

УДК 532.592

© 1995 г. В. А. КАЛИНИЧЕНКО, С. В. НЕСТЕРОВ,
С. Я. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ, А. А. ЧАЙКОВСКИЙ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПРИ РЕЗОНАНСЕ ФАРАДЕЯ

Представлены результаты исследований стоячих двумерных гравитационных волн на свободной поверхности однородной жидкости при вертикальных колебаниях прямоугольного сосуда, возбуждаемых в условиях резонанса Фарадея. Определены частотные диапазоны возбуждения, сняты и проанализированы резонансные зависимости для второй и третьей мод; оценены проявления нелинейности генерируемых волн: асимметрия волновых профилей, колебания узлов; рассмотрены обрушение волн и возникновение неустойчивых форм колебаний. Проведено сопоставление экспериментальных результатов с теоретическими.

В экспериментальных работах, посвященных резонансу Фарадея [1—4], изучались главным образом условия возникновения резонанса и амплитудно-частотные характеристики.

1. **Постановка эксперимента.** Эксперименты проводились на установке, описанной в [5]. Прямоугольный сосуд ($L = 50$ см, $W = 4$ см, $H = 40$ см), изготовленный из прозрачного оргстекла, заполнялся дистиллированной водой на 0,15—0,4 его высоты и помещался на низкочастотный вибростенд, сообщающий ему колебания в вертикальном направлении. Амплитуда колебаний могла быть установлена любой из интервала 0,03—7,0 см, а частота при фиксированной амплитуде могла плавно изменяться в диапазоне 0,3—10 Гц. Возбуждение волн, как и в [5], осуществлялось при потере устойчивости горизонтальной свободной поверхности жидкости, если амплитуда колебаний сосуда превышала некоторое пороговое значение, а частота попадала в один из резонансных диапазонов. Регистрация волновых движений жидкости осуществлялась кинокамерой, жестко связанной с сосудом. Измерения смещения свободной поверхности жидкости от положения равновесия по материалам киносъемки производилось с точностью 0,1 см. Изучались вторая и третья волновые моды, возбуждаемые на основном резонансе Фарадея.

2. **Теоретическая модель.** Приведем ряд формул, по которым на основе результатов измерений рассчитывались величины, характеризующие параметрический резонанс и возбуждаемые волны.

Пусть s — амплитуда, а Ω — частота колебаний сосуда. Параметрическое возбуждение двумерных поверхностных волн с волновым числом $\kappa = \pi n/L$ (n — номер волновой моды, равный числу узлов стоячей волны) и линейной частотой $\omega = (\kappa g \tanh \kappa h)^{1/2}$ (h — глубина жидкости, g — ускорение свободного падения) имеет место, если расстройка $\Delta = \omega - \Omega/2$ удовлетворяет условию

$$|\Delta| < \frac{s\Omega^3}{8g} \quad (2.1)$$

Эти и приводимые ниже формулы выведены в [6] в предположении, что перегрузка сосуда $s\Omega^2/g$ и крутизна волны равны параметру $\varepsilon \ll 1$.

Координаты x и y точек свободной поверхности жидкости в системе координат, жестко связанной с сосудом, изменяются с течением времени t согласно

формулам

$$\begin{aligned}
 x &= a - \zeta \frac{\operatorname{ch} \kappa h}{\operatorname{sh} \kappa h} \sin \kappa a \cos \psi + \zeta^2 \kappa \frac{\sin 2\kappa a}{8\operatorname{sh}^2 \kappa h} (1 + \cos 2\psi) - \\
 &- \frac{3}{16} \zeta^2 \kappa \frac{\operatorname{ch} 2\kappa h}{\operatorname{sh}^4 \kappa h} \sin 2\kappa a \cos 2\psi + \frac{1}{4} \zeta^2 \kappa \frac{\operatorname{ch} 2\kappa h}{\operatorname{sh}^2 \kappa h} \sin 2\kappa a \\
 y &= \zeta \frac{\cos \kappa a \cos \psi}{\operatorname{sh}^4 \kappa h} + \zeta^2 \kappa \frac{\operatorname{sh} 2\kappa a}{8\operatorname{sh}^2 \kappa h} (1 + 2\cos \psi) + \\
 &+ \frac{3}{16} \zeta^2 \kappa \frac{\operatorname{sh} 2\kappa h}{\operatorname{sh}^4 \kappa h} \cos 2\kappa a \cos 2\psi - \\
 &- \frac{1}{4} \zeta^2 \kappa \frac{\cos 2\kappa h}{\operatorname{sh} 2\kappa h} \cos 2\kappa a, \quad \psi = \frac{\Omega t}{2} + \theta(t)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $a \in [0, L]$ — параметр, определяющий индивидуальность точек свободной поверхности, причем $a = 0$ на левой и $a = L$ на правой боковых стенках сосуда. Функции $\zeta(t)$ и $\theta(t)$ — амплитуда и медленная фаза волны соответственно. Они с точностью до $O(\varepsilon)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \zeta \sin 2\theta \tag{2.3}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \cos 2\theta - \beta \zeta^2 \omega \kappa^2$$

