

УДК 532.582.22

© 1995 г. Н. А. ВЕКЛИЧ

УДАР КРУГЛОГО ДИСКА И ШАЙБЫ ПО ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Получено решение задачи об осесимметричном движении идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрическом сосуде конечной глубины при малых колебаниях гибкого круглого диска и шайбы (диска с центральным отверстием) на поверхности жидкости. Для частного случая абсолютно твердого диска и шайбы на основе этого решения определена присоединенная масса в зависимости от размеров сосуда, диска и шайбы.

Ранее аналогичная плоская задача об ударе одной и нескольких пластин по жидкости в сосуде ограниченных размеров рассматривалась в [1, 2]. Присоединенная масса диска на жидком слое конечной глубины (предельный случай цилиндрического сосуда бесконечно большого радиуса и конечной глубины) определялась в [3—5]. Влияние стенок сосуда бесконечной глубины на присоединенную массу диска исследовалось в [6]. Экспериментальный результат для присоединенной массы шайбы дан в [7], теоретического определения этой величины для шайбы автору неизвестно.

В предлагаемой работе проводилось также экспериментальное определение присоединенных масс шайб различных размеров и сравнение с теорией. Уточнено решение для потенциала скоростей в цилиндрическом сосуде бесконечной глубины при ударе диска, приведенное в [6] и в некоторых других работах. Даны асимптотические формулы для присоединенной массы диска, почти закрывающего цилиндр, и шайбы с очень малым центральным отверстием, касающейся стенок цилиндра.

Полученные результаты можно также применять для решения некоторых задач гидроупругости [8].

1. Гибкий диск. Рассмотрим задачу об осесимметричном движении идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд радиуса d и глубины H , при колебаниях гибкого круглого диска радиуса a на ее поверхности.

Для описания движения выберем цилиндрическую систему координат с началом в центре диска, ось z направим наружу по оси сосуда. Пусть r — расстояние до оси сосуда. Жидкость занимает область $r < d$, $-H < z < 0$. Обозначим $w(r, t)$ — прогиб диска (t — время), $\varphi(r, z, t)$ — потенциал скоростей жидкости. В каждый момент времени t , входящего в задачу параметрически, потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \varphi(d, z, t)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi(r, -H, t)}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \varphi(r, 0, t)}{\partial z} = -\frac{\partial w(r, t)}{\partial t}, \quad 0 \leq r < a \quad (1.3)$$

Поверхность жидкости $z = 0$, $a \leq r < d$ вне диска свободная, на ней давление

$p = 0$. Исходя из интеграла Коши — Лагранжа в линеаризованной форме $p = -\rho \partial \varphi / \partial t$ (ρ — плотность жидкости), получаем на указанной свободной поверхности жидкости потенциал $\varphi = 0$.

Перейдем к безразмерным величинам $h = H/a$, $\gamma = a/d$, $r' = r/a$, $z' = z/a$, штрихи у r и z опускаем.

Уравнениям (1.1)—(1.2) удовлетворяет ряд

$$\varphi(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) J_0(\gamma \lambda_n r) \frac{f_n(z)}{f_n(0)} \quad (1.4)$$

$$f_n(z) = \exp(\gamma \lambda_n z) + \exp(-\gamma \lambda_n (z + 2h))$$

Здесь λ_n — неотрицательные корни уравнения $J_1(\lambda) = 0$ (включая $\lambda_0 = 0$), $J_0(x)$ и $J_1(x)$ — бесселевы функции нулевого и первого порядков.

В аналогичную формулу (1.4) [6] для потенциала φ вкралась неточность, поскольку корень $\lambda_0 = 0$ там не учтен. В результате упомянутая формула дает при $\gamma \neq 0$ на дне сосуда $z \rightarrow \infty$ потенциал $\varphi_{\infty} = 0$, что неверно. В принятых здесь обозначениях $\varphi_{\infty} = A_0$, а в условиях задачи [6] должно быть $\varphi_{\infty} = -m\omega / \lambda d^2 \rho$, m — присоединенная масса диска, ω — его скорость, т. е. имеет место аналогия с плоской задачей об ударе пластины по жидкости в сосуде конечной ширины и бесконечной глубины (или, что то же, об ударе периодической решетки пластин по жидкому полупространству). Для устранения неточности в [6] достаточно прибавить к потенциалу (1.4) постоянное слагаемое φ_{∞} .

