

УДК 533.6.011:621.452.335

© 1995 г. А. Н. КРАЙКО, Д. Е. ПУДОВИКОВ, Н. И. ТИЛЛЕВА

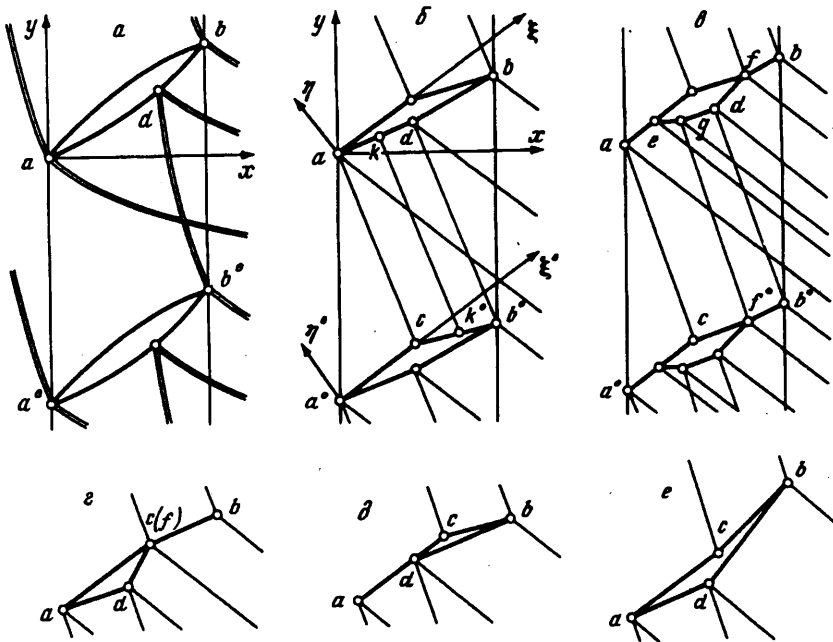
ПРОФИЛИРОВАНИЕ РЕШЕТКИ, ИМЕЮЩЕЙ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ С ДОЗВУКОВОЙ НОРМАЛЬНОЙ К ФРОНТУ РЕШЕТКИ КОМПОНЕНТОЙ СКОРОСТИ МИНИМАЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

В линейном приближении решена вариационная задача построения тонкого профиля плоской решетки, обтекаемой сверхзвуковым потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа при дозвуковой нормальной к фронту решетки компоненте его скорости. Построенные оптимальные профили принципиально отличаются от своего «ближайшего аналога» — обтекаемого сверхзвуковым потоком одиночного профиля, реализующего минимум волнового сопротивления при заданной подъемной силе. Следуя [1], нетрудно показать, что в этом случае оптимальным профилем является пластинка, обтекаемая под углом атаки, который определяется заданной подъемной силой.

1. Рассмотрим решетку плоских профилей (фиг. 1, а). Оси x и y направим по нормали и по касательной к ее фронту. Проекция на оси x и y силы F , действующей на каждый профиль решетки, обозначим через X и Y . Пусть набегающий на решетку поток идеального газа сверхзвуковой при дозвуковой x -компоненте его скорости V . В качестве минимизируемого функционала возьмем X . В зависимости от значений определяющих параметров задачи X может быть и положительно (сопротивление), и отрицательно (тяга). Один из таких параметров — заданная «подъемная сила» Y — входит в задачу как изопериметрическое условие. Еще одним дополнительным ограничением является обоснованное ниже требование отсутствия скачков, распространяющихся от решетки вверх по потоку.

Практический интерес представляют вращающиеся рабочие колеса лопаточных машин. Плоская решетка — аналог их сечения либо некоторой цилиндрической поверхностью, либо квазичилиндрической поверхностью тока, причем сверхзвуковая скорость набегающего стационарного потока получается из-за перехода во вращающуюся вместе с колесом систему координат при достаточно большой ее окружной компоненте. Подобная ситуация типична для концевых частей лопаток первых ступеней современных компрессоров.

От профилей произвольной формы вверх по потоку идут скачки [2], показанные на фиг. 1, а, как и другие скачки, двойными линиями. Можно показать, что в акустическом приближении двумерная мода или совокупность мод является «распространяющейся», т. е. незатухающей, если при переходе в некоторую подвижную систему координат течение становится стационарным, а его скорость — сверхзвуковой. В рассматриваемой задаче оба эти условия выполняются и, следовательно, возмущения, идущие в отрицательном направлении оси x , затухают только из-за слабых нелинейных эффектов. В случае воздушно-реактивного двигателя возмущения, содержащие упомянутые выше скачки, излучаясь из воздухозаборника, становятся источником крайне неприятной составляющей шума, воспринимаемой как «визг пилы». Чтобы возмущений со скачками и их следствия — указанной составляющей шума — не возникло, начальный участок a^* с верхней образующей профиля должен быть отрезком прямой, параллельной V_∞ (фиг. 1, б). При этом $ca - c^+$ -характеристика — прямая $d\eta/d\xi = \operatorname{tg} \alpha_\infty = 1/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$ или $dy/dx = \operatorname{tg}(\theta_\infty + \alpha_\infty)$, где $\xi\eta$ — декартовы



Фиг. 1

координаты с осью ξ , направленной по V_∞ , индекс ∞ приписан параметрам невозмущенного набегающего потока, θ — угол между V и осью x , M — число Маха и α — угол Маха.

