

УДК 532.584

© 1995 г. Ю. А. БУЕВИЧ, А. В. МАКАРОВ

ВЗВЕШИВАНИЕ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ПРОСТОГО СДВИГА

Предложена гидродинамическая модель, описывающая распределение частиц по поперечному сечению мелкодисперсного потока. Модель построена на основе представлений о диффузии частиц, вызываемой их случайными смещениями при относительном движении соседних слоев, при постоянной скорости сдвига. Показано, что взвешивающая способность потока для малых размеров частиц велика за счет тепловых флуктуаций, а при относительно больших размерах частиц — за счет пульсаций частиц, вызываемых сдвигом. Существуют критические размеры частиц, когда частицы взвешиваются и переносятся потоком хуже, чем частицы больших и меньших размеров.

Распределение частиц по поперечному сечению мелкодисперсных потоков играет фундаментальную роль в гидротранспорте, движении взвешенных наносов, а также в многочисленных процессах микрофильтрации [1], в том числе в перекрестных потоках у пористых стенок [2], сепарации коллоидных частиц и макромолекул в потоках («field-flow fractionation» [3]). Более того, стратификация таких потоков с появлением неоднородных распределений частиц разного размера по сечению канала представляет собой главную физическую причину большинства указанных процессов.

Теоретическое исследование стратификации затруднено тем, что известные гидродинамические модели дисперсных систем не позволяют, как правило, описать даже простейшие стационарные потоки. Если частицы тяжелее несущей жидкости, то стационарному состоянию отвечает наличие неподвижного или движущегося плотноупакованного осадка в нижней и свободно текущей жидкости, не содержащей частиц, в верхней части потока [4].

Такая картина в корне противоречит наблюдаемым фактам, согласно которым в потоке устанавливается убывающее по высоте распределение частиц, свойство которого зависит как от размера частиц и плотности частиц и жидкости, так и от различных режимных параметров (перепада давления, скорости сдвига и т. п.). Для объяснения указанного противоречия («flux-paradox for colloidal suspensions», по терминологии [5]) предложено несколько моделей, согласно которым взвешивание объясняется обратной броуновской диффузией частиц [2, 6, 7], поперечной миграцией частиц под действием нелинейных инерционных подъемных сил [1, 5, 8], а также при помощи представлений о достижении динамического равновесия процессов оседания и отрыва частиц от поверхности слоя осадка при определенном сдвиговом напряжении и о течении этого слоя как ньютоновской жидкости [2, 7, 9—11].

Все эти попытки в целом не были успешными: броуновская диффузия слишком слаба для не очень мелких частиц, а инерционные силы слишком слабы для не очень крупных частиц, чтобы адекватно описать экспериментальные факты. Представление о движении частиц преимущественно в осадочном слое позволяет при удачном подборе подгоночных параметров описать зависимость расхода частиц от перепада давления в канале, но ничего не дает в плане объяснения реально наблюдаемого взвешивания частиц.

Наконец, в [12, 13] была сделана более успешная попытка описать появление стационарных не тривиальных распределений частиц в сдвиговом потоке в поле

тяжести на основе представления о диффузии частиц, вызываемой их случайными смещениями при относительном движении соседних слоев частиц в плоскостях, нормальных направлению сдвига. Такие смещения экспериментально исследованы в [14, 15], а модель обусловленной ими самодиффузии частиц предложена в [16]. С чисто физической точки зрения модель [12, 13], связывающая взвешивание с наличием обусловленных сдвигом пульсаций частиц, выглядит правильной. Однако математическое оформление этой модели представляется совершенно неверным. Причины этого указаны ниже в заключительной части работы.

1. Основные уравнения. Наличие в потоке случайных пульсаций взвешенных частиц приводит к появлению термодинамических сил, действующих как на частицы, так и на жидкость и стремящихся выровнять распределение частиц в потоке. Если столкновения частиц практически отсутствуют, как это несомненно имеет место в течениях коллоидов и тонкодисперсных суспензий, то указанные силы представляют собой часть полной силы межфазового взаимодействия [17]. Альтернативно они могут быть описаны как новые нормальные напряжения, обусловленные пульсациями [4]. В результате уравнения движения фаз представляются в форме (в предположении о несжимаемости материалов фаз)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla(\varepsilon v) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla(\phi w) = 0, \quad \phi = 1 - \varepsilon \quad (1.1)$$

$$\varepsilon \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \nabla \right) v = -\nabla p + \nabla(\eta E_v) + \nabla \Pi - f - \varepsilon \rho_0 \nabla \Phi \quad (1.2)$$

$$\phi \rho_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + w \nabla \right) w = -\nabla \Pi + f - \phi \rho_1 \nabla \Phi$$

Здесь v и w — средние скорости жидкости и частиц соответственно, E_v — тензор скоростей деформаций для потока жидкости, η — вязкость суспензии, ϕ — объемная концентрация частиц, Φ — потенциал внешних массовых сил, ρ_0 и ρ_1 — плотность жидкости и материала частиц, f — сила межфазового взаимодействия (без учета термодинамической составляющей) на единицу объема дисперсии, Π — тензор нормальных напряжений, обусловленных пульсациями.

