

УДК 532.517.4.013.4:536.25

© 1994 г. Ю. А. БЕРЕЗИН, В. М. ТРОФИМОВ

## О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ С ВРАЩЕНИЕМ

Получены уравнения тепловой конвекции во вращающемся плоском горизонтальном слое неравновесно-турбулентной жидкости, проведена линеаризация системы уравнений и поставлена краевая задача. Найденные некоторые общие свойства спектра возмущений и получено решение, включающее в качестве предельного случая классическое решение в отсутствие турбулентности.

В настоящее время интенсивно исследуются процессы эволюции течения в турбулентной среде с нарушением симметрии, совместимым с теорией локальной структуры турбулентности [1], вызванным полем векторов сил аксиальной природы (см., например, [2—4]). Вследствие передачи энергии турбулентности вниз по каскаду и диссипации в тепло турбулентная система является открытой неравновесной системой. Открытой она является также и сверху: энергия турбулентным вихрям передается от потока. Последний процесс неравновесный и на феноменологическом уровне описания может быть представлен как взаимодействие между моментами импульсов турбулентных «молей» и любым внешним силовым полем аксиальной природы, в частности полем угловой скорости потока, имеющимся в сдвиговых слоях [5, 6].

1. Описание неравновесной турбулентности. На основе гидродинамики жидкости с внутренним вращением в [5, 6] получена система осредненных уравнений турбулентной жидкости, замкнутая для крупномасштабной части турбулентности. Согласно этим представлениям, момент импульса турбулентных молей  $M$  является независимой термодинамической переменной, а внутренняя энергия единицы объема среды равна

$$E = E_0(S, \rho) + 1/2\lambda^{-2}M^2 - M\Omega \quad (1.1)$$

где  $S$  и  $\rho$  — энтропия и плотность,  $\lambda$  — масштаб турбулентных молей,  $\Omega = 1/2[\nabla u]$  — угловая скорость видимого движения. Равновесное значение  $M$  определяется из условия  $\partial E/\partial M = 0$ , что в силу (1.1) дает  $M = \lambda^2\Omega$ . Тогда для внутренней энергии имеем

$$E = E_0(S, \rho) - 1/2\lambda^{-2}M^2 \quad (1.2)$$

В этом частном случае равновесия по  $M$  можно указать на простую трактовку выражения (1.2) законами классической термодинамики. Так, невозможность превращения энергии молекулярного движения (тепловой) в энергию турбулентных молей (механическую) без выполнения дополнительных условий (создания сдвигового течения) следует из второго начала термодинамики. Обратный переход энергии допускается вне всяких условий согласно тому же закону. Верхняя граница энергии турбулентного движения в некотором объеме определяется третьим началом (теорема Нернста). Действительно, поскольку абсолютный нуль температуры недостижим, правая часть в (1.2) всегда несколько больше нуля. Это означает, что энергия турбулентности в некотором объеме не может превысить суммарную энергию молекулярного движения в этом же объеме.

Физические процессы, происходящие в открытой неравновесной системе (какой является и неравновесная турбулентность), описываются в рамках феноменологии нелинейной термодинамики [7]. Они приводят, в частности, к изменению типа симметрии среды, а значит, и к изменению числа и вида уравнений сохранения. Действительно, накопленные за последние годы знания о колмогоровской турбулентности показывают, что однородность и изотропность мелкомасштабной компоненты могут не восстанавливаться, наряду с прямым каскадом перекачки в малом масштабе возможен и обратный. Последнее, в частности, возможно для развитой турбулентной конвекции [2]. В связи с этим аналогия между тензорами напряжений в вязкой жидкости и турбулентной среде  $\sigma_{ij} = -A\delta_{ij} + B\pi_{ij}$  в ряде случаев может быть не точна. Здесь скаляры  $A$ ,  $B$  — соответственно давление и «вихревая» вязкость (аналог молекулярной вязкости);  $\pi_{ij}$  — симметричный тензор скоростей деформаций среднего поля скорости.

В реальных турбулентных течениях (например, пограничный слой, след, струя) велика роль крупномасштабной турбулентности, находящейся под воздействием градиентов давления, вызванных внешними силами. Следовательно, турбулентные образования — моли, имеющие конечные размеры, находятся в поле ротора средней скорости, т. е. в поле, обладающем псевдовекторными свойствами. Это означает, что собственные моменты импульсов турбулентных молей взаимодействуют с полем угловой скорости среднего течения в процессе обмена моментами импульсов. Такому механизму взаимодействия отвечает новый диссипативный процесс и соответственно новое слагаемое в выражении для тензора напряжений [5, 6]

$$\sigma_{ij} = -A\delta_{ij} + B\pi_{ij} + C(\lambda^{-2}M_{ij} - \Omega_{ij}) \quad (1.3)$$

Здесь  $M_{ij}$  и  $\Omega_{ij}$  — антисимметричные тензоры, дуальные псевдовекторам моментов импульсов турбулентных молей  $M_i = 1/2\varepsilon_{ijr}M_{ij}$  и угловой скорости среднего течения  $\Omega_i = (1/2)\varepsilon_{ijr}\Omega_{ij}$ , скаляр  $C$  — вращательная вязкость,  $\lambda$  — осредненный турбулентный масштаб (ниже будем обозначать  $\lambda^{-2} \equiv \kappa$ ); величина  $\kappa$  характеризует эффективный момент инерции турбулентных молей.