$$\beta = \frac{1}{64} \operatorname{th}^{-4} \kappa h (\operatorname{th}^6 \kappa h + 3 \operatorname{th}^4 \kappa h + 12 \operatorname{th}^2 \kappa h - 9)$$

Амплитуда ζ и фаза ψ стационарных волн определяются формулами

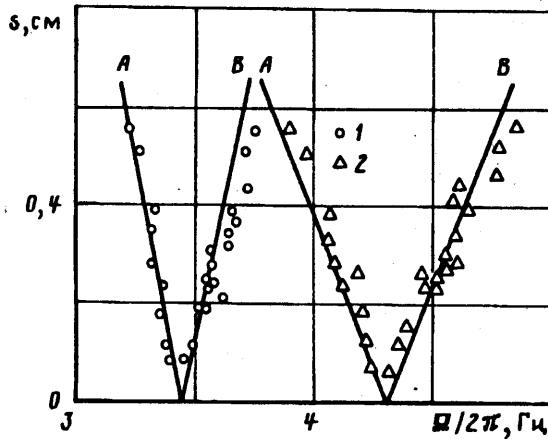
$$\kappa^2 \zeta^2 \omega \beta = \pm \Delta + \varepsilon \omega^2 \frac{1}{2\Omega} \tag{2.4}$$

$$\psi = \frac{\Omega t}{2} + \frac{\pi \mp \pi}{2} (\beta \geq 0)$$

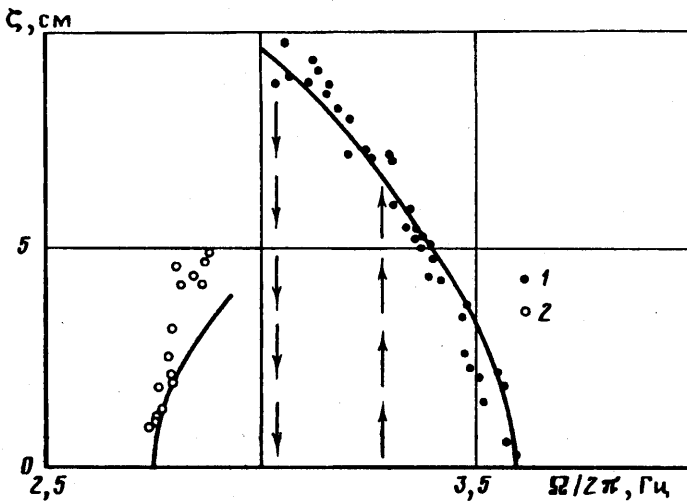
3. Диаграммы устойчивости. Резонансные зависимости. Частотный диапазон параметрического возбуждения волн, согласно (2.1), определяется амплитудой s и частотой Ω колебаний сосуда. В экспериментах использовалась следующая методика оценки границ этого диапазона. Сначала рассчитывалась собственная частота ω для данной моды и устанавливалась частота колебаний сосуда $\Omega = 2\omega$ при выбранной амплитуде s . После выхода колебаний на стационарный режим частота Ω плавно изменялась так, чтобы высота волны уменьшалась. Это изменение продолжалось до значения Ω_B , при котором амплитуда волны практически равна нулю; $\Omega = \Omega_B$ принималась за граничное значение. Другая граница Ω_A диапазона находилась путем дискретного изменения с малым шагом частоты колебаний сосуда в обратном направлении, т. е. при увеличении амплитуды волны.