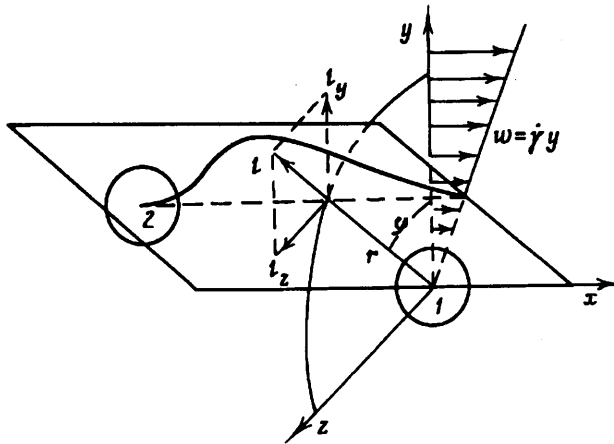
Если считать, что тепловые и чисто гидродинамические случайные пульсации частиц статистически независимы, что по очевидным причинам представляется достаточно разумной гипотезой, то [4]

$$\Pi = \{\Pi_{ij}\}, \quad \Pi_{ij} = \rho \phi L(\phi) \left[\langle w'_i w'_j \rangle + \frac{kT}{m} \delta_{ij} \right] \quad (1.3)$$

$$L(\phi) = 2 \frac{\ln(1-\phi)}{\phi} + 3 \frac{1-2\phi}{1-\phi} + \frac{\phi}{2} \frac{15-8\phi-\phi^2}{(1-\phi)^2}$$

Здесь kT/m — средний квадрат скорости тепловых пульсаций частиц (kT — температура в энергетических единицах, m — масса частицы), $\langle w'_i w'_j \rangle$ — усредненные произведения компонент пульсационной скорости частицы w' , обусловленной только гидродинамическими причинами. Функция $L(\phi)$ отличается от аналогичной функции, входящей в уравнение состояния частиц (выражение для их осмотического давления), ввиду того, что рассматриваемые частицы не взаимодействуют путем непосредственных столкновений и аналогичны молекулам растворенного вещества, а не молекулам газа твердых частиц. Эта функция вычислена в [4] на основе приближенной статистической теории системы одинаковых жестких сфер [18], в пределе разбавленной дисперсии она переходит в вычисленную ранее в [17].

В общем случае в потоках могут быть существенны гидродинамические пульсации, порождаемые двумя основными механизмами. Это, во-первых, механизм, связанный с тем, что частицы одного слоя, нормального к направлению сдвига, движутся относительно частиц другого соседнего слоя со скоростью порядка $\dot{\gamma} l$



Фиг. 1

($\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, l — расстояние между центральными плоскостями слоев). Ясно, что в результате они должны испытывать смещения как в плоскости сдвига, так и направлении, нормальном к ней [14—16]. При хаотическом распределении частиц в слоях взаимодействие между ними тоже оказывается в достаточной мере хаотическим, т. е. такие смещения могут восприниматься как случайные. Их размерный масштаб равен $\dot{\gamma}a$, где a — радиус частицы.

Во-вторых, хаотические пульсации возникают за счет работы относительного потока несущей жидкости на случайных флуктуациях концентрации суспензии по механизму, описанному в [19, 20]. Масштаб этих псевдотурбулентных пульсаций определяется относительной скоростью u скольжения фаз.

В ряде ситуаций оказываются существенными лишь гидродинамические пульсации какого-либо одного из этих типов. Так, в однородных вертикальных потоках важны лишь псевдотурбулентные пульсации [20]. Напротив, в горизонтальных течениях мелкодисперсных систем скорость скольжения может быть вызвана только действием составляющей Факсена силы межфазового взаимодействия. Нетрудно показать, что при обычно реализуемых на практике условиях она весьма мала по сравнению с $\dot{\gamma}a$, т. е. вкладом псевдотурбулентных пульсаций в нормальные напряжения можно пренебречь по сравнению с аналогичным вкладом пульсаций, порождаемых сдвигом. Ниже рассматриваются в качестве примера именно такие течения.