Аналогичное замечание можно было бы высказать и в отношении некоторых других работ, в которых используется неточный результат [6] для потенциала φ .

Если обозначить сумму ряда (1.4) при $z = 0$, $r < 1$ (т. е. потенциал течения непосредственно по дискам) через $f(r, t)/r$ и учесть ортогональность функций Бесселя, то коэффициенты $A_n(t)$ выразятся известным образом [9] в виде интегралов от $f(r, t)$. В этих интегралах целесообразно вместо $f(r, t)$ перейти к другой функции $\varphi_0(r, t)$ с помощью интегральных уравнений Абеля [6, 9, 10]

$$\frac{f(r, t)}{r} = -\frac{2}{\pi} \int_r^1 \frac{\varphi_0(\xi, t)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi, \quad \varphi_0(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \int_r^1 \frac{f(\xi, t)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi \quad (1.5)$$

Далее $A_n(t)$ подставим в ряд (1.4) и удовлетворим с помощью этого ряда граничному условию (1.3). После преобразований, обычных для решения парных рядовых уравнений [6, 9, 10], суммирования рядов методом Ватсона [11] и некоторых дополнительных упрощений перейдем к основному для данной задачи интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром для функции $\varphi_0(r, t)$ на конечном отрезке $0 \leq r \leq 1$

$$\varphi_0(r, t) + \int_0^1 \varphi_0(\xi, t) G_0(\xi, r) d\xi = a^2 \int_0^1 \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \quad (1.6)$$

$$G_0(\xi, r) = G(\xi + r) - G(\xi - r)$$

$$G(x) = G_1(x) - G_2(x), \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$G_1(x) = \frac{1}{2\pi h} \operatorname{Re} \left[\psi \left(1 + \frac{ix}{4h} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{ix}{4h} \right) \right] \quad (1.7)$$

$$G_2(x) = \frac{2}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(\beta_n)}{I_1(\beta_n)} \operatorname{ch}(\gamma \beta_n x), \quad \beta_n = \frac{2n-1}{2\gamma h} \pi$$

Ядро $G_0(\xi, r)$ выражается через функцию одного аргумента $G(x)$, что удобно для численного решения уравнения.

В (1.7) входят пси-функция (логарифмическая производная гамма-функции [12]) $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, мнимая единица i и ряд, члены которого выражаются через отношения модифицированных функций Бесселя $K_1(x)$ и $I_1(x)$ первого порядка мнимого аргумента.

Выделим некоторые частные случаи, когда ядро $G(x)$, несколько упрощается. Для жидкого слоя (H — конечное, $d \rightarrow \infty$) $G(x) = G_1(x)$. Для цилиндрического сосуда бесконечной глубины ($H \rightarrow \infty$, d — конечное) $G(x) = -G_2(x)$, причем соответствующий ряд в (1.7) превращается с помощью предельного перехода в несобственный интеграл. Для полупространства ($H \rightarrow \infty$, $d \rightarrow \infty$) уравнение (1.6) упрощается наиболее сильно, становясь вместо интегрального алгебраическим, так как $G_0(\xi, r) = 0$.

После решения уравнения (1.6) относительно $\varphi_0(r, t)$ можно, например, определить давление $p = p(r, z, t)$ в жидкости непосредственно под диском при $z = 0$

$$p(r, 0, t) = \frac{2\rho}{\pi a} \int_0^1 \frac{\partial \varphi_0(\xi, t)}{\partial t} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (1.8)$$

На выражениях других характеристик течения жидкости через $\varphi_0(r, t)$ не останавливаемся.

2. Гибкая шайба. В формуле (1.5) для потенциала $f(r, t)/r$ под диском вспомогательную функцию $\varphi_0(r, t)$ можно подобрать так, чтобы поверхность жидкости в отверстии шайбы $0 \leq r \leq \delta$ ($\delta = c/a$, c — радиус отверстия) выполнялось равенство $f(r, t) = 0$. Эта поверхность жидкости станет свободной. Для этого достаточно выразить $\varphi_0(r, t)$ при $0 \leq r \leq \delta$ через эту же функцию под шайбой $\delta \leq r \leq 1$, используя формулы обращения, аналогичные (1.5), и интегральное уравнение (1.6). Вводя еще искомую функцию $\Phi(r, t)$, можно получить следующие интегральные уравнения:

