

УДК 532.529 : 534.2

© 1994 г. Г. Г. ОГАНЯН

О ТЕПЛОВОМ МЕХАНИЗМЕ ЗАТУХАНИЯ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Исследуется влияние межфазного теплообмена на процесс распространения волны в монодисперсной газожидкостной смеси. Выведено трехволновое уравнение типа Буссинеска и получены формулы зависимостей тепловых составляющих коэффициентов диссипаций от теплофизических параметров смеси. Определены границы применимости метода коротких волн. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных значений фазовой скорости волны и выявлено их хорошее совпадение.

Влияние тепловых эффектов на процесс распространения волны в газожидкостной смеси впервые изучено в [1—3] методом численного моделирования. Результаты экспериментальных исследований, изложенные в [4], подтверждают выводы этих работ о том, что главным механизмом затухания возмущений может стать межфазный теплообмен между пузырьками и окружающей их жидкостью. В [5, 6] предложен способ учета тепловых эффектов принятием схемы с эффективной вязкостью с такой составляющей коэффициента диссипации, которая дает такой же декремент затухания колебаний пузырька, что и учет теплообмена в задаче о его свободных колебаниях [7—9]. В [10] методом коротких волн [11] получены эволюционные уравнения, описывающие распространение нелинейных волн при квазиadiaбатическом и квазиизотермическом поведении газа в пузырьке.

1. Исходные уравнения. Рассмотрим бесстолкновительную монодисперсную газожидкостную смесь, в которой отсутствуют процессы дробления, слипания и образования новых пузырьков. Полагаем, что внешних источников тепла нет. Так как масса и величины теплоемкостей жидкой фазы существенно превосходят те же характеристики газовой фазы, то температура несущей жидкости принимается постоянной ($T_1 = T_0 = \text{const}$). Систему уравнений, описывающую одномерное односкоростное течение рассматриваемой смеси и учитывающую эффекты вязкости, сжимаемости жидкости и межфазного теплообмена, возьмем в виде [12]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_1 \beta \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \quad (1.2)$$

$$P_2 - P = (1 - \varphi_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1 - \varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \quad (1.3)$$

$$\frac{\rho_2 \beta}{\rho_1 (1 - \beta)} = \text{const}, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad P_2 = c_{v2} (\gamma - 1) \rho_2 T_2 \quad (1.4)$$

$$\rho = \rho_1 (1 - \beta) + \rho_2 \beta, \quad P = P_1 (1 - \beta) + P_2 \beta \quad (1.5)$$

$$\frac{dP_2}{dt} + \frac{3\gamma P_2}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{3(\gamma - 1)k_2 \text{Nu}}{2R^2} (T_2 - T_0) = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho_1 T_0 \frac{ds_1}{dt} = \frac{4}{3} \frac{\mu}{1 - \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{12\beta}{R^2} \mu \left(\frac{dR}{dt} \right)^2, T_1 = T_0 \quad (1.7)$$

$$\varphi_1 = \frac{1,1\beta^{3/2} - \beta}{1 - \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{1,5\beta^{3/2} - 1,3\beta}{1 - \beta}$$

Здесь индексы 1 и 2 отнесены соответственно к параметрам жидкой и газовой фаз, а параметры, характеризующие течение смеси в целом, индексов не имеют ρ — плотность, P — давление, u — массовая скорость частиц всей смеси, R — радиус пузырька, β — объемное газосодержание, T — температура, γ — показатель адиабаты газа, c_{v2} — удельная теплоемкость при постоянном объеме, k_2 и μ — коэффициенты теплопроводности и вязкости, Nu — число Нуссельта, s — энтропия, поправочные коэффициенты φ_1 и φ_2 учитывают неоднородность пузырька в смеси.