При каждом новом значении Ω вибростенд выключался. Волновые движения жидкости затухали. После их полного прекращения сосуду опять сообщались колебания с частотой Ω и фиксировалось наличие или отсутствие раскочки волны. Если в течение 20 мин стационарный режим колебаний жидкости не достигался, то соответствующее значение частоты Ω принималось за граничное Ω_A .

Для второй ($n = 2$) и третьей ($n = 3$) волновых мод при $h = 15$ см проведены



Фиг. 1



Фиг. 2

серии измерений значений Ω_A и Ω_B для различных значений амплитуды колебаний сосуда s . В результате для указанных мод построены диаграммы устойчивости, представленные на фиг. 1. Сплошными линиями показаны границы диапазона параметрического возбуждения, рассчитанные по (2.1). Сопоставляя экспериментальные и теоретические данные, можно отметить довольно хорошее их совпадение для $s = 0,4$ см.

При $s > 0,4$ см то, что экспериментальная зона неустойчивости шире теоретической, можно объяснить на примере второй моды колебаний следующим образом. Правая граница смещена в область высоких частот за счет того, что при данных s происходит перекрытие второй и третьей мод. Для этой области характерно нелинейное взаимодействие мод и возможны режимы, когда вторая мода, просуществовав некоторое время, переходит в третью, которая через некоторое время переходит во вторую, и затем весь процесс периодически повторяется.

Из фиг. 1 видно наличие пороговых амплитуд колебаний сосуда s^* , ниже которых для любых Ω свободная поверхность жидкости остается невозмущенной. Для второй моды (точки 1) $s^* = 0,07$ см, для третьей (точки 2) $s^* = 0,04$ см. Эффекты вязкого затухания волн учитываются в рамках линейной модели [7],

согласно которой пороговые амплитуды для второй и третьей мод равны 0,05 и 0,03 см соответственно.

Амплитуда возбуждаемой волновой моды зависит не только от частоты Ω и амплитуды s колебаний сосуда, но и от глубины жидкости h (см. (2.4)). На фиг. 2 в качестве примера для второй моды представлены зависимости амплитуды ζ от частоты Ω колебаний сосуда при различных глубинах жидкости. В качестве ζ при измерениях бралась полусумма максимальной и минимальной ординат волновой поверхности.

Для второй моды $n = 2$ при глубине $h = 15$ см и $s = 0,25$ см (кривая 1) при уменьшении частоты амплитуда волны возрастает (случай $\beta > 0$). Это наблюдается до значения Ω , при котором происходит срыв колебаний (направленные вниз стрелки на фиг. 2). При дальнейшем уменьшении частоты колебаний сосуда свободная поверхность остается невозмущенной при условии, что Ω не попадает в пределы резонансной зоны соседних мод. Если после срыва колебаний медленно увеличивать Ω , то при некоторой частоте Ω_A наблюдается скачкообразный рост амплитуды (жесткое возбуждение, на фиг. 2 направленные вверх стрелки) и при дальнейшем увеличении Ω амплитуда ζ уменьшается.

С уменьшением глубины наклон резонансных кривых изменяется. Для второй моды при $h = 6,0$ см, $s = 0,34$ см получена резонансная кривая 2 с явно выраженным наклоном вправо.

Для сравнения с данными эксперимента на фиг. 2 приведены резонансные кривые, рассчитанные по формулам (2.4).

