

УДК 532.516:532.546

© 1994 г. А. А. СТРИЖОВ, В. Ш. ХАЛИЛОВ

СТРУКТУРА ПРИСТЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ЗЕРНИСТЫМ СЛОЕМ

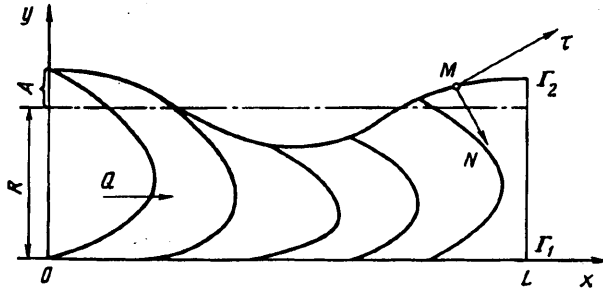
Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, у которого одна граница прямолинейная, а другая синусоидальная. Используя представление системы уравнений Стокса через функцию тока в области, включающей один периодический элемент, получаем краевую задачу для бигармонического оператора. Ее решение находится приближенно смешанным методом Галеркина — методом прямых. Матрица неизвестных коэффициентов, близкая к вырожденной, рассчитывается на ЭВМ. Найдены поля компонент вектора скорости, давления и функции тока в зависимости от степени кривизны границы. Установлены особенности структуры потока, обусловленные несимметричностью стенок. Вводится величина искривленности порового пространства, необходимая для уточнения зависимости проницаемости от структуры. Результаты работы представляют интерес для анализа пристенного эффекта увеличения скорости течения в канале с неподвижным зернистым слоем.

При течении газа в аппарате с неподвижным зернистым слоем в окрестности стенки имеет место увеличение скорости в 1,5—2 раза по отношению к центральной области (пристенный эффект).

В обзоре [1] представлен глубокий анализ проблемы, здесь отметим лишь основные моменты. В [2] на основе экспериментов была сформулирована сама проблема и впервые предложена одна из наиболее вероятных причин этого эффекта, основанная на пристенной неоднородности пористости (удельный объем пор). Последующие эксперименты [3, 4] подтвердили, что наличие регуляризирующего влияния стенки канала состоит в изменении упаковки зерен в направлении большей упорядоченности и, следовательно, в соответственном увеличении пористости. В [5] рассчитана деформация в канале с зернистым слоем, вследствие чего сделан вывод о дополнительной неоднородности порового пространства. Другое уточнение — результаты, устанавливающие явление локальных неоднородностей в пристенной зоне при засыпке зерен [6, 7].

Однако имеются факты, свидетельствующие о недостаточности данного объяснения. Например, экспериментами [8] показано, что даже при достижении постоянной пористости по сечению канала пристенный эффект не ликвидируется. Анализ экспериментальных данных также определенно указывает на зависимость проявления эффекта от размера зерна, тогда как пористость от размера зерна не зависит [1]. Предпринимается поиск альтернативных гипотез. В [9] на основе экспериментов [10, 11] утверждается, что собственно внутри слоя эффект отсутствует, а образуется лишь на выходе за счет турбулизации струй. Введение параметра эффективной вязкости, отличной от молекулярной, дало возможность моделировать течение с учетом пристенного эффекта [12].

Двухзонная модель течения в канале с зернистым слоем показала [13], что непосредственно наличие гладкой стенки создает гидродинамические условия, снижающие сопротивление течению. С позиции данной точки зрения с целью более детального изучения ниже рассмотрена микроструктурная модель, основанная на идеализации порового пространства, как в [14]. Отличие от [14]



Фиг. 1

состоит в выборе асимметричных поровых границ, что соответствует пристенной области. Применительно к течению вязкой жидкости в зернистом слое известны, например, весьма тонкие эксперименты [15] и трудоемкий расчет трехмерного течения [16]. Тем не менее здесь ограничимся более простой плоской моделью, позволяющей меньшими усилиями рассмотреть поставленный выше вопрос.