Перейдем в (1.3) от тензоров  $M_{ij}$  и  $\Omega_{ij}$  к псевдовекторам  $M_i$  и  $\Omega_i$ . Воспользуемся для этого формулой преобразования абсолютно антисимметричных тензоров при переходе к другой координатной системе  $y_i$  [8]

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\circ} = \frac{\Delta}{|\Delta|} \varepsilon_{ijl} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial y_{\beta}}{\partial x_j} \frac{\partial y_{\gamma}}{\partial x_l} \quad (1.4)$$

Перемножая левые и правые части выражения (1.4) соответственно с правыми и левыми частями выражений для  $M_i$  и  $\Omega_i$ , получим

$$\frac{\Delta}{|\Delta|} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial y_{\beta}}{\partial x_j} \frac{\partial y_{\gamma}}{\partial x_l} \varepsilon_{ijl} M_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijr} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\circ} M_{ij} \quad (1.5)$$

$$\frac{\Delta}{|\Delta|} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial y_{\beta}}{\partial x_j} \frac{\partial y_{\gamma}}{\partial x_l} \varepsilon_{ijl} \Omega_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijr} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\circ} \Omega_{ij}$$

Потребуем теперь, чтобы новая координатная система была такой, что  $\varepsilon_{ijr} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\circ} = 1$  (для  $i \neq j \neq l$ ,  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ). Поскольку  $\Delta/|\Delta|$  является знаком, введем обозначение

$$\frac{\Delta}{|\Delta|} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial y_{\beta}}{\partial x_j} \frac{\partial y_{\gamma}}{\partial x_l} 2C = d \quad (1.6)$$

где  $d$  есть некоторая псевдоскалярная функция. Тогда для тензора напряжений после подстановки (1.5), (1.6) в (1.3) получим

$$\sigma_{ij} = -A\delta_{ij} + B\pi_{ij} + d(\kappa M_i - \Omega_j) \varepsilon_{ij} \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) совпадает с пространственной частью коррелятора случайных полей скорости [9], записанного в предположении стационарной, однородной, изотропной, но отражательно неинвариантной (гиротропной) турбулентности.

В частном случае равновесия между моментами импульсов молей и угловыми скоростями среднего поля скорости  $\kappa M = \Omega$  турбулентные моли теряют свою индивидуальность, становясь неразличимыми, а тензор напряжений (1.7) вырождается в  $\sigma_{ij} = -A\delta_{ij} + B\pi_{ij}$ . Следствием этого равновесия является логарифмический закон изменения средней скорости у твердых поверхностей (закон стенки) [5, 6]. Область течения, в которой справедлив этот закон, обычно составляет не более 20% от толщины пограничного слоя при обтекании плоской пластины [10]. Для описания опытных данных в оставшейся части пограничного слоя Коулсом [10] была предложена добавочная несимметричная функция (функция «следа»).

Концепция неравновесной турбулентности указывает на физические причины появления такого рода несимметричных функций в различных типах сдвиговых течений. Именно вследствие псевдовекторной природы полей моментов импульсов турбулентных молей и угловой скорости среднего течения потеря равновесия между ними порождает несимметричную часть тензора напряжений (1.7).

Уравнения неравновесной в указанном выше смысле турбулентной несжимаемой жидкости для осредненных по времени величин в отсутствие внешних массовых сил имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p + \frac{1}{2} \langle M_j \rangle [\nabla \langle u \rangle]_j - \kappa \langle M_j \rangle \langle M_j \rangle \right) + \\ & + \left( \nu + \frac{\gamma}{4} \right) \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\kappa \gamma}{2} [\nabla \langle M \rangle]_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\langle u_i' u_j' \rangle) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \langle M_j \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle M_j \rangle}{\partial x_j} = \gamma \left( \frac{1}{2} [\nabla \langle u \rangle]_j - \kappa \langle M_j \rangle \right) + \eta \Delta \langle M_j \rangle \quad (1.9)$$

Учет конечной величины размеров турбулентных молей (масштаб  $\lambda$ ) и взаимодействия их моментов импульсов  $M$  с ротором среднего поля скорости приводит к появлению двух новых, имеющих физическое содержание коэффициентов (вращательной вязкости  $\gamma$  и диффузии  $\eta$ ), перенормировке давления и появлению нового уравнения для изменения момента импульсов турбулентных молей. В случае равновесия  $1/2 [\nabla \langle u \rangle] = \kappa \langle M \rangle$  уравнения (1.8) немедленно переходят в уравнения Рейнольдса, учет турбулентных пульсаций в которых, как известно, ведет к перенормировке коэффициента вязкости  $\nu$ .

