frac{\gamma}{2} g(\gamma) d\gamma, \quad g(\gamma) = \exp[-\text{Re } \Omega(e^\gamma)] \quad (1.10)$$

Приравнивая

$$\varphi_1(s) = \varphi_2(\gamma) \quad (1.11)$$

получим уравнение для определения зависимости $s(\gamma)$. Входящие в него параметры u_0 и γ_A определены условиями

$$\varphi_1(L) = \varphi_2(0), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(2\pi) \quad (1.12)$$

Рассмотрим теперь аналитическую в E^- функцию

$$\chi(\zeta) = \ln \left[u_0 e^{-i\beta} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right)^{\epsilon-1} \frac{d\zeta}{dz} \right] \quad (1.13)$$

Так как l_ζ и $\lambda(\sigma)$ считаются заданными, по формулам (1.10), (1.7) (1.8) можно найти $g(\gamma)$, а из уравнений (1.9), (1.11), (1.12) определить β , γ_A , u_0 и $s(\gamma)$. Тогда на L_ζ

$$\text{Re } \chi(e^\gamma) = S(\gamma) = \ln \left\{ v[s(\gamma)] \left[2 \sin \frac{\gamma - \gamma_A}{2} \right]^{-1} \left[2 \sin \frac{\gamma}{2} \right]^{\epsilon-2} g^{-1}(\gamma) \right\}$$

С учетом условия $\text{Im } \chi(\infty) = 0$ интеграл Шварца восстанавливает функцию

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\zeta} S(\tau) \frac{\zeta + e^\tau}{\zeta - e^\tau} d\tau \quad (1.14)$$

а в силу (1.13) функция

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_1^\zeta \exp[-\chi(\zeta)] \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right)^{\epsilon-1} d\zeta \quad (1.15)$$

даст конформное отображение области E^- на внешность искомого профиля. Подстановка $\zeta = e^\gamma$ в (1.15) позволяет отыскать координаты контура профиля, а $\zeta \in l_\zeta$ — координаты закрылка.

Приведенные выше формулы дают решение задачи в полуобратной постановке, однако найденный по (1.15) контур может оказаться разомкнутым, а величина скорости набегающего потока — отличной от заданной. Чтобы получить замкнутый контур, обтекаемый потоком с заданной скоростью, должны выполняться условия

разрешимости (замкнутости и совпадения скорости на бесконечности с заданным значением)

$$\int_0^{2\pi} S(\tau) e^{i\tau} d\tau = \pi(1 - \varepsilon), \quad \int_0^{2\pi} S(\tau) d\tau = 2\pi \ln v_\infty \quad (1.16)$$

Нетрудно видеть, что условия (1.16) полностью совпадают с аналогичными условиями в обратной краевой задаче для изолированного профиля. Поэтому при их невыполнении можно воспользоваться методом квазирешений [4], позволяющим удовлетворить (1.16) путем минимально возможной коррекции функции $S(\gamma)$ и, следовательно, $v(s)$. Подстановка скорректированной $S(\gamma)$ в (1.14), (1.15) дает замкнутый контур профиля и заданное значение v_∞ .

Перейдем к решению задачи в исходной постановке. Выше, при построении решения считалось, что l_ζ и $\lambda(\sigma)$ заданы. В то же время остались неиспользованными условие непротекания l_z (следовательно, и l_τ), заданное распределение $f_0(s)$, длина закрылка l и координаты $z_0 = x_0 + iy_0$ его передней кромки.