Пусть имеем бесконечный вдоль оси x плоский поровый канал Ω ($0 < x < \infty$), $\Gamma_2 \leq y \leq 0$ с одной прямолинейной границей вдоль оси x , а другой синусоидальной, как показано на фиг. 1. В положительном направлении оси x по каналу течет с постоянной скоростью вязкая несжимаемая жидкость. Введем функцию тока $\psi(x, y) \in C^4(\Omega)_0 \cap C^1(\bar{\Omega})$, где $\bar{\Omega}$ — замыкание Ω . Предполагая, что вязкость жидкости большая (стоксово приближение), получим для ψ бигармоническое уравнение со следующими граничными условиями:

$$\Delta^2 \psi(x, y) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$u = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}$$

$$\psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial N} = 0; \quad y \in \Gamma_1, \quad y \in \Gamma_2 \quad (2)$$

$$\psi(x + L, y) = \psi(x, y) \quad (3)$$

Здесь U, V — компоненты вектора скорости, N — внутренняя нормаль к границе, L — длина одного периодического элемента порового канала. Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y) \cos(\omega_k x), \quad \omega_k = \omega_0 k = \frac{2\pi k}{L}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

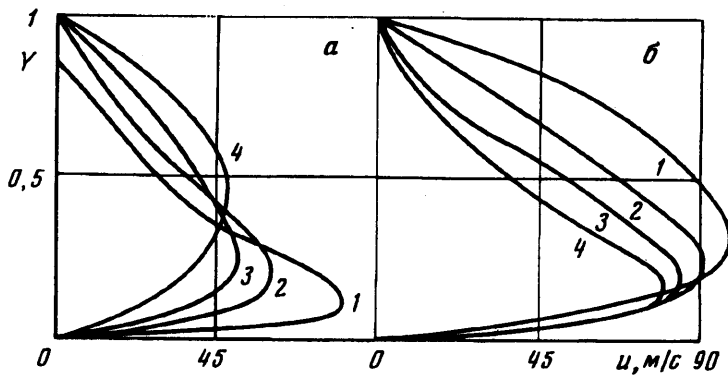
Вопрос о существовании периодического решения для бигармонического уравнения задачи (1)–(2) остается открытым ввиду отсутствия доказательства сходимости ряда в (4). Однако из последующего анализа решения следует, что коэффициент $f_k(x)$, хотя через неоднородное граничное условие и зависит от переменной x , но медленно. Вычислительный эксперимент показывает, что A_k, B_k стремятся к нулю быстрее $\exp(-kc)$ при $k \rightarrow \infty$, $c > 0$, что и оправдывает его представление в форме (4).

Подставляя (4) в (1), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^4 f_k}{dy^4} + 2\omega_k^2 \frac{d^2 f_k}{dy^2} + \omega_k^4 f_k = 0 \quad (5)$$

Отсюда общие решения уравнений (5) и (1) имеют вид

$$f_k(y) = (A_k + B_k y) \exp(-\omega_k y) + (C_k + D_k y) \exp(\omega_k y)$$



Фиг. 2

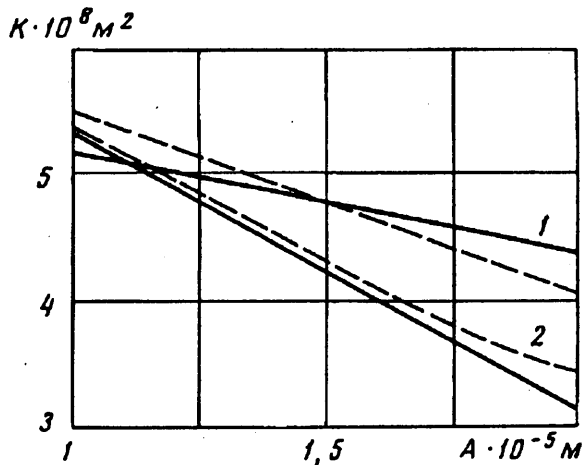
$$\psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} [(A_k + yB_k) \exp\{-\omega_k y\} + (C_k + yD_k) \exp\{\omega_k y\}] \cos(\omega_k x) \quad (6)$$