Предположим, что по невозмущенной покоящейся смеси в направлении оси x распространяются волны, в которых избыточные значения всех параметров смеси малы в сравнении с начальными, при этом величины возмущений имеют тот же порядок малости, что и скорость частиц смеси ($i = 1, 2$)

$$u = \varepsilon a_0 u', \quad P = P_0 (1 + \varepsilon P'), \quad P_i = P_0 (1 + \varepsilon P'_i), \quad \rho = \rho_0 (1 + \varepsilon \rho'),$$

$$\beta = \beta_0 (1 + \varepsilon \beta'), \quad R = R_0 (1 + \varepsilon R'), \quad T_2 = T_0 (1 + \varepsilon T'), \quad s_1 = s_{10} (1 + \varepsilon s'_1) \quad (1.8)$$

Здесь индекс ноль отнесем к невозмущенному состоянию, являющемуся состоянием покоя, ε — малый безразмерный параметр, a_0 — скорость звука в смеси. Линеаризуя уравнение (1.7), находим, что в этом приближении $s' = 0$. Тогда, разлагая функцию $P_i = P_i(\rho_i, s_i)$ в ряд Тейлора в окрестности состояния локального термодинамического равновесия жидкой фазы и ограничиваясь линейными членами, будем иметь

$$P'_i = \frac{\rho_{i0} a_{i0}^2}{P_0} \rho'_i, \quad a_{i0}^2 = \left(\frac{\partial P_i}{\partial \rho_i} \right)_0$$

Комбинируя последнюю формулу с линейными соотношениями, получаемыми, согласно (1.8), из алгебраических соотношений (1.4) и (1.5), находим

$$P' = (1 - \beta_0) P'_1 + \beta_0 P'_2, \quad \rho' = (1 - \beta_0) \rho'_1 + \beta_0 \rho'_2, \quad \rho'_2 = -3R' \quad (1.9)$$

$$P'_2 = T' - 3R', \quad \rho' = \frac{P_0}{\rho_{10} a_{10}^2} (P' - \beta_0 T') - 3\beta_0 \left(1 - \frac{P_0}{\rho_{10} a_{10}^2} \right) R'$$

Линеаризация уравнений (1.1), (1.2) и последующее их комбинирование как друг с другом, так и с последним соотношением из (1.9) позволяет исключить из рассмотрения возмущение скорости и избыточную плотность всей смеси

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \right) \left[P' + 3\beta_0 \left(1 - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{P_0} \right) R' - \beta_0 T' \right] - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2} = 0 \quad (1.10)$$

Линеаризуя уравнение (1.3) и (1.6), после комбинирования их соответственно с четвертым и третьим соотношениями из (1.9), получим

$$P' + 3R' + 3\gamma \frac{1 - \varphi_{10}}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2 R'}{\partial t^2} + \frac{4\mu}{P_0} \frac{\partial R'}{\partial t} - T' = 0 \quad (1.11)$$

$$3(\gamma - 1) \frac{\partial R'}{\partial t} + \frac{\partial T'}{\partial t} + 3\gamma \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} \omega_r T' = 0 \quad (1.12)$$

$$\omega_{ar} = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_{10}}} = \sqrt{\gamma} \omega_{is}$$

$$Pe = \frac{2R_0^2}{\lambda_2} \omega_r, \quad \lambda_2 = \frac{k_2}{c_{p2}\rho_{20}}$$

Здесь ω_{ar} и ω_{is} — адиабатическая и изотермическая частоты Миннаерта, Pe — число Пекле, λ_2 — коэффициент температуропроводности, c_{p2} — удельная теплоемкость при постоянном давлении. В случае свободных колебаний пузырька ω_r равняется ω_{ar} или ω_{is} в зависимости от вида исследуемого режима, который определяется лишь термодинамическим поведением газа в пузырьках. При вынужденных колебаниях ω_r равняется частоте вынуждающего поля.