Припишем размерным параметрам верхний индекс «ноль», индексами a, b, \dots будем отмечать параметры в точках a, b, \dots . За масштабы длины скорости, плотности, давления и сил возьмем x_b^0 — ширину решетки по x , V_∞^0 , плотность набегающего потока ρ_∞^0 , $\rho_\infty^0 (V_\infty^0)^2$ и $x_b^0 \rho_\infty^0 (V_\infty^0)$ и введем «густоту решетки» $\tau = -y_a^0/x_b^0$. Тогда $x_b = x_b^0 = V_\infty = \rho_\infty = 1$, а $y_a = -\tau$. Если R и N — проекции F на оси ξ и η , то

$$X = R \cos \theta_\infty - N \sin \theta_\infty, Y = R \sin \theta_\infty + N \cos \theta_\infty \quad (1.1)$$

$$R = - \oint p d\eta, N = \oint p d\xi$$

где интегралы берутся по поверхности профиля, обходимой против часовой стрелки.

Рассматривая ниже только профили с прямолинейным участком a^0c , невозмущающие набегающий поток, ограничимся такими τ , θ_∞ и α_∞ , при которых реализуется схема течения, изображенная на фиг. 1, б. В частности, это значит, что скачки, идущие от нижней образующей профиля, не приходят на соседний профиль, а x -дозвуковые потоки до и после решетки разделены сверхзвуковым потоком в межлопаточном канале. Последнее означает, что $x_c < x_b = 1$, а следовательно, τ удовлетворяет условию $\tau \leq \operatorname{tg} \theta_\infty - \operatorname{tg} (\theta_\infty + \alpha_\infty)$.

Для x -дозвукового набегающего потока $\operatorname{tg} (\theta_\infty + \alpha_\infty) < 0$. В случае фиг. 1, б расход $-y_a \rho_\infty V_\infty \cos \theta_\infty = \tau \cos \theta_\infty$ не зависит от условий за решеткой. Если на фиг. 1, б b^0d — идущая от задней кромки ударная волна или замыкающая c^+ -характеристика пучка волн разрежения, то не зависит от условий за решеткой и распределение давления p на cb^0 и на ad . Распределение p на db зависит от указанных условий. Из-за этого R может быть и положительной (сопротивление) и отрицательной (тяга). В принципе отрицательной может быть и «подъемная» сила N .

Без дополнительного условия (или условий) справа от решетки (теоретически при $x = x_+ \rightarrow \infty$) обтекания концевых участков db ее профилей не определено, ибо поток здесь x -дозвуковой. Естественно, возникает вопрос о формулировке указанного условия. Чтобы прояснить его, допустим, что течение правее b^*d при заданном профиле и найденном, например, методом характеристик течения слева от b^*d рассчитывается установлением по времени t . Тогда, согласно [3], в сечении $x = x_+$ при любом $x_+ > 1$ нужно задать один газодинамический параметр φ_+ , отличный от удельной энтропии s , y -компоненты скорости v и правого инварианта Римана одномерного нестационарного течения, зависящего от x и t . Что в задаче обтекания решетки тонких профилей взять в качестве φ_+ , будет уточнено после формулирования вариационной задачи.

Для вращающегося венца величина Y при фиксированной угловой скорости связана с «подводимой» к колесу работой. По этой причине и в задаче с плоской решеткой Y будем считать заданным. В результате возникает следующая вариационная задача: при заданных M_∞ , θ_∞ , τ , φ_+ и Y требуется построить верхнюю образующую профиля с прямолинейным начальным участком a^*c , где $\theta = \theta_\infty$, а ca — c^+ -характеристика невозмущенного потока, и его нижнюю образующую такими, чтобы X было минимальным.

Верхнюю и нижнюю образующие будем рассматривать не у одного, а у соседних профилей, причем для описания верхней образующей «нижнего» профиля (фиг. 1, б) сдвигом $\xi\eta$ по y на $-\tau$ введем систему $\xi^\circ\eta^\circ$. В таких координатах уравнения cb^* и adb есть: $\eta^\circ = h^\circ(\xi^\circ)$ при $\xi_c^\circ \leq \xi^\circ \leq \xi_b^\circ = \xi_b = \sec \theta_\infty$ и $\eta = h(\xi)$ при $0 \leq \xi \leq \xi_b$ соответственно. Так как, по предположению, профиль тонкий, то малы как $h(\xi)$ и $h^\circ(\xi^\circ)$, так и их производные $h'(\xi)$ и $h'^\circ(\xi^\circ)$. Это позволяет линейризовать задачу и для определения p на cb^* и на adb воспользоваться линейной теорией. Если $\vartheta = \theta - \theta_\infty$ — угол между V и осью ξ или ξ° , то уравнения c^+ - и c^- -характеристик имеют вид [4]