$$\Phi(r, t) + \int_0^1 \Phi(\xi, t) G_3(\xi, r) d\xi = \frac{1}{\sqrt{r^2 - \delta^2}} \int_0^r \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \quad (2.1)$$

$$\delta < r \leq 1, \quad \int_0^1 \Phi(\xi, t) d\xi = 0$$

$$\Phi(r, t) = \frac{\varphi_0(r, t)}{a^2 \sqrt{r^2 - \delta^2}}, \quad \delta < r \leq 1 \quad (2.2)$$

$$G_3(\xi, r) = \frac{2}{\pi^2} \frac{g_2(r) - g_2(\xi)}{r^2 - \xi^2} - \frac{g_1(\xi)}{g_1(r)} G_0(r, \xi) + \quad (2.3)$$

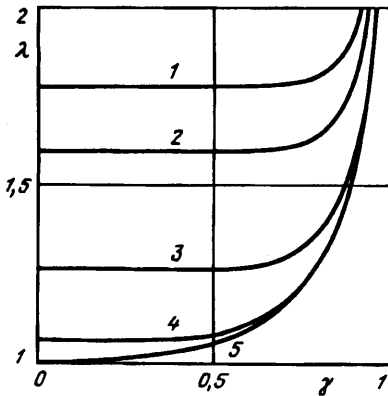
$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{u G_0(\xi, u)}{r^2 - u^2} \frac{g_1(\xi)}{g_1(u)} du + \frac{2}{\pi} \frac{g_1(\xi)}{g_1(r)} \int_0^\delta \frac{u G_0(u, r)}{\xi^2 - u^2} \frac{g_1(\xi)}{g_1(u)} du -$$

$$- \frac{4}{\pi^2} \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{uv G_0(u, v)}{(r^2 - u^2)(\xi^2 - v^2)} \frac{g_1(\xi)}{g_1(u)} \frac{g_1(\xi)}{g_1(v)} dudv$$

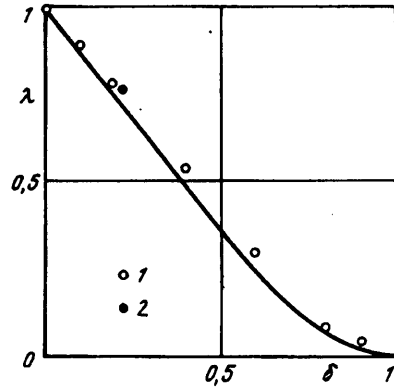
$$g_1(x) = |x^2 - \delta^2|^{1/2}, \quad g_2(x) = x \ln \frac{x + \delta}{x - \delta}$$

где $\partial w(r, t)/\partial t$ — скорость шайбы.

Ядро $G_3(\xi, r)$ непрерывно внутри квадрата $\delta < r, \xi \leq 1$ и имеет логарифмическую особенность на двух его сторонах $r = \delta$ и $\xi = \delta$, порожденную



Фиг. 1



Фиг. 2

функцией $g_2(x)$. В связи с этим решение $\Phi(r, t)$ также обладает особенностью при $r \rightarrow \delta$, но степенного вида $(r - \delta)^{-\nu}$, $\nu = 1/\pi$.

Зная аналитическую особенность функции $\Phi(r, t)$, систему уравнений (2.1) — (2.2) целесообразно решать на ЭВМ относительно другой функции $\Phi_0(r, t)$, связанной с $\Phi(r, t)$ равенством

$$\Phi(r, t) = \Phi_0(r, t) (r - \delta)^{-\nu} \quad (2.4)$$

Интегральные уравнения (2.1) — (2.2) после перехода в них к функции $\Phi_0(r, t)$ легко и с достаточной степенью точности аппроксимируются линейной алгебраической системой уравнений, которую можно решать обычным численным методом.