2. Модель пульсаций, порождаемых сдвигом. Поскольку характерный масштаб случайных скоростей частиц, возникающих при относительном движении частиц в потоках продольного сдвига, равен $\dot{\gamma}a$ [14—16], следует ожидать, что величины $\langle w_i' w_j' \rangle$, фигурирующие в (1.3), в общем случае должны быть квадратичны по скоростям сдвига $\partial w_i / \partial x_j$, где под w_i понимается i -я компонента средней скорости диспергированной фазы. Далее, указанные величины не должны зависеть от локального вращения суспензии как целого. Это означает, что симметричный тензор $\langle w_i' w_j' \rangle$ может зависеть лишь от симметричного же тензора E_w скоростей деформаций, построенного по полю w . Учитывая обычные соображения тензорной ковариантности, традиционно используемые в рациональной механике, видим, что наиболее общая связь между указанными тензорами может быть в рассматриваемом случае квадратичной зависимостью от скоростей сдвига и представлена в форме

$$\langle w_i' w_j' \rangle = A E_{w, ik} E_{w, kj} - B I_2(E_w) \delta_{ij} \quad (2.1)$$

где $I_2(E_w)$ — второй инвариант тензора E_w , δ_{ij} — символ Кронеккера, A и B — некие, не зависящие от скоростей сдвига коэффициенты.

Для того чтобы получить представление о характере зависимости A и B от концентрации и о связи между ними, рассмотрим суспензию в течении простого сдвига в плоскости x, y , изображенную на фиг. 1. Начало координат выбрано в центре сферической частицы 1 нижележащего слоя, частица 2 вышележащего слоя движется со средней скоростью $\dot{\gamma} r \cos \varphi$ в направлении оси x в плоскости, повернутой на угол φ относительно скорости сдвига, с которой она имеет общую ось x ; r — прицельное расстояние. При движении относительно частицы 1 траектория частицы 2 (сплошная кривая) отклоняется от прямолинейной (штриховая кривая). Максимальное смещение l пропорционально a с коэффициентом, зависящим, очевидно, только от безразмерного прицельного расстояния r/a . Определенной мерой суммы смещений частицы 1 за единицу времени в результате взаимодействия со всеми частицами, отстоящими от нее не далее чем на расстояние L , в направлениях y и z могут служить интегралы

$$\left\{ \begin{matrix} \langle l_y \rangle \\ \langle l_z \rangle \end{matrix} \right\} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^L r dr n \dot{\gamma} \cos \varphi \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{\pi/4}{1/2} \right\} \left(\int_0^{L/a} \frac{l(\xi)}{a} \xi^2 d\xi \right) n a^4 \sim \dot{\gamma} a \quad (2.2)$$

где n — числовая концентрация частиц. Второе равенство соответствует допущению о независимости n и $\dot{\gamma}$ от координат, а интеграл в круглых скобках может рассматриваться как коэффициент, который не зависит от $\dot{\gamma}$ и a , но может слабо зависеть от φ .

Из (2.2) становится ясно, что средние квадраты компонент пульсационной скорости частиц пропорциональны $\dot{\gamma}^2 a^2$. Используя (2.1), для потока простого сдвига, изображенного на фиг. 1, имеем

$$\langle w_x'^2 \rangle = \langle w_y'^2 \rangle = \frac{\dot{\gamma}^2}{4} (A + B), \quad \langle w_z'^2 \rangle = \frac{\dot{\gamma}^2}{4} B \quad (2.3)$$

С другой стороны, из (2.2) следует, что

$$\frac{\langle w_y'^2 \rangle}{\langle w_x'^2 \rangle} = \left(\frac{\pi/4}{1/2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \quad (2.4)$$