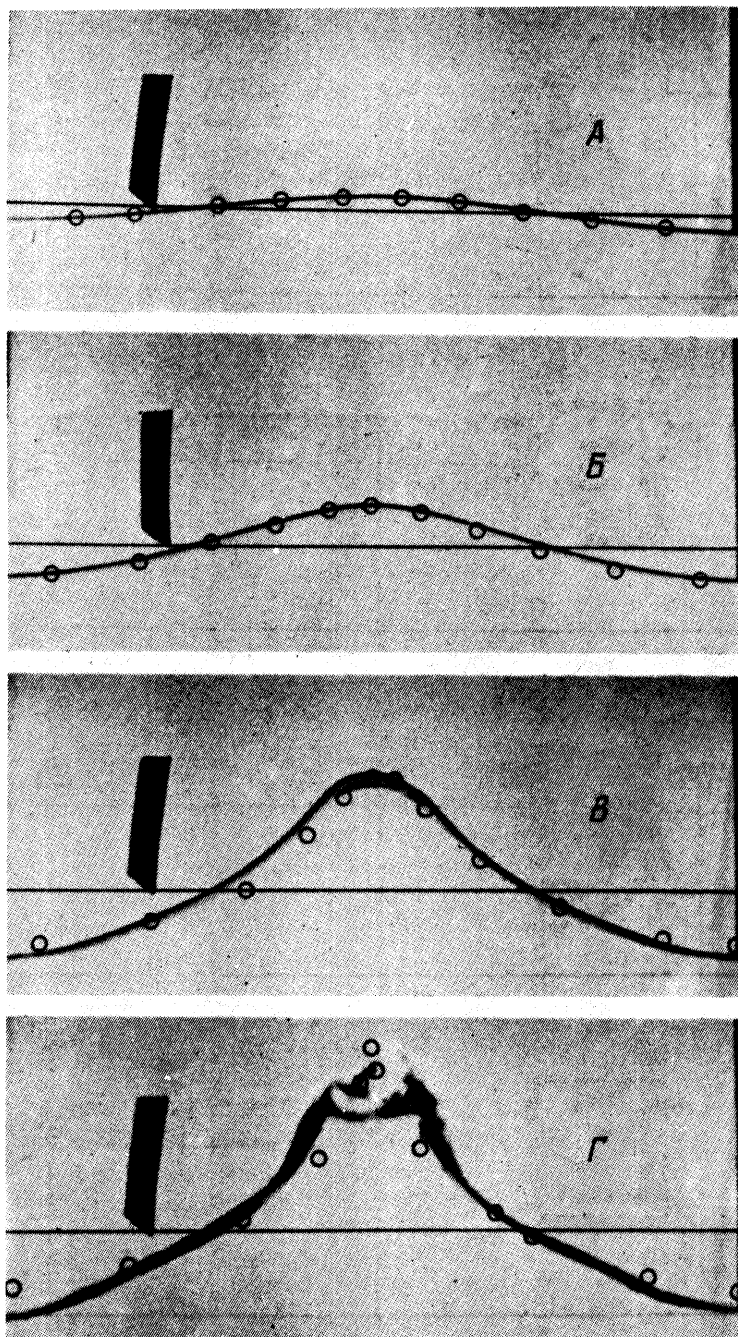
Анализ наклона резонансных кривых показывает, что определяющим является соотношение между глубиной жидкости h и длиной волны $\lambda = 2L/n$, параметр h/λ определяет знак β . Решение уравнения $\beta = 0$ дает критическое значение $h/\lambda = 0,168$, из эксперимента же $h/\lambda \approx 0,15$. Отметим, что теория [8] и эксперимент [9], посвященные исследованию вынужденных стоячих поверхностных волн, дают величину $h/\lambda = 0,17$ и $0,14$ соответственно.

4. Характеристики нелинейных волн. Если двигаться вдоль резонансной кривой 1 (фиг. 2), начиная с малых значений ζ , то сначала профиль волны будет близким к синусоидальному, а с увеличением ζ все сильнее будут сказываться нелинейные эффекты, приводящие к искажению волнового профиля. На фиг. 3 показаны экспериментальные волновые профили для второй и третьей мод (А соответствует $\Omega/2\pi = 3,407$ Гц, Б — $\Omega/2\pi = 3,194$, В — $\Omega/2\pi = 4,168$ Гц, Г — $\Omega/2\pi = 3,862$ Гц), возбуждаемых на поверхности жидкости глубины $h = 15$ см при амплитуде колебаний сосуда $s = 0,25$ см. Точки на фиг. 3 — волновые профили, рассчитанные по формулам (2.2). Видно, что формулы (2.2) неплохо описывают форму возбуждаемых волн в случае слабой нелинейности (случаи А и Б). При сильной нелинейности (кривые В и Г) на основании теоретических результатов можно судить лишь о максимальной y_1 и минимальной y_2 ординатах волновой поверхности.

Асимметрия волнового профиля оценивалась как отношение минимальной ординаты y_2 (низшая точка долины волны) к максимальной ординате y_1 (гребень волны) в зависимости от безразмерной амплитуды волны ζ/λ (значения y_1 и y_2 берутся в моменты максимального развития волны). Отметим, что в случае чисто синусоидальных волн независимо от значения ζ отношение $y_2/y_1 = 1$.