При предельных режимах распространения волны возмущения перемещаются либо с изотермической a_{e0} , либо с адиабатической a_{r0} невозмущенной скоростью звука в смеси, которые определяются формулами [5, 6]

$$\frac{1}{a_{e0}^2} = \frac{(1 - \beta_0) \rho_0}{\rho_{10} a_{10}^2} + \frac{\beta_0 \rho_0}{P_0}, \quad \frac{1}{a_{r0}^2} = \frac{(1 - \beta_0) \rho_0}{\rho_{10} a_{10}^2} + \frac{\beta_0 \rho_0}{\gamma P_0} \quad (1.13)$$

2. Многоволновое уравнение. Замкнутая система уравнений (1.10)–(1.12) полностью описывает процесс распространения волны в линейном приближении и отличается от системы, исследуемой другими авторами [5, 6], наличием слагаемых, ответственных за описание межфазного теплообмена. Решение системы будем искать в виде бегущих волн

$$P' = P_* \exp [i(kx - \omega t)], \quad R' = R_* \exp [i(kx - \omega t)], \quad T' = T_* \exp [i(kx - \omega t)]$$

которые характеризуются волновым числом k и частотой ω .

Условие существования нетривиального решения для системы алгебраических однородных уравнений относительно амплитуд P_* , R_* , T_* приводит к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} & \omega^2 - a_{e0}^2 k^2 - \frac{1 - \varphi_{10}}{\omega_{is}^2} \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \omega^2 \left(\omega^2 - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} k^2 \right) - \\ & - v_e^* i \omega^3 + i \delta_e^* \omega k^2 = \frac{Pe}{Nu} \frac{1}{3\omega_r} \frac{a_{e0}^2}{a_{r0}^2} i \omega \times \\ & \times \left[\omega^2 - a_{r0}^2 k^2 - \frac{1 - \varphi_{10}}{\omega_{ar}^2} \frac{\rho_0 a_{r0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \omega^2 \left(\omega^2 - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} k^2 \right) - \right. \\ & \left. - i v_f^* \omega^3 + i \delta_f^* \omega k^2 \right] \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$v_e^* = \frac{4}{3} \frac{\mu}{P_0} \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2}, \quad \delta_e^* = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \left(1 + \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right)$$

Здесь коэффициенты v_f^* и δ_f^* те же, что и v_e^* и δ_e^* с заменой a_{e0} на a_{r0} , P_0 на γP_0 . При выводе уравнения использованы определения скоростей (1.13). Пренебрежение членами более высокого порядка малости, чем выписанные, приводит к ограничениям на величины частот, которые практически всегда выполняются. Поскольку величинам k и ω соответствуют операторы $(-i\partial/\partial x)$ и $(i\partial/\partial t)$, то из дисперсионного уравнения (2.1) можно восстановить дифференциальное уравнение, описывающее поведение избыточного давления

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{e0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1 - \varphi_{10}}{\omega_{is}^2} \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) +$$

$$+ v_*^* \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} - \delta_*^* \frac{\partial^3 P}{\partial t \partial x^2} = - v_r^* \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{r0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \right. \quad (2.2)$$

$$\left. + \frac{1 - \varphi_{10}}{\omega_{ar}^2} \frac{\rho_0 a_{r0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + v_f^* \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} - \delta_f^* \frac{\partial^3 P}{\partial t \partial x^3} \right]$$

Полученное уравнение будем называть многоволновым, поскольку в нем фигурируют волновые операторы с различными характерными скоростями звука. Наличие трех волновых операторов разных порядков свидетельствует, а анализ частотной зависимости фазовой скорости подтверждает теорию Уизема об иерархии распространения волн. После вхождения звукового сигнала в смесь его высокочастотная часть, называемая предвестником [5, 6], распространяется со скоростью, близкой по величине скорости звука в чистой жидкости. Следом за ней перемещается с адиабатической скоростью звука a_{r0} та часть сигнала, которая соответствует умеренно высоким частотам. Наконец, последней следует с изотермической скоростью звука a_{e0} основная часть сигнала, которая соответствует его низкочастотной части. Из (2.2) можно получить уравнения, описывающие промежуточные квазиизотермический и квазиадиабатический режимы распространения волн.