Условие непротекания закрылка можно представить в виде

$$v(\sigma) = -\arg\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)\Big|_{l_\zeta}, \quad \arg\left(\frac{dw}{d\zeta}\right) = \beta - \arg f(\zeta) + \text{Im } \Omega(\zeta) \quad (1.17)$$

где $v(\sigma)$ — угол наклона касательной к l_ζ , причем функция $\text{Im } \Omega(\zeta)$ меняется непрерывно при переходе через l_ζ , так как $\text{Im } \lambda(\sigma) = 0$. Организуем итерационный процесс поиска l_ζ следующим образом. Считая заданными ζ_0 и l_σ , выбираем нулевое приближение $v(\sigma)$ (например, $v(\sigma) = 0$) и находим зависимость $\zeta(\sigma) \in l_\zeta$ по формуле

$$\zeta(\sigma) = \zeta_0 + \int_0^\sigma e^{i v(\sigma)} d\sigma, \quad \sigma \in [0, l_\sigma] \quad (1.18)$$

Затем по заданному $\lambda(\sigma)$ рассчитываем $\arg(dw/d\zeta)$ на l_ζ и из (1.17) находим следующее приближение $v(\sigma)$, а из (1.18) — l_ζ . Итерации продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{\sigma \in [0, l_\sigma]} |v^{(k)}(\sigma) - v^{(k-1)}(\sigma)| < \delta_1 \quad (1.19)$$

где δ_1 — заданная малая величина.

Для отыскания ζ_0 , l_σ и $\lambda(\sigma)$ организуется еще один итерационный процесс, который является внешним по отношению к описанному выше. При этом ведется одновременная коррекция всех указанных неизвестных в зависимости от величин расхождений между рассчитанными на k -итерации значениями $z_0^{(k)}$, $l^{(k)}$, $[c_p^+(s) - c_p^-(s)]^{(k)}$ и заданными z_0 , l , $f_0(s)$. Для удовлетворения условий (1.16) на каждом шаге строится квазирешение. Процесс завершается при одновременном выполнении условий

$$|z_0 - z_0^{(k)}| < \delta_2, \quad |l - l^{(k)}| < \delta_2 \quad (1.20)$$

$$\max_{s \in [0, l]} |[c_p^+(s) - c_p^-(s)]^{(k)} - f_0(s)| < \delta_3 \quad (1.21)$$

где δ_2 , δ_3 — заданные малые величины.

Отметим, что построенный процесс позволяет вместо функции $f_0(s)$ задавать на закрылке и другие распределенные характеристики. Таковыми могут быть например

$$f_1(s) = v^+(s) - v^-(s)$$

№	α°	C_{ya}	C_{yf}	$c', \%$
1	7,04	2,07	0,2	21,3
2	6,35	2,05	0,2	21,6
3	7,11	2,07	0,2	21,5

или

$$f_2(s) = \ln \left[\frac{v^+(s)}{v^-(s)} \right]$$

Задание $f_1(s)$ или $f_2(s)$ приводит к некоторому изменению процесса коррекции $\lambda(\sigma)$ и замене условия (1.21) на

$$\max_{s \in [0, l]} | [v^+(s) - v^-(s)]^{(k)} - f_1(s) | < \delta_3 \quad (1.22)$$

или

$$\max_{s \in [0, l]} \left| \ln \left[\frac{v^+(s)}{v^-(s)} \right]^{(k)} - f_2(s) \right| < \delta_3 \quad (1.23)$$

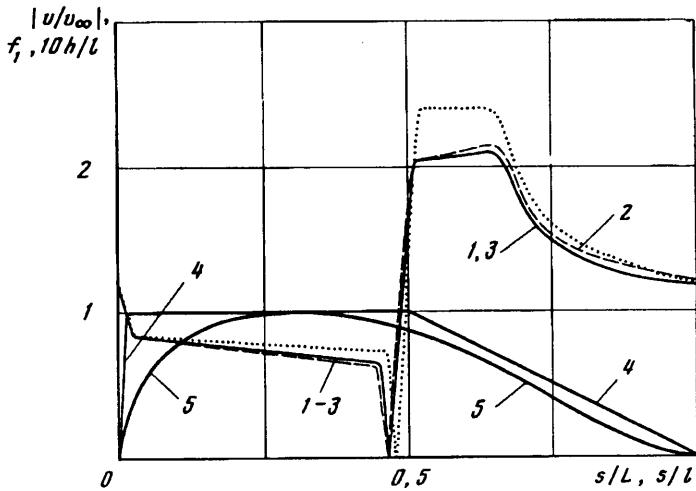
Описанное выше решение было реализовано в виде программы на языке FORTRAN для ЭВМ типа PC/AT. Результаты расчетов показали, что на первых шагах внешних итераций внутренний процесс при $\delta_1 = 10^{-5}$ сходится за 5—8 шагов. Причем это количество уменьшается до 1—2 по мере сходимости внешнего процесса, который обычно требует 10—15 шагов при $\delta_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\delta_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ (с удалением закрылка от профиля количество итераций уменьшается, а при приближении — растет).