Учитывая производные по нормали и краевые условия (2) и (3), получим систему для расчета неизвестных коэффициентов A_k, B_k, C_k, D_k

$$\begin{aligned} & \sum_k [A_k (\exp\{-\omega_k y_1\} + (2\omega_k y_1 - 1) \exp\{\omega_k y_1\}) + \\ & + B_k y_1 (\exp\{-\omega_k y_1\} - \exp\{\omega_k y_1\})] \cos(\omega_k x) = Q \\ & \sum_k A_k \omega_k [\sin(\omega_k x) A \omega_0 \sin(\omega_0 x) \exp\{-\omega_k y_1(x)\} - \exp\{\omega_k y_1(x)\} + \\ & + 2\omega_k \exp\{\omega_k y_1(x)\} y_1(x) + \cos(\omega_k x) \exp\{-\omega_k y_1(x)\} + \exp\{\omega_k y_1(x)\} - \\ & - 2 \exp\{\omega_k y_1(x)\} (1 + \omega_k y_1(x))] + B_k [y_1(x) \omega_k \sin(\omega_k x) A \omega_0 \sin(\omega_0 x) \times \\ & \times (\exp\{-\omega_k y_1(x)\} - \exp\{\omega_k y_1(x)\}) - \cos(\omega_k x) (1 - \omega_k y_1(x)) \times \\ & \times \exp\{-\omega_k y_1(x)\} - (1 + \omega_k y_1(x)) \exp\{\omega_k y_1(x)\}] = 0 \end{aligned}$$

Решение системы алгебраических уравнений (7) было выполнено на ЭВМ. Ввиду близости матрицы коэффициентов данной системы у вырожденной использован метод неравномерных шагов при переменной x . После нахождения коэффициентов были рассчитаны последовательно функции $\psi(x, y), u(x, y), v(x, y), A(x, y)$, которые соответствуют условиям течения через пористую среду.

На фиг. 1 показаны элемент модели порового пространства и типичные профили продольной компоненты вектора скорости внутри порового канала для различных сечений периодического элемента. Характерная особенность структуры потока состоит в том, что осредненная величина максимума скорости расположена близко к прямолинейной границе. Более отчетливо это можно наблюдать в случае большой кривизны верхней границы на фиг. 2. Расчеты были проведены при $Q = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$. На фиг. 2, *a* $R = 10^{-4} \text{ м}$, $A = 10^{-5} \text{ м}$; $L/\pi = 10^{-3}, 1,4 \cdot 10^{-3}, 1,8 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (кривые 1—4), т. е. вариации кривизны границы осуществлялась за счет изменения параметра L . На фиг. 2, *б* показано влияние изменения параметра среднего размера поры R , при значениях $A = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, $L = \pi \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $R = 1,4 \cdot 10^{-4}, 1,8 \cdot 10^{-4}, 2,2 \cdot 10^{-4}, 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ (кривые 1—4). Широкая вариация неоднородности верхней границы показывает, что в окрестности гладкой стенки скорость течения в среднем больше скорости вблизи криволинейной границы. Увеличение кривизны последней способствует повышению сопротивления течения в поровом канале.



Фиг. 3

Для количественной оценки данной закономерности был рассчитан перепад давления p в канале при изменении геометрической структуры границ. По заданному расходу течения Q и вязкости μ определялась проницаемость порового канала K по формуле типа закона Дарси.

Кроме того, была учтена зависимость K от размера канала как в известных эмпирических зависимостях типа Эргуна вида $K = f(R^2)$. Таким образом, вариация искривленности границ оставалась единственным параметром, определяющим проницаемость пор, и это давало возможность изучить ее влияние. Было установлено, что предпочтительно искривленность границы поры представить в виде $\eta = A/L$, тогда величины проницаемости можно представить для пристенного течения в виде

$$K_1 = \frac{R^2 B_1}{(B_2 \eta^2 + 1)^{1/2}} \quad (8)$$

где $B_1 = 5,7$; $B_2 = 5 \cdot 10^5$. Для случая, когда обе границы искривлены и зеркально-асимметричны, будем иметь $B_1 = 7$; $B_2 = 2 \cdot 10^6$.