Квазиизотермический режим реализуется в случае, когда термодинамическое поведение газа в пузырьках отличается, хотя и ненамного, от изотермического [10, 14]. Тогда в процессе взаимодействия пузырька с жидкостью происходит ощутимый межфазный теплообмен, при котором имеет место характеризующая режим оценка $Re/Nu \sim \varepsilon$, где зависимость Nu от Re находится из формул работ [9, 12]. Оставляя в (2.2) главные члены, придем к уравнению ($\omega = \omega_\nu$)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{e0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1 - \varphi_{10}}{\omega_\nu^2} \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + \quad (2.3)$$

$$+ (v_*^* + v_r^*) \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} - (\delta_*^* + \delta_{eT}^*) \frac{\partial^3 P}{\partial t \partial x^2} +$$

$$+ v_r^* \frac{1 - \varphi_{10}}{\gamma \omega_\nu^2} \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) = 0, \delta_{eT}^* = v_r^* a_{r0}^2$$

Нетрудно показать, что пренебрежение последним слагаемым в сравнении с четвертым и пятым соответствует наложению ограничения

$$\omega < \omega_\nu (1 - \varphi_{10})^{-1/2} \equiv \omega_\nu^* \quad (2.4)$$

на величины частот реализуемых в смеси волн. В отсутствие теплообмена ($Re \rightarrow 0$) такого ограничения нет.

В случае отсутствия эффектов теплообмена, вязкости и дисперсии из (2.3) следует точная связь $\partial/\partial t = \pm a_{e0} \partial/\partial x$, которую будем считать приближенно выполняемой и при наличии диссипации. Тогда, факторизуя посредством этой связи уравнение (2.3), придем к эволюционному уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_{e0} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2} [\delta_*^* + \delta_{eT}^* - (v_*^* + v_r^*) a_{e0}^2] \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \quad (2.5)$$

$$+ \frac{a_{e0}^3}{2\omega_\nu^*} \left(1 - \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right) \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} - v_r^* \frac{a_{e0}^4}{2\gamma \omega_\nu^*} \left(1 - \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right) \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} = 0$$

Полученное уравнение описывает квазиизотермический режим распространения волны давления вдоль отрицательного направления оси x . Если в (2.5) пренебречь последним слагаемым, то уравнение полностью совпадает с линейной частью нелинейного эволюционного уравнения, выведенного в [10]

$R_0, \text{ м}$	$\delta_e^* = 6,87 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с};$ $v_e^* = 3,1 \cdot 10^{-9} \text{ с}; \beta_0 = 0,00015$		$\delta_e^* = 1,36 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с};$ $v_e^* = 5,9 \cdot 10^{-11} \text{ с}; \beta_0 = 0,01$	
	$\delta_{eT}^*, \text{ м}^2/\text{с}$	$v_T^*, \text{ с}$	$\delta_{eT}^*, \text{ м}^2/\text{с}$	$v_T^*, \text{ с}$
$3 \cdot 10^{-6}$	$1,34 \cdot 10^{-2}$	$2,04 \cdot 10^{-8}$	$2,79 \cdot 10^{-4}$	$1,34 \cdot 10^{-8}$
$5 \cdot 10^{-6}$	$3,68 \cdot 10^{-2}$	$5,57 \cdot 10^{-8}$	$7,17 \cdot 10^{-4}$	$5,11 \cdot 10^{-8}$
$7 \cdot 10^{-6}$	$7,19 \cdot 10^{-2}$	$1,09 \cdot 10^{-7}$	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$9,98 \cdot 10^{-8}$

методом коротких волн [11]. Таким образом, метод коротких волн пригоден для исследования распространения волн с частотами, которые удовлетворяют ограничению (2.4). Для исследования волновой картины при $\omega \approx \omega_{lr}^*$ необходимо пользоваться полным уравнением (2.5). Именно оно без последнего члена и с другим выражением тепловой составляющей коэффициента диссипации использовано в [5, 13] для интерпретации результатов известных [15] экспериментов по выявлению зависимости фазовой скорости волны от ее частоты, несмотря на то что в них волновой режим не является квазиизотермическим.

Чтобы иметь представления о порядках величин коэффициентов диссипации v_e^* , v_T^* , δ_e^* , δ_{eT}^* в реальных смесях, в табл. 1 приведены их числовые данные для водовоздушных смесей при $P_0 = 0,1$ МПа и свободных колебаниях газового пузырька.