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta^\circ}{d\xi^\circ} = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \alpha), \quad d\vartheta \pm \frac{c \operatorname{tg} \alpha}{\rho V^2} dp = 0 \quad (1.2)$$

Здесь и далее верхние (нижние) знаки и индексы отвечают c^+ (c^-)-характеристикам. Линейризуя (1.2), получим

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta^\circ}{d\xi^\circ} = \pm A, \quad dI^\pm = 0, \quad I^\pm = p \pm A\vartheta, \quad A = \operatorname{tg} \alpha_\infty \quad (1.3)$$

Согласно (1.3), в линейном приближении все одноименные характеристики — параллельные прямые, вдоль которых сохраняется инвариант Римана I^+ или I^- . Поэтому пучки волн разрежения, возникающие при обтекании возможных выпуклых изломов контура (например, в точке c) или при взаимодействии потоков за задней кромкой, заменяются «разрывными» c^+ - или c^- -характеристиками, на которых рвется инвариант I^+ или I^- , а сохраняется I^- или I^+ . В дополнение к (1.3) аналогичным образом такими же «разрывными» характеристиками в данном приближении заменяются слабые скачки. Кроме того, энтропия, растущая на слабых скачках, как куб приращения давления, в линейном приближении не отличается от s_∞ . Сказанное уже учтено на фиг. 1, б, где помимо профилей, переднего и заднего фронтов решетки и координат нарисованы разрывные c^+ - и c^- -характеристики и некоторая «непрерывная» c^+ -характеристика kk° . Наконец, для тонких профилей в силу условия непротекания на cb : $\vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = h'^\circ(\xi^\circ)$, а на ab : $\vartheta = h'(\xi)$. Так как на cb^* приходят c^- -характеристики из невозмущенного потока, где $I_\infty^- = p_\infty$, а на ad — c^+ -характеристики с cb^* , где $I^+ = p + A\vartheta = I^- + 2A\vartheta = p_\infty + 2Ah'^\circ(\xi^\circ)$, то

$$p(\xi^\circ) = p_\infty + Ah'^\circ(\xi^\circ), \quad \xi^\circ \in cb^* \quad (1.4)$$

$$p(\xi) = p_\infty + A [2h'^\circ(\xi^\circ) - h'(\xi)], \quad \xi \in ad$$

Во втором выражении ξ° и ξ связаны условием, что соответствующие точки образующих ad и cb° (на фиг. 1, b это — точки k и k°) соединены c^+ -характеристикой, т. е. согласно (1.3)

$$A(\xi^\circ - \xi) + h(\xi) - h^\circ(\xi^\circ) = A\xi_c^\circ = -\tau \cos(\theta_\infty + \alpha_\infty) / \cos \alpha_\infty \quad (1.5)$$

Учет в этой формуле h и h° дает в $p(\xi)$ квадратичные добавки, пренебрегаемые в линейном приближении. Поэтому в (1.4) достаточно использовать связь

$$\xi = \xi^\circ - \xi_c^\circ = \xi^\circ + \tau \cos(\theta_\infty + \alpha_\infty) / \sin \alpha_\infty$$

В то же время при вычислении N , чтобы не потерять квадратичных членов, для $d\xi/d\xi^\circ$ необходимо пользоваться вытекающей из (1.5) формулой

$$\frac{d\xi}{d\xi^\circ} = \frac{A - h'}{A - h'^\circ} \approx 1 + \frac{1}{A}(h' - h'^\circ) \quad (1.6)$$

Давление на db определяется не только наклоном контура $\vartheta = h'(\xi)$, но и величиной инварианта I^+ , которую приносят на db c^+ -характеристики, распространяющиеся против потока теоретически из «правой бесконечности». В точной постановке благодаря нелинейным эффектам поток при $x \rightarrow \infty$ выравнивается и по ϑ и по давлению ($\vartheta \rightarrow \vartheta_+ \neq 0$, $p \rightarrow p_+ \neq p_\infty$). Как следствие этого $I^+ \equiv p + A\vartheta \rightarrow I_+^+ = p_+ + A\vartheta_+ \neq I_\infty^+$. C^+ -характеристики, идущие к решетке из «правой бесконечности», пересекают, как и линии тока, бесконечное число затухающих слабых скачков. Из-за этого [5] отличие I^+ и s на заднем фронте решетки и при $x = \infty$ есть $O(\varepsilon^2)$, где ε — интенсивность уходящих вправо скачков при $x = x_b = 1$. Поэтому в линейном приближении в качестве упоминавшегося в формулировке вариационной задачи параметра φ_+ естественно взять I_+^+ или $i = (I_+^+ - I_\infty^+) A^{-1}$, причем для справедливости линейной теории i мал, как и h' , h'° , h и h° . В результате найдем, что