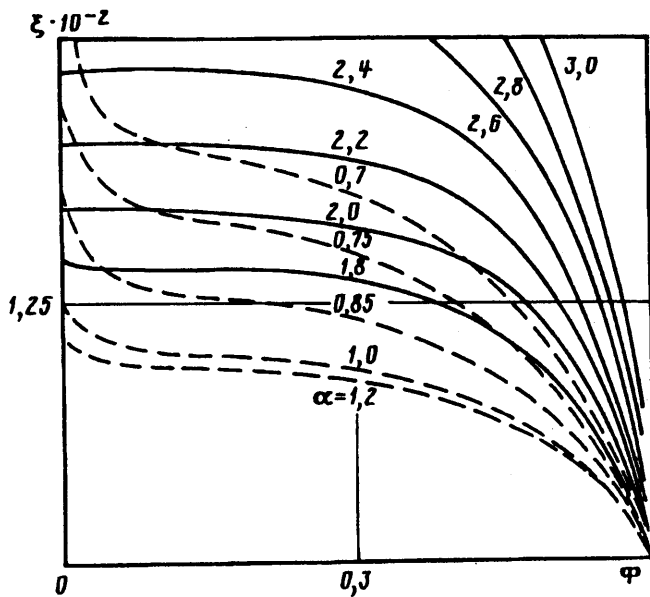
Сравнивая (2.3) и (2.4) и учитывая пропорциональность $\langle w_j'^2 \rangle$ величине $\dot{\gamma}^2 a^2$, переписываем (2.1) в форме

$$\langle w_i' w_j' \rangle = C \dot{\gamma}^2 \left[\left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) E_{w, ik} E_{w, kj} - I_2(E_w) \delta_{ij} \right] \quad (2.5)$$

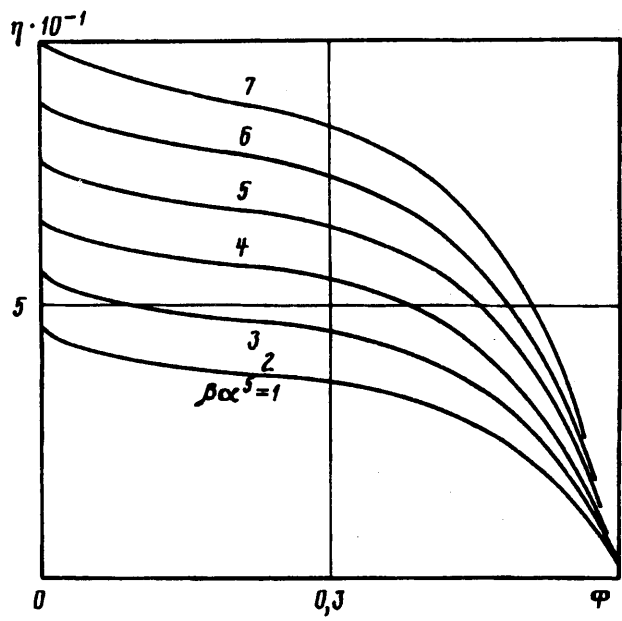
Коэффициент C может, вообще говоря, зависеть от φ , поскольку на гидродинамическое взаимодействие любой пары частиц должны в определенной степени влиять все другие частицы. Однако нет оснований считать, что эта зависимость сильная. В любом случае для определения величины C нужна, конечно, более изощренная теория, чем простые модельные соображения, предложенные выше.

Если суспензия макроскопически неоднородна или неоднородны поля скоростей сдвига, но линейный масштаб такой неоднородности $L \gg a$, то приведенные результаты можно рассматривать как нулевое приближение по малому отношению a/L . Действительно, n и $\dot{\gamma}$ в первом интеграле в (2.2) могут быть разложены тогда в ряд по степеням a/L и видно, что главный член возник: юще $\dot{\gamma}$ поправки по порядку величины не превышает a/L .

3. Распределение частиц в горизонтальном слое постоянного сдвига. Для получения выводов принципиального характера рассмотрим простейшую задачу о горизонтальном течении простого сдвига в предположении $\dot{\gamma} = \text{const}$. Реально такое предположение может выполняться, конечно, только в весьма тонких слоях. Но этот факт не препятствует анализу задачи в качестве модельной и вполне достаточной для выяснения вопроса о физических механизмах взвешивания.



Фиг. 2



Фиг. 3

Нормальное напряжение в рассматриваемом течении на основании (1.3) и (2.5) можно представить в форме

$$\Pi_{\eta\eta} = \rho_1 \phi L(\phi) \langle w_{\eta}^2 \rangle = \rho_1 \phi L(\phi) \left[\frac{kT}{m} + C \phi^2 \gamma^2 a^2 \right] \quad (3.1)$$

Тогда уравнение (2.1) сохранения момента диспергированной фазы в вертикальном направлении приводится к виду

$$\frac{d}{dy} \left\{ \phi L(\phi) \left[1 + C \frac{(\gamma a)^2 m}{kT} \phi^2 \right] \right\} = -\varepsilon \phi \frac{\sigma g m}{kT}, \quad \sigma = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \quad (3.2)$$