На фиг. 2, 3 и в таблице приведены результаты расчетов по заданным распределениям $v(s)$ (пунктирная кривая на фиг. 2) и $f_1(s)$ (кривая 4 на фиг. 2), приведенной длине закрылка $l' = l/b = 0,2$ и координатам $z_0' = x_0' + iy_0' = 0,9 - 0,03i$ точки M в системе координат, связанной с хордой профиля ($z' = (z/b) e^{i\alpha} + 1$, α — угол атаки, b — длина хорды). Полученные при этом контур и закрылок показаны сплошными кривыми 1 на фиг. 3, а (для наглядности масштаб по оси y изменен в 2,5 раза). Изменившееся в результате применения квазирешений распределение скорости на профиле изображено сплошной кривой 1 на фиг. 2, распределения $c_p(x)$ на профиле и закрылке — сплошными кривыми 1 на фиг. 3, б. Значения угла атаки α , приведенной толщины $c' = c/b$ профиля, коэффициента подъемной силы C_{ya} , а также величины C_{yf} , характеризующей вклад закрылка в C_{ya} , даны в первой строке таблицы.

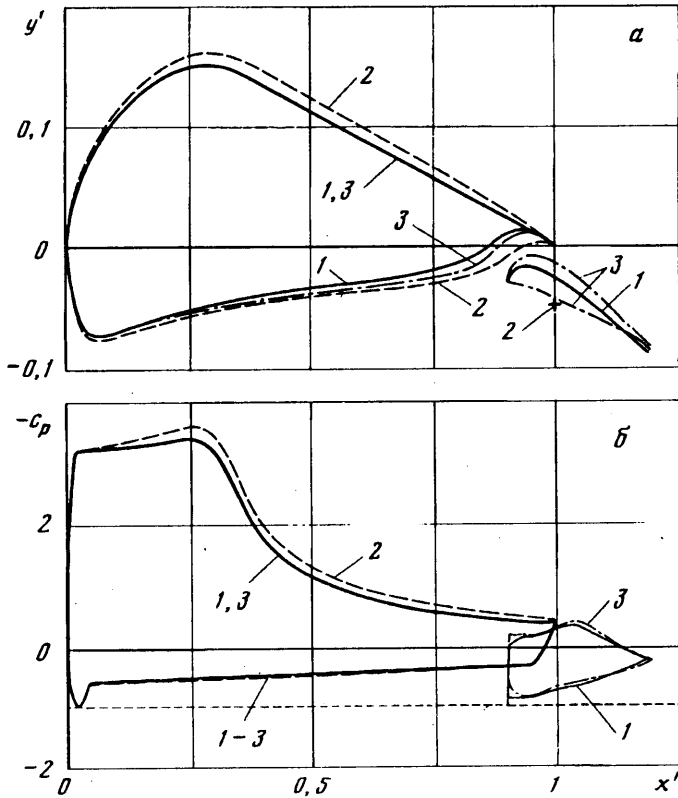
Для сравнения на этих же фигурах (штриховые кривые 2) и в строке 2 таблицы приведены результаты расчетов для случая, когда закрылок моделируется вихрем. При этом интенсивность вихря бралась равной циркуляции скорости на рассчитанном в предыдущем случае закрылке ($\Gamma_0' = \Gamma_0 / (v_\infty L) = 0,063$), а сам вихрь помещался на трети хорды закрылка от его передней кромки.