$$p(\xi) = p_\infty + A[i - h'(\xi)], \quad \xi \in db \quad (1.7)$$

Подставим (1.4) и (1.7) в (1.1). Учтем (1.6) то, что на контуре $d\eta = h'd\xi$ и $d\eta^\circ = h'^\circ d\xi^\circ$, и пренебрежем в выражении для R величинами, кубичными по h , h' и i . Благодаря последнему переменные пределы интегрирования по ξ заменяются константами ξ_c° , $\sec \theta_\infty - \xi_c^\circ$ и т. д. Опустив несущественный для вариационной задачи положительный множитель A , получим

$$R = \int_0^{\sec \theta_\infty - \xi_c^\circ} [h'(\xi) - h'^\circ(\xi^\circ)]^2 d\xi + \int_{\sec \theta_\infty - \xi_c^\circ}^{\sec \theta_\infty} [h'(\xi) - i] h'(\xi) d\xi \quad (1.8)$$

$$N = (\xi_b - \xi_d) i + \frac{2}{A} \int_{\xi_c^\circ}^{\sec \theta_\infty} [h'(\xi) - h'^\circ(\xi^\circ)] h'^\circ(\xi^\circ) d\xi^\circ$$

Опыт решения вариационных задач газовой динамики показывает [6], что при использовании приближенных теорий необходимо не подразумевать, а формулировать математические условия их применимости. Линейная теория сверхзвуковых течений применима, если

$$-k \leq h'(\xi) \leq k, \quad -k \leq h'^\circ(\xi^\circ) \leq k, \quad -k \leq i \leq k \quad (1.9)$$

с достаточно малой заданной положительной константой k . В рассматриваемом случае выполнение (1.9) обеспечивает малость всех возмущающих факторов, а следовательно, малое отличие всех параметров от параметров набегающего потока. В силу (1.9) величина задаваемой в задаче силы Y должна быть также малой.

2. Прежде чем получить необходимые условия, определяющие форму искомого профиля, выясним принципиальные особенности возможных оптимальных конфигураций. В общем случае их контур состоит из гладких участков, стыкующихся в точках излома. Причин изломов может быть несколько. Так, в s заданная параллельная

V_{∞} образующая слева соединяется с искомым участком cb° справа. Это соединение не обязано (если в задаче нет ограничения на минимально допустимый радиус кривизны) быть гладким. Другой причиной излома является приход на контур разрывной характеристики, несущей скачок p . На фиг. 1, б такова c^+ -характеристика $b^{\circ}d$, что учтено изломом в точке d . Еще одной причиной изломов может быть пересечение нижней и верхней образующей. Чтобы исключить такую возможность, приходится вводить отрезки нулевой толщины, как показано на фиг. 1, в. На ней изломы данного типа располагаются в точках e и f , причём излом в f индуцирует скачок p на fg и как следствие этого — излом в точке g нижней образующей. Вариантами достаточного общего профиля фиг. 1, в являются профили фиг. 1, г и д, где в отличие от фиг. 1, а — в нарисовано по одному профилю. При этом точки d и f имеют тот же смысл, что и на фиг. 1, в. Профили, изображенные на фиг. 1, б, г и д, назовем профилями типа Б, Г и Д. Профиль типа Г может быть оптимальным, только если характеристика $b^{\circ}d$ пересекает ось ξ при $0 < \xi < \xi_c^{\circ}$. Для этого должно выполняться условие $2\tau \cos(\theta_{\infty} + \alpha_{\infty}) > -\tau g \theta_{\infty} \sin \alpha_{\infty}$.

На фиг. 1, б — е гладкие участки оптимальных профилей, кроме $a^{\circ}c$, нарисованы прямыми условно. Для определения их оптимальной формы, а также значений изломов образующей оптимального профиля составим вспомогательный функционал

$$I = X^{\circ} + \lambda Y^{\circ} \quad (X^{\circ} = X/\cos \theta_{\infty}, Y^{\circ} = Y/\cos \theta_{\infty})$$

в котором X° и Y° отличаются от X и Y несущественным для вариационной задачи положительным множителем, а λ — пока неизвестный постоянный множитель Лангранжа. При любом допустимом (сохраняющем Y°) варьировании оптимизируемого профиля вариации I и X° совпадают. Поэтому, например, для профиля типа Б в силу (1.1) и (1.8) будем иметь

$$\begin{aligned} \delta X^{\circ} = \delta I = F_1 \Delta \xi_d + F_2 \Delta y_b + 2\lambda_1 \left\{ \int_a^d [(1 - \chi) h'''' - h'''] \delta h d\xi - \right. \\ \left. - \int_d^b h'' \delta h d\xi - \int_c^{b^{\circ}} [(1 - \chi) h'' + (2\chi - 1) h'''] \delta h^{\circ} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$F_1/\lambda_1 = 2(h_{d-}' - h_b^{\circ}') (A - h_{d-}') + (i - 2h_{d+}') (A - h_{d+}') + 2\chi (A - h_{d-}') h_b^{\circ}' - \chi A i$$

$$F_2/(\lambda_1 \sin \theta_{\infty}) = 2 (h_b^{\circ}' - h_{d-}') (A - h_b^{\circ}') + (2h_{d+}' - i) A +$$

$$+ (i - 2h_b') h_b' + 2 [h_b' - h_{d+}' + \chi (h_{d-}' - h_b^{\circ}')] \operatorname{ctg} \theta_{\infty} +$$

$$+ 2\chi (2h_b^{\circ}' - h_{d-}' - A) h_b^{\circ}' + \chi A i$$

$$\lambda_1 = 1 + \lambda \operatorname{tg} \theta_{\infty}, \lambda_2 = \lambda - \operatorname{tg} \theta_{\infty}, \chi = \lambda_2/(\lambda_1 A)$$