Если ввести безразмерные броуновский и гидродинамический параметры

$$L_B = \left(\frac{3kT}{4\pi\rho_1g} \right)^{1/4}, \quad L_H = \frac{g}{\gamma} \quad (3.3)$$

то уравнение (3.2) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dy} \left\{ \phi L(\phi) \left[1 + \frac{L_B}{L_H} \left(\frac{a}{L_B} \right)^3 \phi^2 \right] \right\} = -\sigma\epsilon\phi \frac{1}{L_B} \left(\frac{a}{L_B} \right)^3 \quad (3.4)$$

Если еще ввести безразмерные координату, радиус частиц и параметр

$$\xi = \frac{y}{L_B}, \quad \alpha = \frac{a}{L_B}, \quad \beta = \frac{CL_B}{L_H} \quad (3.5)$$

то получим простую задачу

$$\frac{d}{d\xi} [\phi L(\phi) (1 + \beta\alpha^3\phi^2)] = \sigma\epsilon\phi\alpha^3, \quad \phi(0) = \phi_* \quad (3.6)$$

где ϕ_* — критическая концентрация, соответствующая состоянию плотной упаковки. Задание граничного условия в форме, принятой в (3.6), отвечает рассмотрению распределения частиц непосредственно над образующимся осадком.

Решение задачи (3.6) при фиксированном β и разных α проиллюстрировано на фиг. 2 при $\sigma = 0,5$ ($\kappa = 2$), $\beta = 2$, что в пределе разбавленной суспензии имеет аналог барометрической формулы

$$\phi(\xi) \sim \exp(-\sigma\alpha^3\xi), \quad \phi \ll (\beta\alpha^3)^{-1/2} \quad (3.7)$$

В этом случае роль тепловых флуктуаций оказывается доминирующей. С увеличением размера частиц характерная скорость этих флуктуаций, а с ней и обусловленная ими часть нормального напряжения (3.1) очень быстро убывает.

Напротив, при не малых $\beta\alpha^3$ и ϕ основную роль играют пульсации чисто гидродинамического происхождения, причем взвешивающая способность течения усиливается с ростом размера частиц. Распределения частиц по высоте сильно отличается от барометрического.

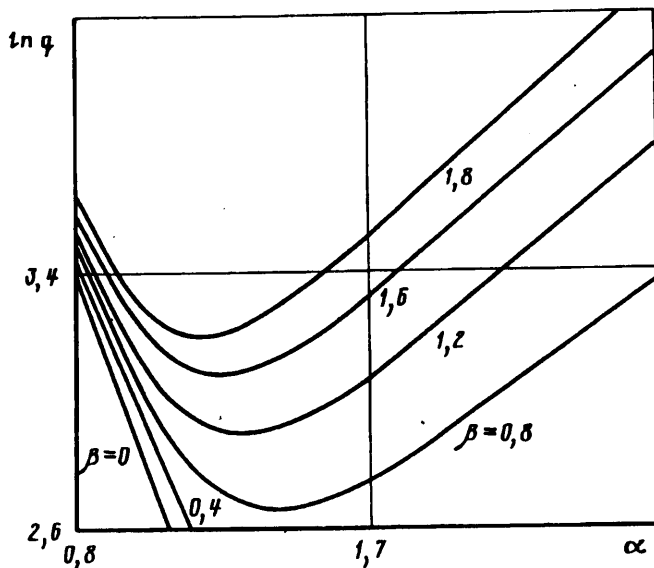
Противоречивый характер влияния размера частиц на тепловые и гидродинамические пульсации обуславливает своеобразную форму распределений на фиг. 2. При относительно небольших значениях α (отмеченных цифрами у кривых фиг. 2) увеличение этого параметра приводит к дополнительному оседанию частиц и к тому, что распределение частиц по высоте становится более крутым (штриховые кривые на фиг. 2). Очевидно, с дальнейшим увеличением $\beta\alpha^3$ (т. е., например, с ростом размера частиц при фиксированном β) распределения, изображенные на фиг. 2 сплошными кривыми, становятся все более пологими везде, где исключены области очень малых ϕ . Общее количество взвешенного материала при этом, конечно, увеличивается.