Из сравнения результатов видно, что при выбранных параметрах решение рассматриваемой задачи заметно отличается от решения задачи о профиле с вихрем (особенно по форме контура профиля вблизи задней кромки). С удалением закрылка от профиля эти отличия уменьшаются. Так, при $z_0' = 0,9 - i$ различия в координатах профиля не превышают 0,1% хорды.

2. Закрылок конечной толщины. Рассмотрим теперь задачу о нахождении профиля, удовлетворяющего условиям постановки предыдущей задачи, при наличии в потоке закрылка конечной толщины (фиг. 4). Заданными характеристиками закрылка будем считать $f_0(s)$ (здесь $s \in [0, l]$ — дуговая абсцисса некоторой скелетной линии l_z закрылка, смысл которой будет пояснен ниже), распределение толщины закрылка $h(s)$, длину l скелетной линии и



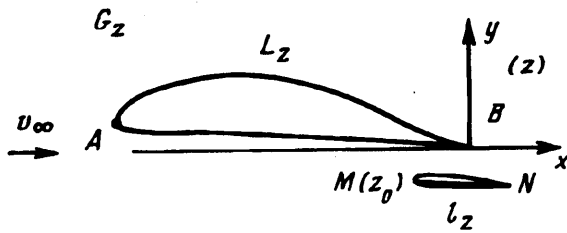
Фиг. 2



Фиг. 3

координаты $z_0 = x_0 + iy_0$ передней кромки l_2 , совпадающей с точкой M разветвления потока на закрылке.

Существенным моментом, позволяющим строить решение указанной задачи, оставаясь в рамках односвязных областей, является предположение, что контур искомого закрылка образуется линией тока, разветвляющейся в точке M и замыкающейся в точке N . При этом считается, что такого рода течение образуется особенностями, распределенными только вдоль l_2 .



Фиг. 4

Согласно сделанным предположениям, аналитическое решение поставленной задачи можно построить аналогично изложенному выше. Существенное отличие этого построения заключается в том, что функция $\lambda(\sigma)$, являющаяся граничным значением на l_z разности $\Omega^+(\zeta) - \Omega^-(\zeta)$, в этом случае будет комплексной

$$\lambda(\sigma) = \ln \frac{v^-(\sigma)}{v^+(\sigma)} + i [\theta^+(\sigma) - \theta^-(\sigma)], \quad 0 \leq \sigma \leq l_\sigma \quad (2.1)$$

где θ^+ и θ^- — значения аргумента скорости на l_z при подходе сверху и снизу соответственно. В силу (2.1) имеем $\lambda(0) = (2 - \epsilon_1) \pi i$, $\lambda(l_\sigma) = (\epsilon_2 - 2) \pi i$, где ϵ_1 и ϵ_2 — внешние к закрылку углы в точках M и N соответственно. В частности, $\lambda(0) = \pi i$, $\lambda(l_\sigma) = 0$, когда передняя кромка закрылка гладкая, а задняя — точка возврата.

Решение рассматриваемой задачи в полуобратной постановке (с учетом комплекснозначности $\lambda(\sigma)$) строится, как и в предыдущем случае, по формулам (1.7)–(1.15) с применением метода квазирешений для выполнения (1.16). Координаты точек закрылка находятся при подстановке в (1.15) значений ζ , являющихся корнями уравнения

$$\text{Im } w(\zeta) = \psi_0$$

$$w(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(\zeta) \exp[-\Omega(\zeta)] d\zeta, \quad \psi_0 = \text{Im } w(\zeta_0)$$

Для построения решения задачи в исходной постановке необходимо определить форму линии l_z и распределение $\lambda(\sigma)$ на ней. В первой задаче при отыскании линии l_z было использовано условие ее непротекания. В данном случае l_z , вообще говоря, не является линией тока. Поэтому для ее поиска необходимо сначала уточнить, что понимается под скелетной линией. Здесь возможны различные варианты. Если потребовать, чтобы $u_n^+(\sigma) = 0$, то l_z будет образом верхней поверхности закрылка, а при $u_n^-(\sigma) = 0$ — нижней поверхности (здесь n — нормаль к l_z , направленная в сторону роста ψ). В настоящей работе в качестве условия поиска l_z использовано равенство $u_n^+(\sigma) + u_n^-(\sigma) = 0$.