Для давления в жидкости под шайбой справедлива формула

$$p(r, 0, t) = 2 \frac{\rho a}{\pi} \int_{\delta}^1 \frac{\partial \Phi(\xi, t)}{\partial t} \sqrt{\frac{\xi^2 - \delta^2}{\xi^2 - r^2}} d\xi, \quad \delta \leq r \leq 1 \quad (2.5)$$

3. Присоединенная масса диска и шайбы. Применим полученные в разд. 1—2 основные уравнения для определения присоединенных масс абсолютно твердого диска и шайбы при ударе по жидкости в цилиндрическом сосуде. Ее характеризуем безразмерными коэффициентами присоединенных масс $\lambda = m/m_\infty$, где m — присоединенная масса диска (шайбы), а $m_\infty = 4/3 \rho a^3$ — присоединенная масса диска радиуса a на жидком полупространстве. Расчетные формулы для λ в случае диска и шайбы имеют соответственно вид

$$\lambda = 3 \int_0^1 \varphi_*(\xi) \xi d\xi \quad (3.1)$$

$$\varphi_*(r) + \int_0^1 \varphi_*(\xi) G_0(\xi, r) d\xi = r$$

$$\lambda = 3 \int_0^1 \Phi_*(\xi) (\xi^2 - \delta^2) d\xi \quad (3.2)$$

$$\Phi_*(r) + \int_0^1 \Phi_*(\xi) G_3(\xi, r) d\xi = 1$$

$$\int_0^1 \Phi_*(\xi) d\xi = 0, \quad \Phi_*(r) = \Phi_0(r) (r - \delta)^{-\nu}$$

Они достаточно эффективны и позволяют определять коэффициент присоединенной массы λ диска и шайбы в широком диапазоне изменения геометрических параметров γ , δ и h , характеризующих задачу. В частности, для диска на слое жидкости ($\gamma = 0$, h — конечное) уравнения (3.1) являются основой более совершенной и точной методики расчета коэффициента λ (а в сочетании с незначительно преобразованной формулой (1.8) — и импульсивного давления под диском) по сравнению с теорией, предложенной [3—5].

В расчетах интегралы, входящие в (3.1)—(3.2), заменялись интегральными суммами, для чего отрезки интегрирования $[0, 1]$ и $[\delta, 1]$ разбивались равномерно точками на N равных элементарных отрезков (обычно полагалось $N = 100$). Функции $\Phi_*(r)$ и $\Phi_0(r)$ находились в узловых точках разбиения. В промежуточных точках их значение определялось методом обычной квадратичной интерполяции. Интегральные уравнения заменялись системами алгебраических уравнений, которые решались на ЭВМ методом Гаусса с помощью стандартных программ, без применения регуляризирующих процедур.

На фиг. 1 приведены результаты расчета коэффициента λ в зависимости от γ по уравнениям (3.1) для диска на жидкости в цилиндрическом сосуде глубины $h = 0,25; 0,3; 0,5; 1; \infty$ (кривые 1—5). Нижняя кривая соответствует случаю сосуда бесконечной глубины ($h = \infty$). Как уже отмечалось, ранее она рассчитывалась [6] в диапазоне $0 \leq \gamma \leq 0,7$, когда стенки влияют на присоединенную массу сравнительно слабо. В этом диапазоне изменения γ численное решение (3.1) при $h = \infty$ вполне удовлетворительно совпадает с данными [6].

По мере уменьшения h влияние глубины сосуда на присоединенную массу диска сказывается все сильнее. Как и в плоском случае удара пластины по жидкости в сосуде ограниченных размеров [2], при малых глубинах h присоединенная масса диска сохраняет почти постоянное значение в широком диапазоне изменения γ и определяется в основном близостью дна (под γ в плоском случае следует понимать отношение ширины пластины к ширине сосуда). Влияние стенок сосуда становится заметным только когда край диска приближается к стенкам ($\gamma \rightarrow 1$). Однако это влияние менее сильное, чем в плоском случае, поскольку в осесимметричном случае течение жидкости при ударе менее стесненное.

Справедливость сказанного подтверждается и сравнением асимптотик λ при $\gamma \rightarrow 1$. Для диска ее можно получить следующим образом. Выразим коэффициенты A_n ряда (1.4) через скорость жидкости под диском, равную v_0 , и скорость $v(r)$ жидкости на свободной поверхности. Затем, применяя элементарные преобразования, перейдем в этих выражениях к расходу жидкости $Q(r)$ на свободной поверхности, который связан со скоростью $v(r)$ интегральным соотношением

$$Q(r) = 2\pi a^2 \int_1^r \xi v(\xi) d\xi, \quad 1 \leq r \leq \frac{1}{\gamma} \quad (3.3)$$