Удобно ввести также новую безразмерную координату η , такую, что задача (3.6) представится в форме

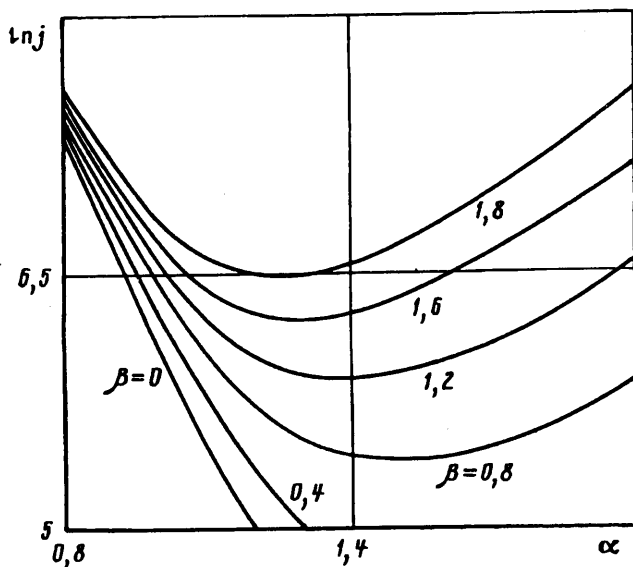
$$\frac{d}{d\eta} [\phi L(\phi) (1 + \beta\alpha^3\phi^2)] = -\epsilon\phi, \quad \phi(0) = \phi_* \quad (3.8)$$

$$\eta = \sigma\alpha^3\xi = \sigma\alpha^3y/L_B$$

Зависимость $\phi(\eta)$ не столь показательна, как $\phi(\xi)$, поскольку координата η зависит от безразмерного радиуса частиц α . Эти зависимости изображены на фиг. 3 при разных значениях $\beta\alpha^3$, отмеченных цифрами у кривых. Однако кривые фиг. 3 полезны в том отношении, что позволяют оценить полный объем Q взвешенных частиц на единицу площади осадка, а также объемный расход



Фиг. 4



Фиг. 5

частиц J , переносимый потоком во всем пространстве над осадком, как функцию от α .

Безразмерные меры первой и второй величин суть

$$q = \frac{\sigma Q}{L_B} = \frac{1}{\alpha^3} \int_0^{\infty} \phi(\eta; \beta \alpha^5) d\eta \quad (3.9)$$

$$j = \frac{\sigma^2 J}{L_B^2} = \frac{1}{\alpha^6} \int_0^{\infty} \phi(\eta; \beta \alpha^5) \eta d\eta \quad (3.10)$$

Зависимость этих величин от α при разных β (цифры у кривых) приведены

на фиг. 4 и 5 соответственно. Эти величины характеризуются минимумами, монотонно двигающимися в направлении меньших α при увеличении параметра β , характеризующего относительную роль пульсаций частиц чисто гидродинамического происхождения. При $\beta = 0$ этот минимум исчезает и q и j ведут себя соответственно как α^{-3} и α^{-6} .

Наличие таких минимумов означает, что существуют критические размеры частиц, когда частицы взвешиваются и переносятся потоком хуже, чем частицы больших или меньших размеров. Фактически это просто означает, что для таких критических частиц броуновские термические пульсации уже весьма слабы, в то время как пульсации, порожденные сдвигом, еще недостаточно интенсивны для эффективного взвешивания. Взвешивание и перенос очень мелких частиц, для которых пульсации последнего типа вообще не характерны, монотонно и довольно резко убывают с ростом размера. Заметим, что учет сдвиговых пульсаций и обусловленных ими минимумов взвешивающей и транспортирующей способности сдвиговых потоков, достигаемых для частиц определенных размеров, сразу же позволяет объяснить ряд парадоксов, наблюдавшихся в практике микрофльтрации и фракционирования в поле течения [1—3]. Это можно рассматривать и как качественное подтверждение развитых выше физических соображений о механизмах взвешивания.

4. Диффузионное приближение. Для сопоставления предлагаемой теории с моделью, развитой ранее в [12, 13], поучительно придать уравнениям сохранения вертикальной компоненты импульса частиц несколько иную форму. Умножив исходную вертикальную компоненту последнего уравнения в (1.2) с учетом (3.1) на объем частиц и поделив результат на подвижность $b\eta\eta_0 a$ частицы в стесненных условиях, вместо (3.2) получаем

$$\frac{d}{dy} \left\{ \phi L(\phi) \left[\frac{kT}{6\pi\eta_0 a} + C \frac{(\dot{\gamma}a)^2 m}{6\pi\eta a} \phi^2 \right] \right\} = \{D_B + D_H\} \frac{d\phi}{dy} = -\varepsilon\phi \frac{\sigma m}{6\pi\eta a} \quad (4.1)$$