Здесь $\Delta \xi_d$ и Δy_b — разности координат точек d и b проварьированного и исходного профилей, а δh и δh° — вариации h и h° при фиксированных ξ и ξ° соответственно. При выводе (2.1) не рассматривались «односторонние» допустимые вариации (например, $\Delta \xi_c \geq 0$ и $\Delta x_b \leq 0$). Кроме того, предполагалось, что для проварьированной конфигурации, как и для исходной, c^+ -характеристика $b^{\circ}d$ приходит в точку излома нижней образующей. Условия минимума X° , связанные с отсутствующими в (2.1) приращениями координат точек c , b и d , которые нарушают эти предположения, имеют вид неравенств. Они в отличие от следующих из (2.1) равенств не используются при построении оптимального контура, а проверяются после его построения.

В соответствии со сказанным при определении δI учитывалось, что $\Delta y_b^{\circ} = \Delta y_b$ и т. п., а также следующие моменты. Из (1.5) и из $\Delta x_b = 0$ в концевой точке профиля имеем

$$\Delta h_d = \Delta h_b + A (\Delta \xi_d - \Delta \xi_b) \quad (2.2)$$

$$\Delta \xi_b = \Delta y_b \sin \theta_{\infty}, \Delta h_b^{\circ} = \Delta h_b = \Delta y_b \cos \theta_{\infty}$$

Если в (2.1) заменить λ_1 и λ_2 на $\text{tg } \theta_\infty$ и 1, то получится формула для δY° . Последнее понятно, ибо данная замена эквивалентна делению $\delta I = \delta X^\circ + \lambda \delta Y^\circ$ и правой части (2.1) на $\lambda \rightarrow \infty$. Конечно, полученное выражение для δY° тождественно выражению, которое при вычислении δI находилось варьированием представления Y° через R и N из (1.1) с учетом (2.2) и других отмечавшихся выше обстоятельств. При допустимом варьировании $\delta Y^\circ = 0$. Поэтому входящие в (2.1) и в формулу для δY° вариации и приращения не независимы. Чтобы при выводе необходимых условий минимума (точнее, экстремума) X° забыть об этом, сделаем точку d «компенсирующей». Это значит [6], что наряду с варьированием h или h' знакоопределенным способом в малой окрестности любой внутренней точки гладкого участка образующей или со смещением точки b вдоль заднего фронта решетки дается такое приращение $\Delta \xi_d$, чтобы Y° оставалось постоянным. Можно показать, что связанное с этим изменение контура слева и справа от d вносит в δX° вклад более высокого порядка и поэтому может не учитываться в интегральных слагаемых (2.1). Одновременно за счет произвола в выборе λ в формуле для δX° обратим в нуль коэффициент при $\Delta \xi_d$, т. е. положим

$$F_1 \equiv F_1(h_{d-}', h_{d+}', h_b'', \lambda, \theta_\infty, A, i) = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3), линейное относительно λ , в общем случае однозначно определяет указанный множитель через прочие входящие в (2.3) параметры. Теперь Δy_b , δh и $\delta h''$, оставшиеся в (2.1), можно считать независимыми. В силу этого необходимые условия оптимальности принимают вид

$$h''(\xi) = 0, h'''(\xi^\circ) = 0 \quad (2.4)$$

$$F_2 = F_2(h_{d-}', d_b'', h_{d+}', h_b', \lambda, \theta_\infty, A, i) = 0 \quad (2.5)$$

Согласно (2.4), оптимальный профиль образован прямолинейными отрезками. Данное свойство справедливо и для профилей типа Γ и Δ . С учетом того, что $h_{d+}' = h_b'$, а $h_{d-}' = h_a'$, условия (2.3) и (2.5) сводятся к равенствам

$$2(h_a' - h_b'') (A - h_a') + (i - 2h_b') (A - h_b') + [2(A - h_a') h_b'' - Ai] \chi = 0 \quad (2.6)$$

$$(h_b'' - h_a') [h_a' - h_b'' + (2h_b'' - \text{ctg } \theta_\infty) \chi] = 0$$