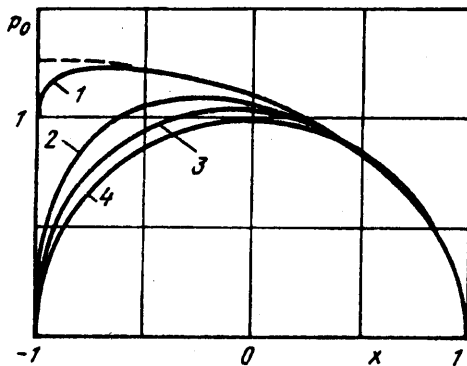
$$Q(1) = 0, \quad Q\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \pi a^2 v_0$$

Подставим коэффициенты A_n , выраженные через $Q(r)$, в ряд (1.4) и удовлетворим условию равенства нулю потенциала ϕ на свободной поверхности жидкости вне диска. Тогда в пределе при $\gamma \rightarrow 1$ получим приближенное равенство

$$\lambda = -\frac{3}{4}\pi \frac{A_0}{av_0} = -\frac{3}{4}\ln(1-\gamma) \quad (3.4)$$

Для плоской задачи асимптотика λ такая же (логарифмическая), но с несколько большим множителем перед логарифмом $8/\pi^2$ [1, 2].

В правой части равенства (3.4) стоит главный член искомой асимптотики,



Фиг. 3

дающий представление о влиянии стенок сосуда на коэффициент λ при $\gamma \rightarrow 1$ и любом постоянном h .

Влияние глубины h на присоединенную массу диска лучше всего оценивать в случае, когда стенки сосуда удалены на бесконечность ($\gamma = 0$), а глубина h мала. Численное решение уравнений (3.1) при $\gamma = 0$ и малых h показывает, что основное сопротивление удару вызвано радиальным растеканием той части жидкости, которая находится непосредственно между дном и диском (невысокий цилиндрический столб, радиус которого совпадает с радиусом диска). Скорость частиц жидкости в этом столбе направлена почти перпендикулярно оси z , практически постоянна по высоте и линейно зависит от радиуса r . Тогда, вычисляя кинетическую энергию этого столба и пренебрегая движением остальной части жидкости, легко получим асимптотику $\lambda = 3\pi/32h$, справедливую при очень малых h . Она совпадает с первым членом соответствующего ряда [4].

Более эффективная формула для вычисления присоединенной массы диска при $h \leq 0,5$ в этом случае дана в [13] на основе простой схемы движения жидкости, показанной в [14] на рис. 10.

На фиг. 2 представлены результаты вычислений по (3.2) коэффициента λ шайбы с внешним радиусом a и внутренним радиусом δa на жидком полупространстве ($G_0(\xi, r) = 0$). Точками 1 отмечены экспериментальные результаты, полученные методом резонансных колебаний [15], точка 2 — результат [7].

Как показывает фиг. 2, экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с теорией. Хотя при $\delta = 0,9$ эксперимент дает для присоединенной массы шайбы в 2 раза больше ее теоретического значения, но это обусловлено трудностью проведения эксперимента, так как абсолютное значение присоединенной массы шайбы при таких значениях δ мало. Требуется обнаружить буквально граммы (3 г) при общем весе модели более 130 г. Присоединенная масса диска радиуса $a = 5$ см, около 166 г.

При δ , близких к единице, можно приближенно определить присоединенную массу шайбы на основе известного решения плоской задачи об ударе пластины. Если предположить, что в радиальном направлении распределение импульсивных давлений на шайбе такое же, как и на пластине, то получим

$$\lambda = \frac{3\pi^2}{32} (1 + \delta) (1 - \delta)^2 \quad (3.5)$$

Сравнение расчетов по (3.5) с точным решением показывает, что они различаются довольно мало, особенно при $\delta \rightarrow 1$. Поэтому при проведении ряда расчетов можно вместо сложной процедуры численного решения уравнений (3.2) воспользоваться простым соотношением (3.5). Отметим также, что в области $\delta < 0,6$ точный график λ и экспериментальные данные на фиг. 2 вполне удов-

летворительно аппроксимируются линейной зависимостью $\lambda = 1 - 1,25\delta$ (несколько лучше, чем с помощью (3.5)).

Для того, чтобы понять, почему формула (3.5) неожиданно близко подходит к точному решению, сравним распределение импульсивных давлений в радиальном направлении на шайбе и на пластине (плоская задача). Эпюра импульсивных давлений на пластине представляет собой, как известно, полуокружность радиуса a_1 , равного половине ширины пластины.