Вне зависимости от величины газосодержания β_0 значения v_T^* и δ_{eT}^* не только сравнимы, но и превосходят значения v_e^* и δ_e^* на порядок и больше. Этот факт означает, что в таких газожидкостных смесях главным механизмом диссипации является межфазный теплообмен.

Квазиadiaбатический режим реализуется в случае, когда термодинамическое поведение газа в пузырьках отличается, хотя и ненамного, от адиабатического. Тогда вследствие динамического взаимодействия пузырька с жидкостью будет происходить ощутимый межфазный теплообмен. Для этого режима имеет место оценка [9, 11]

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} \sim \varepsilon, \quad \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} = \frac{2 \left(\sqrt{\text{Pe}/2} \text{cth} \sqrt{\text{Pe}/2} - 1 \right)}{\text{Pe} - 6 \left(\sqrt{\text{Pe}/2} \text{cth} \sqrt{\text{Pe}/2} - 1 \right)}$$

В уравнении (2.2) в выражении для v_T^* примем $\omega_r = \omega_{ar}$. Далее, оставляя в (2.2) главные члены, а именно его правую часть в совокупности с первыми тремя слагаемыми из левой части, получим

$$\frac{1}{v_T^*} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{e0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{r0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + (v_f^* + v_{fT}^*) \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} -$$

$$- (\delta_f^* + \delta_{fT}^*) \frac{\partial^4 P}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{1}{\omega_{ar}^*} \frac{\rho_0 a_{r0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$v_{fT}^* = \frac{1}{v_T^*} \frac{1}{\omega_{lr}^*} \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2}, \quad \delta_{fT}^* = \frac{1}{v_T^*} \frac{a_{e0}^2}{\omega_{lr}^*}, \quad \frac{1}{\omega_{ar}^*} = \frac{1 - \varphi_{10}}{\omega_{ar}^2} \quad (2.6)$$

Полученное уравнение описывает квазиadiaбатический режим распространения волны давления конечной интенсивности и в пределе, когда

Таблица 2

$\beta_0, 10^{-4}$	ν	$\nu_\mu, 10^{-4}$	δ	$\delta_\mu, 10^{-3}$	κ_1	κ_2
1,5	0,284	10,75	0,758	3,661	0,539	0,691
2,0	0,234	8,73	0,755	3,673	0,537	0,701
2,5	0,198	7,35	0,750	3,638	0,356	0,707

Таблица 3

$f, \text{кГц}$	κ_1	κ_2	ν	δ	$f, \text{кГц}$	κ_1	κ_2	ν	δ
7,5	2,569	3,352	0,142	0,458	90	0,412	0,538	0,272	0,879
15	1,445	1,886	0,159	0,498	105	0,375	0,489	0,289	0,932
30	0,857	1,118	0,189	0,651	120	0,345	0,451	0,304	0,981
45	0,646	0,843	0,214	0,689	126	0,336	0,438	0,310	1,022
53	0,579	0,756	0,225	0,727	150	0,302	0,394	0,332	1,073
60	0,537	0,701	0,234	0,755	165	0,286	0,373	0,346	1,115
68	0,526	0,686	0,246	0,793	195	0,259	0,338	0,370	1,280
75	0,462	0,603	0,254	0,821	240	0,230	0,300	0,404	1,304

$Re \rightarrow \infty$, оно описывает чисто адиабатический режим. В отсутствие эффектов теплообмена, вязкости и сжимаемости фронт волны описывается уравнением $x = \pm a_{r0}t$, откуда $\partial/\partial t = \pm a_{r0}\partial/\partial x$.