Для оптимальных профилей типа B в силу (1.8) и (2.4)

$$R = (\sec \theta_\infty - \xi_c) (h_a' - h_b'')^2 + \xi_c (h_b' - i) h_b'$$

$$N = 2(\sec \theta_\infty - \xi_c) (h_a' - h_b'') h_b'' / A + (\xi_b - \xi_d) i \quad (2.7)$$

$$\xi_c \equiv \xi_c^\circ = -\tau \cos(\theta_\infty + \alpha_\infty) / \sin \alpha_\infty$$

и, следовательно,

$$Y^\circ = Y^\circ(h_a', h_b'', h_b', \theta_\infty, A, i, \tau, \xi_b, \xi_d) = R \text{tg } \theta_\infty + N$$

При фиксированных θ_∞ , α_∞ , $A = \text{tg } \alpha_\infty$ и τ значения h_b' , ξ_b и ξ_d однозначно связаны с h_a' и h_b'' условием замкнутости профиля (совпадения точек b и b''), тем что точки b и d соединяет c' -характеристика — прямая $d\eta/d\xi = A$ или $dy/dx = \text{tg}(\theta_\infty + \alpha_\infty)$, и равенством $x_b = 1$. Поэтому задание Y° связывает h_a' с h_b'' . Воспользовавшись этой связью и уравнением, которое получается после исключения χ из двух равенств (2.6), придем к уравнению, определяющему оптимальное h_b'' , а затем — оптимальные h_a' и h_b' , т. е. искомый оптимальный профиль. Если найденные описанным выше способом значения h_a' , h_b'' и h_b' удовлетворяют условиям применимости линсйной теории (1.9), то отвечающие им профили назовем « D -профилями», ибо все образующие их прямолинейные отрезки — участки «двустороннего экстремума». Нарушение условий (1.9) означает, что следует перейти к профилям, которые содержат хотя бы один участок «краевого экстремума», где $|h'| = k$ или $|h''| = k$. Такие оптимальные профили будем называть « K -профилями».

Заметим, что k зависит от M_∞ , будучи заведомо меньше $\text{tg } \theta^\infty$, где $\theta^\infty(M_\infty)$ —

максимальный угол поворота в косом скачке ($\theta'' \rightarrow 0$ при $M_\infty \rightarrow 1$). Все сказанное справедливо и для профилей типа Γ и D . Условия их построения как D -профилей получаются аналогично (2.6). Не останавливаясь на этих условиях и на формулировке неравенств, которые должны выполняться на участках краевого экстремума, перейдем к результатам расчета, сделав перед этим одно замечание общего характера.

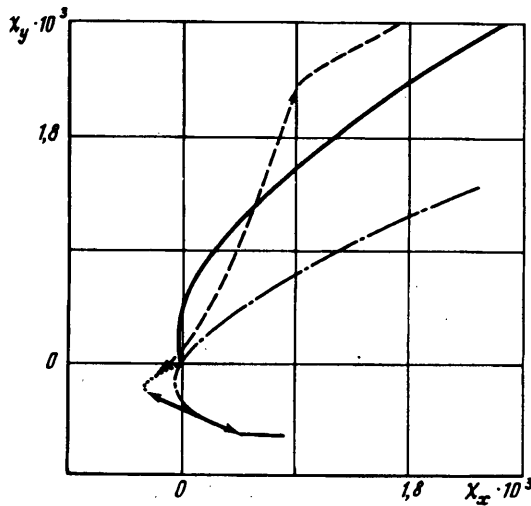
Как уже отмечалось, аналогом рассматриваемой вариационной задачи можно считать задачу построения одиночного изолированного профиля, который в сверхзвуковом потоке при заданной подъемной силе $Y \equiv N$ обладает минимальным волновым сопротивлением $X \equiv R$. В рамках линейной теории таким профилем является пластина, обтекаемая под углом атаки, который обеспечивает заданное значение Y . Если разность проекций концевых точек пластины на направление набегающего потока взять за линейный масштаб и обозначить через ϵ максимум $|h'|$ и $|h''|$, где $h(\xi)$ и $h'(\xi^0)$ имеют прежний смысл, причем оси ξ , ξ^0 и x совпадают и направлены по V_∞ , то для изолированного тонкого профиля $X = O(\epsilon^2)$, а $Y = O(\epsilon)$.

Поскольку в изопериметрическом условии в линейном приближении не учтены слагаемые порядка ϵ , когда X — величина именно этого порядка, то на первый взгляд такая постановка вариационной задачи вызывает возражения. Несмотря на это, при малых Y пластина под углом атаки близка к оптимальному одиночному профилю и в более точной постановке, что можно показать, решив ту же задачу с привлечением квадратичных членов. Для решетки, невозмущающей набегающий поток, и R , и зависящая от формы профиля часть N , получающаяся из N вычитанием константы $i\xi_c$, — величины одного порядка $O(\epsilon^2)$ при $\epsilon = \max |h', h'', i|$. Тем не менее нелинейные поправки вносят в N погрешность того же порядка и в отличие от задачи для изолированного профиля обосновать пренебрежение ею не удастся.