На фиг. 3 приведены эпюры импульсивных давлений (точные решения) под шайбой $p_0 = p(x)/\rho a_1 v_0$ при $\delta = 0,01; 0,2; 0,5$ (кривые 1—3). Приведено также в виде полуокружности распределение импульсивного давления под пластиной, ширина которой $2a_1 = a(1 - \delta)$ (кривая 4). Для удобства сопоставления система безразмерных координат выбрана так, что внутренний край шайбы имеет координату $x = -1$, а внешний край — $x = 1$ (при всех δ), как и у пластины, имеющей безразмерную ширину 2. Сравнение показывает, что при всех $\delta > 0,5$ эпюры давлений у шайбы мало отличаются от полуокружности. Даже у шайбы при $\delta = 0,2$ эпюра давления в точках, расположенных ближе к центру шайбы, лишь на 20% отличается от полуокружности. Если учесть, что эти «повышенные» давления действуют на сравнительно малую площадь, то их влияние на величину λ будет значительно меньше. На внешней половине шайбы давление совсем мало отличается от плоского случая.

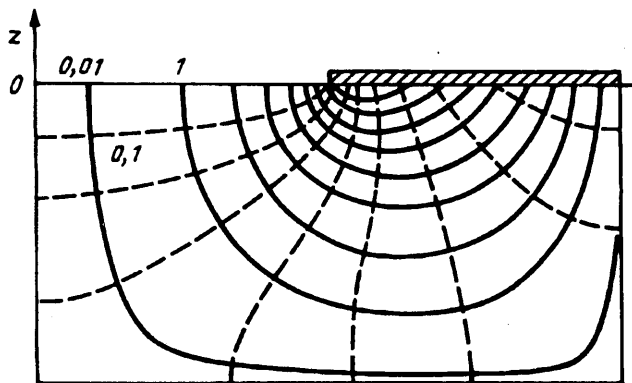
Для $\delta = 0,01$ (маленькое отверстие в центре), эпюра давления мало отличается от эпюры для диска (без отверстия), которая изображена штриховой линией (небольшой участок, в остальной же части она совпадает с эпюрой для $\delta = 0,01$). Причина в том, что в случае диска на круг радиуса $a/2$ действует значительно большее импульсивное давление, чем в плоском случае, но площадь этого круга составляет лишь $1/4$ часть всей площади круга.

В упрощенной постановке раскрытие парашюта в плоском случае моделируется расширяющейся пластиной, в осесимметричном случае — расширяющимся диском. Полученные здесь результаты позволяют усовершенствовать модель, рассматривая расширяющуюся шайбу.

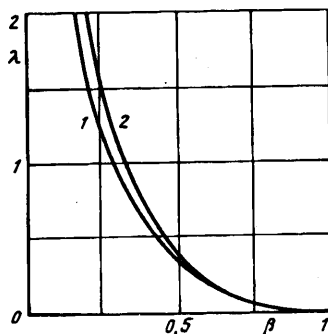
Влияние стенок сосуда на присоединенную массу шайбы определим для случая, когда шайба касается стенок сосуда ($a = d$). Формулы (3.2) для этой цели непригодны, но задача вполне разрешима, если перейти к новой искомой функции — скорости $v(r)$ жидкости на свободной поверхности в отверстии шайбы ($0 \leq r < \delta$). Для этого достаточно выразить коэффициенты A_n ($n \geq 1$) ряда (1.4) через скорость шайбы v_0 ($\delta \leq r < 1$) и скорость жидкости $v(r)$ ($0 \leq r < \delta$). Приравнявая потенциал на свободной поверхности $0 \leq r < \delta$ нулю и требуя равенства объемов жидкости, вытесненной шайбой и «выплеснувшейся» через свободную поверхность (в методе решения, описанном в разд. 1—2, это условие выполнялось автоматически), приходим к системе двух интегральных уравнений для постоянной A_0 и вспомогательной функции $\varphi_0(r)$, аналогичной (1.5), но связанной не с потенциалом, а со скоростью $v(r)$ равенством типа (1.5). Система не приводится здесь для экономии места. Она решается достаточно просто на ЭВМ сведением к алгебраической. Другие элементы течения жидкости под шайбой определяются простым суммированием ряда (1.4) и его производных.