На фиг. 3 (сплошная линия) показано сравнение расчетов, выполненных на ЭВМ, с аппроксимационными зависимостями типа (8) для удаленной от стенки области (кривые 1) и вблизи стенки (2). Совпадение вполне удовлетворительное.

Таким образом, как и предполагалось ранее, искривленная структура порового пространства вносит вклад в величину сопротивления течению независимо от среднего гидравлического размера поры. Хотя реальная структура пористой среды существенно неоднородна, можно предположить, что рассмотренная здесь идеализированная модель есть вариант осреднения формы.

Из формулы (8) следует также, что при отсутствии кривизны поровых границ, т. е. при $\eta \rightarrow 0$, величина проницаемости есть функция только среднего размера поры. Геометрическая структура порового пространства — определяющий параметр течения в пористой среде. Отсутствие кривизны у гладкой стенки обуславливает снижение сопротивления в ее окрестности, увеличение скорости течения и в результате приводит к явлению пристенного эффекта. Здесь качественно показано, что и при малых скоростях течения необходимо учитывать строение порового пространства, например, с помощью параметра искривленности. Экспериментальное существование пристенного эффекта увеличения скорости в канале с зернистым слоем, упакованным таким образом, чтобы пористость была постоянной по сечению [8], является убедительным подтверждением данного предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Идельчик И. Е.* Аэродинамика контактных, фильтрующих и адсорбционных аппаратов со стационарным слоем зернистых материалов: Обзор информ. М.: ЦИНТИхимнефтемаш, 1982. 40 с.
2. *Schwartz C. E., Smith J. M.* Flow Distribution in packed beds//Ind. Eng. Chem. 1953. V. 45. № 6. P. 1209—1218.
3. *Cairns E. J., Prausnitz J. M.* Velocity profiles. In packed and fluidized beds//Indust. Engn. Chem. 1959. V. 51. № 12. P. 1441—1444.
4. *Benenati R. F., Brosilow C. B.* Void Fraction Distribution in Beds of Spheres//AIChE Journal. 1962. V. 8. № 3. P. 359—361.
5. *Котелкин В. Д., Мясников В. П.* Влияние деформации засыпки на течение газа в химическом реакторе с неподвижным слоем катализатора//Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 1. С. 170—174.
6. *Волков В. И., Данилов И. С., Жак В. Д.* и др. Исследование гидродинамики пристенного слоя на модели кубической упаковки//ПМТФ. 1980. № 6. С. 58—64.
7. *Боресков Г. К., Матрос Ю. Ш., Кленов О. П.* и др. Локальные неоднородности в слое катализатора//Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 6. С. 1418—1420.
8. *Mickley H. S., Smith K. A., Korchak E. J.* Fluid flow in packed beds//Chem. Eng. Sci. 1965. V. 20. № 3. P. 237—265.
9. *Гольдштик М. А.* Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск, 1984. 163 с.
10. *Akehata T., Sato K.* Flow Distribution in Packed Beds//Chem. Eng. Japan. 1958. V. 22. № 7. P. 430—436.
11. *Кириллов В. А., Кузьмин В. А., Пьянов В. И., Ханаев В. М.* О профиле скорости в неподвижном зернистом слое//Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 1. С. 159—162.
12. *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
13. *Халилов В. Ш., Глюзман А. М., Халиков Г. А.* и др. Некоторые аэродинамические особенности фильтрационного течения вблизи гладкой стенки//Аэродинамика хим. реакторов с неподвижными слоями катализатора. Новосибирск: Наука, 1985. С. 98—104.
14. *Elata C., Takserman U.* The viscous flow through channels and tubes with sinusoidal//Isr. Journal of Tech. 1976. V. 14. № 6. P. 235—240.
15. *Carson W. M., Bloomsbury G. L.* Osesn Approximation for packed bed flow-velocity profiles and friction factors//Frans. ASAE. 1972. V. 15. № 3. P. 543—547.

Уфа

Поступила в редакцию
13.V.1992