Введенное предположение эквивалентно равенству расходов жидкости с верхней и нижней поверхностями скелетной линии закрылка и позволяет записать условие на l_z в виде, аналогичном (1.17)

$$v(\sigma) = \beta - \arg f(\zeta) + \text{Im } \Omega(\zeta) - \text{arctg} \left\{ \text{th} \frac{\lambda_2(\sigma)}{2} \text{tg} \frac{\lambda_1(\sigma)}{2} \right\}$$

$$\lambda_1(\sigma) = \text{Re } \lambda(\sigma), \quad \lambda_2(\sigma) = \text{Im } \lambda(\sigma) \quad (2.2)$$

Здесь интеграл типа Коши, входящий в $\Omega(\zeta)$ (см. (1.7), (1.8)), понимается в смысле главного значения.

Представленная запись условия (2.2) позволяет организовать итерационный процесс поиска l_z , как и в предыдущем случае, до выполнения условия (1.19).

При организации внешних итераций (как первое приближение) было введено предположение о малости $h(s)$. Это позволило несколько упростить решение и сократить время счета. Суть введенных упрощений состоит в том, что распределения скорости на верхней и нижней сторонах закрылка считаются совпадающими с распределениями скорости на соответствующих сторонах скелетной линии, а толщина закрылка рассчитывается по формуле

$$\tilde{h}(s) = \frac{\Psi[\sigma(s)] - \psi_0}{v_s^+(s)} + \frac{\Psi[\sigma(s)] - \psi_0}{v_s^-(s)}$$

где v_s^+ , v_s^- — касательные составляющие скорости на верхней и нижней сторонах l_s соответственно. При проведении внешних итераций производится одновременная коррекция ζ_0 , l_0 и $\lambda(\sigma)$ в зависимости от величин расхождений между рассчитанными на k -й итерации значениями $z_0^{(k)}$, $l^{(k)}$, $[c_p^+(s) - c_p^-(s)]^{(k)}$, $h^{(k)}(s)$ и заданными z_0 , l , $f_0(s)$, $h(s)$. Для удовлетворения условий (1.16) на каждом шаге строится квазирешение. Условиями завершения процесса являются условия (1.20), одно из условий (1.21) — (1.23) и

$$\max_{s \in [0, l]} |h(s)^{(k)} - h(s)| < \delta_3$$

Решение рассмотренной задачи также было численно реализовано. Расчеты показали, что сходимость внутреннего итерационного процесса аналогична сходимости в первом из рассмотренных случаев. Внешний же цикл требует, как правило, большего числа итераций, причем их число растет с увеличением толщины закрылка.

Результаты одного из расчетов представлены на фиг. 2, 3 (штрихпунктирные кривые 3) и в строке 3 таблицы. Исходные распределения $v(s)$ и $f_1(s)$, а также координаты точки z_0 и величина l взяты те же, что и в расчетах для профиля с бесконечно тонким закрылком. Заданное распределение $h(s)$ показано на фиг. 2 кривой 5.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 93-013-17522 и 94-01-00992).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Итоги науки и техники. Сер. Мех. жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 23. С. 3—115.
2. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
3. Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Построение крылового профиля с закрылком, моделируемым точечным вихрем // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 3—9.
4. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Построение крыловых профилей методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 5—13.
5. Ильинский Н. Б., Лотфуллин М. В., Маклаков Д. В., Поташев А. В. Определение формы крылового профиля, обтекаемого вблизи границы раздела сред, по заданной эпюре скорости // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 6. С. 15—21.

Казань

Поступила в редакцию
15.XII.1993