Достаточно общую и полную картину движения жидкости дают эквипотенциальные линии (изобары импульсивного давления) и линии тока в плоскости rz как осевые сечения соответствующих поверхностей. Линии строились суммированием рядов для потенциала φ и функции тока ψ . Уравнения $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ решались на ЭВМ делением пополам отрезков на прямолинейных лучах, выходящих из точек $(\delta, 0)$ для $\psi = \text{const}$ и $(0, 0)$ а также $(1, 0)$ — для $\varphi = \text{const}$.

На фиг. 4 в качестве примера приведены для правой половины осевого сечения цилиндра результаты вычислений изобар и функций тока (штриховые и сплошные линии) с интервалом 0,1 для шайбы $\delta = 0,5$ при наиболее характерной для данного случая глубине $h = 0,5$. Там же изображена линия тока с малым



Фиг. 4



Фиг. 5

значением постоянной $\psi = 0,01$. Она представляет собой вместе с боковой поверхностью цилиндра и дном трубку тока, через которую протекает 0,01 всей жидкости, приведенной в движение. Между другими двумя соседними линиями тока протекает 0,1 всей жидкости, приведенной в движение. Концентрация линий тока наблюдается у свободной поверхности близ точки $(\delta, 0)$, что свидетельствует о возрастании скорости частиц жидкости по мере приближения к особой точке.

Группа изобар, пересекающих ось z , и изобар, заканчивающихся на боковой поверхности цилиндра, разделены изобарами, заканчивающимися на дне $z = -0,5$. При $h = \infty$ эти группы изобар разделены единственной изобарой $\varphi = 0,53343$, которая почти по прямой, параллельной оси цилиндра, уходит на бесконечность. Эта изобара определяет импульсивное давление на бесконечности.

На фиг. 5 показана зависимость коэффициента присоединенной массы шайбы λ от скважности $\beta = \delta^2$. Кривая 1 соответствует удару шайбы, скользящей вдоль стенок полубесконечного цилиндра, кривая 2 — для цилиндра конечной глубины $h = 1/4$. При больших глубинах цилиндра, как показывают вычисления, влияние дна цилиндра на присоединенную массу незначительное. Так, даже при $h = 1/2$ присоединенная масса шайбы отличается от ее значения при $h = \infty$ на 3—4% (при $\beta = 0,16$ — $0,25$, где влияние дна оказывается наиболее сильным).

При очень малой скважности шайбы ($\beta < 0,1$) коэффициент присоединенной массы шайбы λ можно вычислять с помощью асимптотической формулы $\lambda = 3\pi^2/16\sqrt{\beta}$, которая с ошибкой менее 2% аппроксимирует точное решение.

Точное решение задачи об ударе шайбы, скользящей вдоль стенок полубесконечного цилиндра с жидкостью, позволяет оценить удельную присоединенную массу бесконечной пластины (решетки), перфорированной круглыми регулярно расположенными отверстиями.

Автор выражает признательность Л. И. Седову и С. С. Григоряну за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
2. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Плоская задача об ударе пластины по жидкой полосе прямоугольного поперечного сечения//ПММ. 1988. Т. 52. № 3. С. 511—516.
3. Воронич И. И., Юдович В. И. Удар круглого диска о жидкость конечной глубины//ПММ. 1957. Т. 21. № 4. С. 525—532.
4. Чебаков М. И. Удар круглого диска о жидкость малой глубины//ПММ. 1974. Т. 38. № 4. С. 675—681.

5. Попов В. В. Некоторые задачи гидродинамики осесимметричных течений со свободными границами: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1979. 19 с.
6. Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н. Об учете влияния стенок при ударе круглого диска о жидкость//Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 1. С. 177—182.
7. Римап И. С., Крепс Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы//Тр. ЦАГИ. 1947. Вып. 635. 47 с.
8. Веклич Н. А. Осесимметричные задачи об ударе упругого диска о жидкость//Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 175—184.
9. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
10. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский А. М. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
11. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 372 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
13. Веклич Н. А. Осесимметричная задача об ударе по жидкому цилиндру//Сибирский физ.-техн. журн. 1991. Вып. 3. С. 66—72.
14. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Плоская задача об ударе по жидкой полосе//Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 99—121.
15. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Присоединенная масса прямоугольного сосуда, наполненного жидкостью//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 185—188.

Москва

Поступила в редакцию
26.VIII.1993