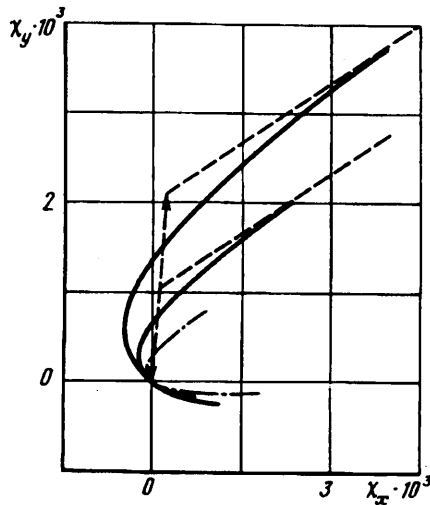
В свете сказанного рассматриваемая в данной работе вариационная задача в первую очередь интересна как ориентир, позволяющий с большим пониманием ставить и решать задачи профилирования решеток. Так, и в нелинейной постановке для тонких профилей сохраняются возможные типы оптимальных конфигураций, изображенные на фиг. 1, хотя из-за отличия даже слабых скачков и волн разрежения от «разрывных» характеристик координаты точек излома ξ_d , а при $h_{c+}' > 0$ — и ξ_c изменяется на $O(\epsilon)$. Далее, анализ с включением в N дополнительных квадратичных членов показывает, что и в таком приближении прямолинейные образующие db , cb^0 и ad (почти всюду) удовлетворяют соответствующим необходимым условиям экстремума — аналогом уравнений (2.4). Исключение составляют малые (порядка ϵ) окрестности точек a и d на ad , куда приходят (или могут приходиться) пучки волн разрежения, идущие от cb^0 .

Сказанное существенно облегчает построение близких к оптимальным профилей типа B , характеризуемых лишь двумя углами. Такое построение можно проводить, рассчитывая сверхзвуковой поток методом характеристик или другим численным методом в рамках полных уравнений газовой динамики. Для тонких профилей скачки слабые. Как следствие этого и в нелинейном приближении ударная волна b^0d , а следовательно, и точка d при выбранной форме отрезков cb^0 и ad с точностью до $O(\epsilon)$ включительно однозначно определяются заданным i . Помимо сказанного сравнение оптимальных и неоптимальных решеток, выполненное в линейном приближении, дает представление если не о точных величинах, то по крайней мере о порядке выигрыша, который можно ожидать за счет оптимального профилирования в более точной постановке.

3. При представлении результатов из N удобно вычесть константу $i\xi_c$. В соответствии с этим вместо X и Y будем рассматривать $\chi_x = X + i\xi_c \sin \theta_\infty$ и $\chi_y = Y - i\xi_c \cos \theta_\infty$. Нетрудно видеть, что χ_x и χ_y — это те части x - и y -компонент силы F , действующей на каждый профиль решетки, которые зависят от его формы. Для решетки пластин ($h \equiv h' \equiv 0$) $\chi_x = \chi_y = 0$, а X и Y при $i \neq 0$ отличны от нуля. Те же χ_x , χ_y , X и Y в рамках линейной теории при фиксированных M_∞ , θ_∞ и τ имеет любая решетка из профилей в форме параллелограмма с $h'(\xi) \equiv 0$ на параллельном и равном a^0c отрезке db и $h'(\xi) \equiv h''(\xi^0) \equiv h_b^{0'} \leq 0$ — на других его сторонах. Благодаря последнему $\xi_b - \xi_d = \xi_c$ с ξ_c из (2.7) и в силу (2.7) у всех таких профилей $R = 0$, а $N = i\xi_c$. Равенство нулю R , χ_x и χ_y у решеток из