Здесь введены коэффициенты

$$D_B = \frac{D_B^\circ}{K(\phi)} \frac{d}{d\phi} [\phi L(\phi)] = D_B^\circ \frac{\phi}{K(\phi)} \frac{d}{d\phi} F(\phi), \quad D_B^\circ = \frac{kT}{6\pi\eta_0 a} \quad (4.2)$$

$$D_H = \frac{D_H^\circ}{K(\phi)} \frac{d}{d\phi} [\phi^3 L(\phi)], \quad D_H^\circ = C \frac{(\dot{\gamma}a)^2 m}{6\pi\eta_0 a} = C\kappa (\dot{\gamma}a)^2 \tau$$

где $K(\phi)$ снова представляет собой относительную вязкость суспензии без учета пульсаций.

Величина D_B° суть эйнштейновский коэффициент броуновской диффузии одиночной частицы в неограниченной жидкости и D_B следует рассматривать как эффективный коэффициент взаимной броуновской диффузии частиц концентрированной системы в направлении, обратном градиенту концентрации. Этот коэффициент отличен, разумеется, от соответствующего коэффициента броуновской самодиффузии, который в рамках аналогичной модели равен $D_B^\circ/K(\phi)$ при относительно малых временах диффузии [21]. Отметим, что определение D_B в (4.2) отличается от такового в [22] множителем $K(\phi)^{-1}$.

Совершенно аналогично коэффициент D_H должен быть отождествлен с эффективным коэффициентом взаимной диффузии, обусловленным гидродинамическими пульсациями частиц, порождаемыми сдвигом, причем D_H° нужно понимать как необходимый размерный масштаб этого коэффициента.

Тогда левая часть уравнения (4.1) должна быть интерпретирована как взятый с обратным знаком полный броуновский поток частиц в поле градиента их концентрации, а правая — как конвективный поток частиц, каким бы он был, если бы на частицы суспензии в стационарных условиях действовала бы сила тяжести за вычетом силы плавучести, а диффузия частиц вообще отсутствовала.

Само же уравнение утверждает равенство нулю полного потока частиц в стационарных условиях, т. е. может рассматриваться в качестве уравнения баланса массы.

Диффузионное уравнение в контексте рассматриваемых задач постулировалось ранее в [12, 13] как некое совершенно независимое от сохранения импульса уравнение. Такой подход порочен по крайней мере в двух принципиальных отношениях. Во-первых, в двухфазной системе в рассматриваемых условиях распределение частиц по высоте должно определяться требованиями сохранения импульса, а не сохранения массы. В частности, уравнение сохранения массы (1.1) обеих фаз вырождается в данном случае в нулевое тождество. Ни направленный вниз конвективный поток, ни направленный вверх диффузионный поток в действительности не существуют. Если бы это было не так, то одновременное введение среднеобъемной (или среднемассовой) скорости частиц и независимого диффузионного потока в уравнение сохранения массы было бы принципиально ошибочным, так как указанная скорость описывает все составляющие потока независимо от их физических причин. Это убедительно показано в [23] и признано также в [22].

Введение независимого уравнения диффузии могло бы быть уместным в случае, если бы суспензия рассматривалась как однофазная среда, а частицы рассматривались как одна из компонент этой среды. Но и в таком случае в уравнении должен был бы фигурировать коэффициент взаимной (градиентной) диффузии, а не коэффициент самодиффузии частиц, фактически используемый в [12, 13]. Это различие оказывается весьма существенным. Действительно, размерный масштаб коэффициента самодиффузии равен $\dot{\gamma}a^2$, что следует и из простейших соображений теории размерностей, в то время как масштаб коэффициента взаимной диффузии равен, согласно (4.2), величине $(\dot{\gamma}a)^2\tau$. Аналогичное по смыслу различие в размерных коэффициентах взаимной диффузии и самодиффузии частиц имеет место и в вертикальных потоках суспензий [20].

В заключение подчеркнем, что выше была рассмотрена простейшая и несколько идеализированная задача, которая оказалась, однако, достаточной для выяснения физических механизмов поддержания частиц во взвешенном состоянии, несмотря на действие массовой силы, стремящейся осадить их. Обобщение на более сложные (и более реальные) ситуации представляется совершенно очевидным. Так, в наклонных каналах существует компонента силы тяжести, вызывающая существенное скольжение фаз суспензии. Это приводит к тому, что наряду с пульсациями, вызываемыми сдвигом, становятся важными и псевдотурбулентные пульсации, обусловленные работой несущего потока на флуктуациях концентрации. Порождаемое последними пульсациями нормальное напряжение легко ввести в уравнение сохранения импульса частиц при помощи результатов [20].