Экспериментальные зависимости коэффициента асимметрии профиля от крутизны волны второй и третьей мод ($h = 15$ см, $s = 0,25$ см) колебаний приведены на фиг. 4. Эксперименты показали, что даже при $\zeta/\lambda = 0,04$ коэффициент асимметрии $y_2/y_1 \approx 0,8$, а при увеличении амплитуды волны асимметрия возрастает: при $\zeta/\lambda \approx 0,16-0,20$ $y_2/y_1 \approx 0,4-0,5$.

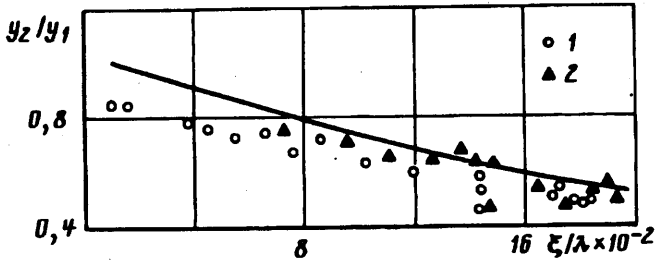
Значения y_1 и y_2 можно вычислить по формулам (2.2), при этом значение фазы соответствует моментам наибольшего развития волны.



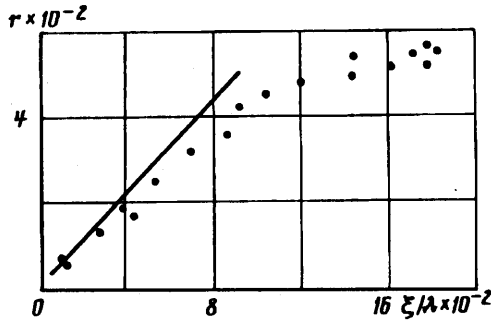
Фиг. 3

Для сравнения с данными опыта на фиг. 4 представлены рассчитанные по (2.2) зависимости коэффициента асимметрии волны от ее крутизны.

Нелинейные эффекты проявляются и в колебаниях узлов стоячей волны. Узла как неподвижной точки волновой поверхности не существует. Узел в этом случае можно определить как точку свободной поверхности, имеющую нулевое смещение относительно невозмущенного начального уровня жидкости.



Фиг. 4



Фиг. 5

Экспериментальная зависимость безразмерной амплитуды r колебаний узлов от безразмерной амплитуды ζ/λ для второй моды ($h = 15$ см, $s = 0,25$ см) показана на фиг. 5. Видно, что амплитуда этих колебаний увеличивается с ростом амплитуды волны. Величина r линейно растет с увеличением крутизны при $\zeta/\lambda < 0,12$, затем рост замедляется. При $\zeta/\lambda > 0,12$ наблюдается процесс обрушения волн с отрывом жидкости с гребня волны. Линейная часть экспериментальной зависимости $r = r(\zeta/\lambda)$ соответствует только асимметрии волн; второй участок — развитию в гребне волны неустойчивости Рэлея — Тейлора.

Исключая a из (2.2), получим уравнение волнового профиля в переменных Эйлера $y = y(t, x, \zeta)$. Положение узлов в момент времени t удовлетворяет уравнению $y(t, x, \zeta) = 0$.

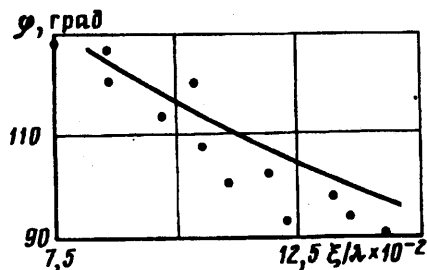
Отсюда следует, что обезразмеренная на ζ амплитуда колебаний узлов в первом приближении описывается формулой

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{ch } \kappa h}{\text{sh } \kappa h} - \frac{\text{sh } 2\kappa h}{4 \text{sh}^2 \kappa h} + \frac{3 \text{sh } \kappa h}{16 \text{sh}^4 \kappa h} - \frac{1}{4 \text{sh } 2\kappa h} \right) \frac{\zeta}{\lambda} \quad (4.1)$$

Рассчитанная по (4.1) зависимость r от ζ/λ приведена на фиг. 5. Видно, что теория неплохо описывает данные эксперимента до $\zeta/\lambda \approx 0,12-0,14$.