Такую связь будем считать приближенно выполнимой и в случае наличия эффектов диссипации. Тогда факторизация уравнения (2.6) посредством этой связи позволяет выделить из него эволюционное уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_{r0} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2} [\delta_f^* + \delta_{fr}^* - (\nu_f^* + \nu_{fr}^*) a_{r0}^2] \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{a_{r0}^3}{2\omega_{ar}^*} \left(1 - \frac{\rho_0 a_{r0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2}\right) \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} + \frac{1}{2\nu_r^*} \left(1 - \frac{a_{r0}^2}{a_{r0}^2}\right) P = 0 \quad (2.7)$$

Выведенное уравнение описывает однонаправленное (вдоль отрицательной оси x) распространение волны давления. Если в уравнении (2.6) пренебречь тепловыми составляющими в третьем и четвертом слагаемых в сравнении с первым, то такая операция будет соответствовать наложению ограничения (2.4) на величины частот волн. В этом случае в уравнении (2.7) формально можно полагать $\delta_{fr}^* = \nu_{fr}^* = 0$ и тогда оно полностью совпадает с линейной частью нелинейного волнового уравнения, выведенного в [10] методом коротких волн [11]. Для описания поведения волн с частотами $\omega \sim \omega_r^*$ необходимо пользоваться полными уравнениями (2.6) или (2.7).

В рамках квазиадиабатического режима перейдем к исследованию зависимости фазовой скорости волны от частоты. Соответствующее уравнению (2.6) дисперсионное соотношение будет комплексным, поэтому отношение k/ω также будет комплексным. Будем считать частоту ω действительной, а волновое число k — комплексной величиной и тогда фазовая скорость определится как

$$c_{ph} = \frac{\text{Re}(\omega)}{\text{Re}(k)} = \text{Re}\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{\omega}{k_1}, \quad k = k_1 + ik_2$$

где k_2 — декремент затухания амплитуды волны по длине.

Разделяя в исследуемом дисперсионном соотношении действительную и мнимую части, выразим c_{ph} через физические параметры смеси и частоту

$$\frac{a_{j0}^2}{c_{ph}^2} = \frac{1}{2} \frac{(\kappa_1 - \delta z^2)(\kappa_2 - \nu z^2) + z^2(1 - z^2)(1 - bz^2)}{(\kappa_1 - \delta z^2)^2 + z^2(1 - z^2)^2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \left[\frac{z(1 - z^2)(\kappa_2 - \nu z^2) - z(1 - bz^2)(\kappa_1 - \delta z^2)}{(\kappa_1 - \delta z^2)(\kappa_2 - \nu z^2) + z^2(1 - z^2)(1 - bz^2)} \right]^2} \right\} \quad (2.8)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{v_T^*} \frac{1}{\omega_{ar}^*} \frac{a_{j0}^2}{a_{j0}^2} = 3 \sqrt{1 - \varphi_{10}} \frac{Nu}{Pe}, \quad \kappa_2 = \kappa_1 \frac{a_{j0}^2}{a_{e0}^2}, \quad z = \frac{\omega}{\omega_{ar}^*}$$

$$\nu = (\nu_f^* + \nu_{JT}^*) \omega_{ar}^* \equiv \nu_\mu + \nu_T, \quad \delta = \frac{\delta_f + \delta_{JT}}{a_{j0}^2} \omega_{ar}^* \equiv \delta_\mu + \delta_T, \quad b = \frac{\rho_0 a_{j0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2}$$

В табл. 2 приведены значения диссипативных коэффициентов для разных монодисперсных водовоздушных смесей с $R_0 = 5,5 \cdot 10^{-5}$ м и $R_0 = 0,1$ МПа. Независимо от величины β_0 значения тепловых коэффициентов δ_T и ν_T намного превосходят значения δ_μ и ν_μ , что свидетельствует о доминирующей роли теплового механизма диссипации.

Из (2.8) следует, что в отсутствие всех видов диссипаций ($\kappa_1 = \kappa_2 = \nu = \delta = 0$) при $z \rightarrow 0$ имеем $c_{ph} \rightarrow a_{j0}$. То же предельное значение фазовой скорости будем иметь и в отсутствие лишь межфазного теплообмена ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0, \nu \neq 0, \delta \neq 0$), т. е. при низкочастотных сигналах вязкость не влияет на величину фазовой скорости волны. Если же исходить из полной формулы, то при $z \rightarrow 0$ получаем $c_{ph} \rightarrow a_{e0}$ вне зависимости от того, есть или отсутствует эффект вязкости. Таким образом, при распространении низкочастотных звуковых сигналов межфазный теплообмен существенным образом корректирует величину фазовой скорости. При $z \rightarrow \infty$, как и следует ожидать, $c_{ph} \rightarrow a_{10}$.