Фиг. 2

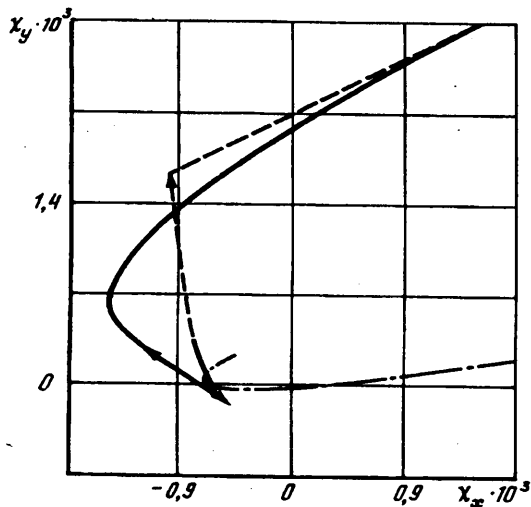


Фиг. 3

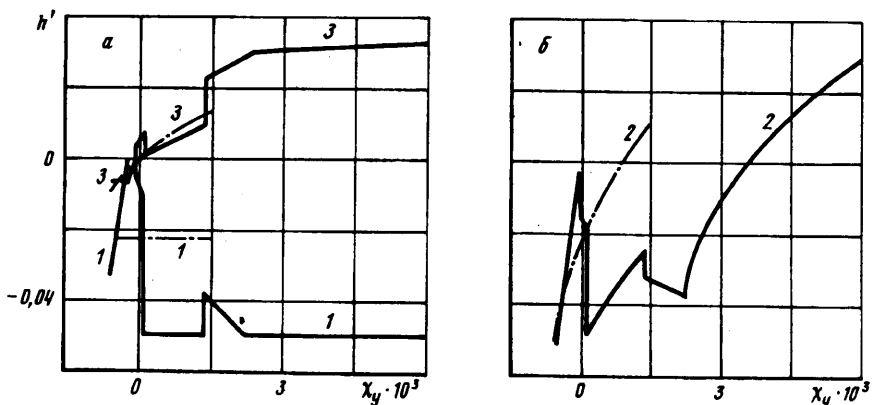
параллелограммов роднит их с «бипланом Буземана» [4], который в сверхзвуковом потоке не имеет волнового сопротивления. Такие решетки естественно назвать «решетками Буземана», хотя при $i \neq 0$ сила F , действующая на каждый их профиль, не равна нулю.

В соответствии с результатами разд. 2 был создан численный алгоритм, который для заданных M_∞ , θ_∞ , τ и i позволяет строить поляру оптимальной решетки из «Д- и К-профилей» разных типов. Возможности этого алгоритма иллюстрируют фиг. 2—5, отвечающие $M_\infty = 1,28$; $M_{x_\infty} = 0,6$, в силу чего $\cos \theta_\infty = 0,46875$, $\tau = 3$ и трем $i = -0,05$; 0 и $0,05$.

На фиг. 2 изображены поляры профилей, построенных для $i = -0,05$, на фиг. 3 — для $i = 0$ и на фиг. 4 — для $i = 0,05$. На всех фигурах сплошные кривые — поляры четырехугольных профилей типа Б, а штриховые — треугольных профилей с «хвостиком» типа Г, пунктирная на фиг. 2 — треугольные профили типа Д с передней пластинкой. Участки сплошных и штриховых кривых, ограниченные с двух сторон стрелками, а также пунктирная кривая (на фиг. 2) отвечают



Фиг. 4



Фиг. 5

Д-профилям. На них углы наклона касательной к контуру всюду по модулю меньше максимально допустимой величины k . Остальные части поляра соответствуют «К-профилям», которые на фиг. 2 и 4 построены для $k = 0,05$. Последняя величина составляет немного меньше половины ϑ^m для $M_\infty = 1,28$. Чтобы показать зависимость результатов от величины k , на фиг. 3 наряду с полярами (кривые 1), построенными для $k = 0,05$, изображены поляры (кривые 2), построенные для $k = 0,035$. У сплошных кривых над осью абсцисс ($\chi_x > 0$) предельно допустимый наклон имеет участок ad , т. е. $h'_a = -k$, а под осью абсцисс — участок cb' . На нем $h'' \equiv h'_b = -k$. Для любого χ минимум сопротивления дает «составная» поляра, состоящая из отрезков сплошных, штриховых и пунктирных линий, имеющих при данном χ наименьшее χ_x . Как показывают фиг. 2—4, в зависимости от величины χ , минимум сопротивления (при $\chi_x < 0$ — максимум тяги) реализуют Д- или К-профили разных типов. Это же демонстрирует фиг. 5, а и б. На них для $i = -0,05$ и $k = 0,05$ изображены h'_a , h'_b и h'_c как функции χ_y . Соответствующие кривые помечены цифрами 1, 2 и 3. Горизонтальные участки кривых отвечают К-профилям (исключение — участок $h'_a = 0$, отвечающий Д-профилям типа Д). Штрихпунктиром на фиг. 2—4 для сравнения даны поляры четырехугольных неоптимальных профилей типа Б, что позволяет судить о выигрыше по χ_x за

счет оптимального профилирования. На фиг. 5 для $i = -0,05$ также штрихпунктиром нарисованы h_a' , $h_b^{\circ'}$ и h_b' как функции χ_x для этих профилей.

Заканчивая описание результатов, обратим внимание на многообразие конфигураций, реализующих минимум χ_x в рассматриваемой вариационной задаче. Это — профили типов *Б*, *Г* и *Д*, причем у профилей типа *Б* $h_b^{\circ'}$ может быть и отрицательно (фиг. 1, б) и положительно (фиг. 1, е). Разумеется, соображения, связанные с прочностными требованиями, учетом вязкости и т. п., существенно ограничивают возможность практического применения построенных профилей. Несмотря на это, полученные результаты дают полезные ориентиры для профилирования решеток, обтекаемых сверхзвуковым потоком с дозвуковой осевой компонентой скорости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17514).

Авторы признательны В. А. Вострецовоу за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория оптимальных аэродинамических форм//Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
2. *Lichtfuss H. J., Starken H.* Supersonic cascade flow//Progress Aerospace Sci. Oxford e. a.: Pergamon Press, 1974. V. 15. P. 37—150.
3. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
4. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
5. *Крайко А. Н., Осипов А. А.* Затухание периодической последовательности слабых ударных волн в каналах со «звукопоглощающими» стенками//Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 97—105.
6. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XI.1993