При некоторой амплитуде ζ стоячие волны принимают предельную форму, выше которой начинается процесс обрушения волн. Техника кинорегистрации волновых движений жидкости позволила выявить предельный профиль стоячих волн и на основании этого оценить значение безразмерной амплитуды ζ/λ , выше которой развивалась тейлоровская неустойчивость и происходило обрушение волн. Этот предельный профиль имеет угловую точку гребня, в которой сходятся под углом $\varphi = 90^\circ$ проведенные в точках перегиба касательные (симметрично относительно вертикали).

На фиг. 6 построена зависимость угла φ от безразмерной амплитуды ζ/λ : видно, что с увеличением крутизны волны угол уменьшается. Из экспериментов следует, что при $\zeta/\lambda \approx 0,14$ наблюдается обрушение волн; этому значению



Фиг. 6

соответствует угол $\varphi = 90^\circ$, т. е. для предельного профиля угол между касательными к угловой точке равен 90° .

Используя (2.2), можно рассчитать тангенс угла наклона касательной, проведенной к точке перегиба гребня волны в произвольный момент времени, по которому оценить значение угла φ . Кривая на фиг. 6 соответствует результатам расчета.

Из работ [10, 11] следует, что предельный угол равен 90° при высоте гребня $y/\lambda = 0,15$. При больших амплитудах вследствие сильной нелинейности происходит обрушение волн, вызванное тем, что направленное вниз ускорение частиц жидкости на гребне волны становится порядка ускорения силы тяжести — происходит развитие тейлоровской неустойчивости.

Для второй моды колебаний жидкости ниже приведены значения безразмерной амплитуды ζ/λ волны, угла φ и безразмерной на ускорение силы тяжести амплитуды ускорения g^* частиц свободной поверхности жидкости на гребне волны (рассчитанной на основании формул (2.2)) при различных частотах колебаний сосуда Ω :

$\Omega/2\pi$, Гц	3,470	3,406	3,390	3,359	3,326	3,295	3,231
ζ/λ , 10^{-2}	7,6	8,6	9,8	10,8	11,5	12,2	14,8
φ , град	129	123	117	113	110	106	95
g^*	0,73	0,83	0,99	1,09	1,12	1,56	1,65

В заключение отметим, что именно разрушением волн (развитая неустойчивость Рэлея — Тейлора, сильная нелинейность) определяется срыв колебаний (см. фиг. 2, кривая 1); теория не дает значение срыва даже при учете вязкости жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17594).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сорокин В. И. Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости//Акуст. журн. 1957. Т. 3. № 3. С. 262—273.
2. Skalak R., Yarymovych M. I. Forced large amplitude surface waves//Proc. 4 US Nat. Congr. Appl. Mech. Berkeley, Calif., 1962. V. 2. Oxford etc.: Pergamon Press, 1962. С. 1411—1418.
3. Dodge F. T., Kana D. D., Abramson H. N. Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers//AIAA Journal. 1965. V. 3. № 4. P. 685—695.
4. Ciliberto S., Gollub J. P. Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves//J. Fluid Mech. 1985. V. 158. С. 381—398.
5. Калинин В. А., Нестеров С. В., Секерж-Зенькович С. Я., Чайковский А. А. Экспериментальное исследование параметрического возбуждения поверхностных волн: Препринт № 243. М.: ИПМ АН СССР, 1985. 56 с.

6. *Нестеров С. В.* Исследования по нелинейной теории гравитационных волн: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1973. 21 с.
7. *Кравцов А. В., Секерж-Зенькович С. Я.* Параметрическое возбуждение колебаний вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 4. С. 611—619.
8. *Tadjbakhsh I., Keller J. B.* Standing surface waves of finite amplitude//J. Fluid Mech. 1960. V. 8. № 3. P. 442—451.
9. *Fultz D.* An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves//J. Fluid Mech. 1962. V. 13. № 2. P. 193—212.
10. *Taylor G. I.* The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their planes. 1//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1950. V. A201. № 1065. P. 192—196.
11. *Penny W. G., Price A. T.* Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. 2//Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1952. V. A244. P. 254—284.

Москва

Поступила в редакцию
26.X.1993