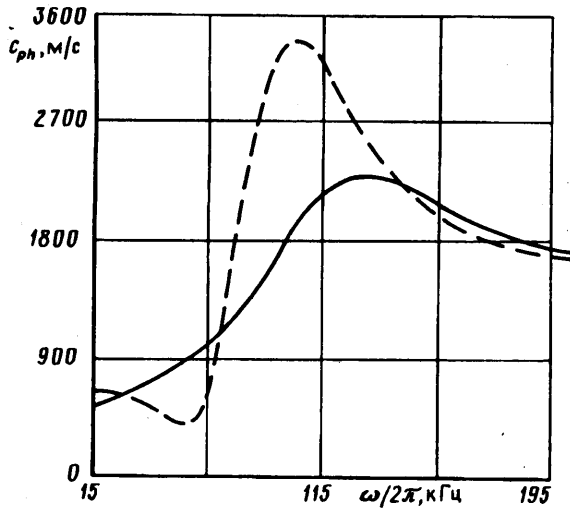
Сравним вычисляемые посредством формулы (2.8) значения c_{ph} с данными известных экспериментов [15] в водовоздушной смеси по выявлению частотной зависимости фазовой скорости. В этих же экспериментах пузырьки совершают вынужденные колебания с частотой вынужденной силы, поэтому в определениях чисел ν_T^* и Pe частоту ω , необходимо отождествить с последней частотой. В табл. 3 приведены значения физико-механических параметров смеси в зависимости от частоты вынужденного поля $f = \omega/2\pi$ для $P_0 = 0,1$ МПа; $\beta_0 = 2 \cdot 10^{-4}$; $R_0 = 5,5 \cdot 10^{-5}$ м; $a_{e0} = 640$ м/с, $a_{j0} = 731$ м/с.

На основании ее данных на фигуре приведены частотные зависимости фазовой скорости. Сплошная кривая, заимствованная из [13, 15], соответствует экспериментальным, а штриховая — расчетным значениям. Наблюдается смещение расчетного графика относительно экспериментального, что можно объяснить полидисперсностью реальной смеси.

Аналогично выводу (2.8) можно получить для коэффициента затухания k_2 формулу

$$k_2^2 = - \frac{a_{j0}^2}{c_{ph}^2} \omega_{ar}^{*2} z^2$$

Частотная зависимость $k_2(z)$ приведена в табл. 4, в которой вычислены значения как с учетом, так и без учета ($k_{2\mu}$) тепловых эффектов в водовоздушной смеси с $R_0 = 5,5 \cdot 10^{-5}$ м при $P_0 = 0,1$ МПа, $\beta_0 = 2 \cdot 10^{-4}$, $a_{j0} = 731$ м/с. Учет межфазного теплообмена существенно увеличивает величину линейного



декремента затухания по длине. В диапазоне частот $60 \text{ кГц} \leq f < 126 \text{ кГц}$ (в случае пренебрежения всеми диссипативными эффектами — диапазон «непрозрачности») аномально большие значения $k_{2\mu}$ указывают на несовершенство классической теории, которое устраняется посредством учета тепловых эффектов.

Рассмотрим режим, в котором величины скоростей a_{e0} и a_{r0} близки одна другой. Примем, что характерная для этого режима скорость звука a_0 не совпадает ни с изотермической a_{e0} , ни с адиабатической a_{r0} скоростями

$$a_0 - a_{e0} = \varepsilon a_0 \sigma_e, \quad a_{r0} - a_0 = \varepsilon a_0 \sigma_r \quad (2.9)$$

Здесь величины σ_e и σ_r — постоянные порядка единицы, связанные между собой согласно определению (1.13)

$$\sigma_e + \sigma_r = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{\gamma P_0}, \quad \frac{a_{r0}^2 - a_0^2}{a_0^2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0} \quad (2.10)$$

Так как все члены первого соотношения из (2.10) должны быть величинами одного порядка, имеем $(\gamma - 1) \sim \varepsilon$.