В напорных течениях в каналах скорость сдвига, конечно, не однородна. Поэтому $\dot{\gamma}$ в уравнениях типа (3.2), (3.6) или (3.8) представляет собой функцию поперечной координаты. Эта функция должна определяться из решения полной задачи о движении суспензии на основании уравнений (1.2) сохранения импульса обеих фаз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Madsen R. F.* Hyperfiltration and ultrafiltration in plate-and-frame systems. Amsterdam etc.: Elsevier, 1977. 367 p.
2. *Henry J. D.* Cross flow filtration//Recent Develop. in Separation Sci. V. 2. Cleveland: CRC Press, 1972. P. 205—225.
3. *Martin M., Williams P. S.* Theoretical basis of field-flow fractionation//Theor. Adv. in Chromotography and Related Separation Techniques. Dordrecht: Kluwer, 1992. P. 513—580.
4. *Buyevich Yu. A.* Hydrodynamics of dispersions including diffusional effects//Arch. Mech. 1990. V. 42. № 4—5. P. 429—442.

5. *Green G., Belfort G.* Fouling of ultrafiltration membranes: lateral migration and particle trajectory model//*Desalination*, 1980. V. 35. № 1—3. P. 129—147.
6. *Blatt W. F., David A., Michaels A. S., Nelsen L.* Solute polarization and cake formation in membrane ultrafiltration: causes, consequences and control techniques//*Membrane Sci. and Technol.* N. Y.; L.: Plenum Press, 1970. P. 47—97.
7. *Porter M. C.* Concentration polarization with membrane ultrafiltration//*Ind. Engng. Chem. Prod. Res. Develop.* 1972. V. 11. № 3. P. 234—248.
8. *Altena F. W., Belfort G.* Lateral migration of spherical particles in porous flow channels. Application//*Chem. Engng Sci.* 1984. V. 39. № 2. P. 343—355.
9. *Schneider K., Klein W.* The concentration of suspensions by means of crossflow-microfiltration//*Desalination*, 1982. V. 41. № 3. P. 263—275.
10. *Leonard E. F., Vassilief C. S.* The deposition of rejected matter in membrane separation processes//*Chem. Engng Commun.* 1984. V. 30. P. 209—217.
11. *Birdsell S.* Mathematical model of Cross Microfiltration. M. S. Thesis, Univ. Colorado, 1985.
12. *Leighton D., Acrivos A.* Viscous resuspension//*Chem. Engng Sci.* 1986. V. 41. № 6. P. 1377—1384.
13. *Davis R. H., Leighton D. T.* Shear-induced transport of a particle layer along a porous wall//*Chem. Engng Sci.* 1987. V. 42. № 2. P. 275—281.
14. *Eckstein E. E., Bailey D. G., Shapiro A. H.* Self-diffusion of particles in shear flow of a suspension//*J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. № 1. P. 191—208.
15. *Leighton D., Acrivos A.* Measurement of shear-induced self-diffusion in concentrated suspensions of spheres//*J. Fluid Mech.* 1987. V. 117. P. 109—131.
16. *Leighton D., Acrivos A.* The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions//*J. Fluid Mech.* 1987. V. 181. P. 415—439.
17. *Batchelor G. K.* Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction//*J. Fluid Mech.* 1976. V. 74. № 1. P. 1—29.
18. *Carnahan N. F., Starling K. E.* Equation of state for non-interacting rigid spheres//*J. Chem. Phys.* 1969. V. 51. № 2. P. 635—637.
19. *Buyevich Yu. A.* Statistical hydromechanics of disperse systems. Pt 1//*J. Fluid Mech.* 1971. № 3. P. 489—507.
20. *Буевич Ю. А.* Внутренние пульсации в потоках мелкодисперсных суспензий//*Изв. РАН. МЖГ.* 1993. № 3. С. 91—100.
21. *Буевич Ю. А.* Флуктуации концентрации и самодиффузия частиц в монодисперсных системах//*Инж.-физ. журн.* 1993. Т. 65. С. 39—47.
22. *Batchelor G. K.* A new theory of the instability of a uniform fluidized bed//*J. Fluid. Mech.* 1988. V. 193. P. 75—110.
23. *Шапошников И. Г.* К вопросу об утере диффузионных явлений в уравнениях гидродинамики//*ЖЭТФ.* 1951. Т. 21. № 11. С. 1309—1310.

Уральский государственный
университет
Екатеринбург

Поступила в редакцию
22.XI.1993