Аналогичное требование к членам уравнения (1.12) приводит к оценкам $T' \sim \varepsilon$, $Nu/Pe \sim 1$.

Для получения эволюционного уравнения необходимо в уравнении (2.1) перейти посредством формул (2.9) от скоростей a_{e0} , a_{r0} к a_0 и затем с помощью (2.10) заменить σ_r на σ_e . Далее, учитывая оценку (2.11), удержим главные члены и затем положим $\omega = -a_0 k$.

Из получаемого дисперсионного уравнения после учета второго соотношения из (2.10) можно восстановить дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + a_0 (1 - \varepsilon \sigma_e) \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2} [\delta^* + \delta_r^* - (v^* + v_r^*) a_0^2] \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \\ + \frac{a_0^3}{2\omega_{\nu}^{*2}} \left(1 - \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2}\right) \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} = a_0 v_r^* \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + a_0 (1 - \varepsilon \sigma_e) \frac{\partial P}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\delta^* - v^* a_0^2) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{a_0^3}{2\omega_{\nu}^{*2}} \left(1 - \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2}\right) \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right] \end{aligned}$$

Полученное уравнение, описывающее распространение волны давления вдоль

f , кГц	k_2 , 1/м	$k_{2\mu}$, 1/м	f , кГц	k_2 , 1/м	$k_{2\mu}$, 1/м
7,5	0,4	0,03	105	311	330
15	2,4	0,05	120	198	186
30	12,4	0,31	126	172	18
45	45,1	2,59	150	123	1,22
53	235	5,51	165	107	0,41
60	900	5368	180	95	0,32
68	704	1051	195	84	0,23
75	544	737	240	82	0,11

отрицательного направления оси x , асимптотически переходит в уравнения (2.5) и (2.7). Действительно, пусть $a_0 = a_{e0}$ ($\sigma_e \equiv 0$) и $Re/Nu \sim \varepsilon$. Тогда, оставляя главные члены, т. е. полностью левую часть уравнения и третье слагаемое из его правой части, приходим к уравнению (2.5). Если же $a_0 = a_{r0}$ ($\sigma_r \equiv 0$), $Re/Nu \sim 1/\varepsilon$ и величина $(\gamma - 1)$ конечная, то после предварительной замены постоянной σ_e на σ_r и последующего удержания главных членов уравнения приходим к уравнению (2.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа//Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 6. С. 30—41.
2. Нигматулин Р. И., Ивандаев А. И., Нигматулин Б. И., Милащенко В. И. Нестационарные волновые процессы в газо- и парожидкостных смесях//Нелинейн. волнов. процессы в двухфазн. средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977. С. 80—90.
3. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры//ПМТФ. 1978. № 2. С. 78—86.
4. Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрайбер И. Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа//Нелинейн. волнов. процессы в двухфазн. средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977. С. 32—44.
5. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрайбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983. 237 с.
6. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 359 с.
7. Devin Ch. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water//J. Acoust. Soc. Amer. 1959. V. 31. № 12. P. 1654—1667.
8. Чэпмен, Плессет. Тепловые эффекты при свободном колебании газовых пузырьков//Теор. основы инж. расчетов. 1971. Т. 93. № 3. С. 37—40.
9. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 80—87.
10. Оганян Г. Г. Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред//Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 3. С. 25—36.
11. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн//ПМТФ. 1960. № 1. С. 63—74.
12. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
13. Wejnsgaarden L., van. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles//Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 369—396. (Рус. перев.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975. С. 68—103.)
14. Оганян Г. Г. О свободных малых колебаниях газового пузырька в несжимаемой жидкости//Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т. 44. № 1. С. 41—47.
15. Fox F. E., Curley S. R., Larson G. S. Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles//J. Acoust. Soc. Amer. 1955. V. 27. № 3. P. 534—539.