**2. Уравнения тепловой конвекции.** Рассмотрим жидкость в плоском подогреваемом снизу горизонтальном слое, равномерно вращающуюся вокруг вертикальной оси с однородной угловой скоростью  $\Omega = \Omega e$  ( $e$  — единичный вектор по вертикали). Если уравнение движения записать во вращающейся системе отсчета, то в правой части его появятся силы инерции кориолисова и центробежная. Будем далее рассматривать случай  $\Omega^2 l \ll g$  (где  $l$  — горизонтальный масштаб,  $g$  — ускорение свободного падения), когда центробежной конвективной силой можно пренебречь.

Пусть в этой среде возбуждена статистически однородная и стационарная турбулентность с характерным пространственным масштабом  $\lambda$ , характерным временем  $\tau = \kappa \gamma^{-1}$  и неравновесностью в смысле, указанном выше. Зададим на этом турбулентном фоне крупномасштабное (с масштабом  $L \gg \lambda$ ) возмущение скорости или температуры и исследуем возможность его усиления за счет взаимодействия с турбулентным полем. Используя уравнение состояния среды  $\rho = \rho_0 (1 - \beta T)$ , приближение Буссинеска  $\beta T \ll 1$  и представление температуры

в виде  $T = T_0 - Aeg + \theta$  (где  $A$  — равновесный градиент температуры), для средних значений скорости  $\langle u \rangle$  и температуры  $\langle \theta \rangle$  получим

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle (u) \nabla \rangle \langle u \rangle = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \left( \nu + \frac{\gamma}{4} \right) \Delta \langle u \rangle + \beta g e \langle \theta \rangle - 2 [\Omega \langle u \rangle] + \frac{\kappa \gamma}{2} [\nabla \langle M \rangle] \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} + \langle (u) \nabla \rangle \langle M \rangle = \gamma (\Omega - \kappa \langle M \rangle + \eta \Delta \langle M \rangle) + \langle m \rangle \quad (2.2)$$

$$\frac{D \langle T \rangle}{Dt} + \nabla \langle q \rangle = 0, \quad q = \chi \nabla T + \langle u' \theta' \rangle \quad (2.3)$$

$$\nabla \langle u \rangle = 0, \quad e = (0, 0, 1) \quad (2.4)$$

Здесь давление и коэффициент сдвиговой вязкости перенормированы

$$\left( p + \frac{1}{2} \langle M \rangle [\nabla \langle u \rangle] - \kappa \langle M \rangle \langle M \rangle \right) \rightarrow p, \quad (\nu + \nu_s) \rightarrow \nu$$

Последнее слагаемое в правой части (2.2) обусловлено осредненным моментом  $\rho \langle m \rangle$  пульсации силы тяжести  $\rho'g$ . Следуя определению момента силы, имеющей плечо  $R$ , мгновенное значение которого порядка размера турбулентного моля, можно записать  $\rho \langle m \rangle = [g \langle \rho'R \rangle]$ , где  $|R| \sim \lambda$ . Согласно принятому уравнению состояния среды, пульсацию плотности представим в виде  $\rho' = -\rho_0 \beta \theta'$  ( $\beta > 0$ ). Исключая из этих соотношений  $\rho'$ , получаем

$$\rho \langle m \rangle = -\rho \beta [g \langle \theta'R \rangle] \quad (2.5)$$

В линейной постановке задачи можно полагать, что величина  $[e \langle \theta'R \rangle]$  линейно связана с моментом импульсов турбулентных молей  $\langle M \rangle$ . Поэтому перепишем (2.5) в виде

$$\rho \langle m \rangle = \rho \beta g k_0 \langle M \rangle \quad (2.6)$$

где  $k_0$  — постоянная феноменологическая характеристика свойств среды.

Величина плотности теплового потока на единицу теплоемкости  $q$  в уравнении сохранения энергии (2.3) состоит из двух частей, обусловленных молекулярным и турбулентным теплопереносом соответственно (здесь  $\chi$  — коэффициент температуропроводности среды). Умножив обе части равенства  $M = [u'R]$  слева векторно на  $R$ , получим  $[RM] = u'R^2$ . Отметим, что  $\langle R^2 \rangle = \lambda^2 = \kappa^{-2}$ . Представив момент импульсов моля в виде суммы  $M = \langle M \rangle + M'$  и используя полученные выше соотношения для турбулентной составляющей теплового потока, имеем

$$\langle u' \theta' \rangle = \kappa \langle [R (\langle M \rangle + M')] \theta' \rangle = \kappa \langle [R \langle M \rangle] \theta' \rangle + \kappa \langle [RM'] \theta' \rangle \quad (2.7)$$

Опуская в правой части (2.7) второй член как нелинейный и полагая первый член линейным относительно градиента температуры, получим

$$q = \chi \nabla T + \chi_1 \nabla \theta \quad (2.8)$$

где  $\chi_1$  — феноменологическая характеристика свойств среды.

Возвратимся теперь к системе уравнений (2.1)—(2.4). Подставив в нее полученные соотношения (2.6) и (2.8), а также сделав обычное для теории устойчивости конвективных течений допущение о том, что амплитуда крупномасштабных возмущений мала, получим

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \left( \nu + \frac{\gamma}{4} \right) \Delta \langle u \rangle + \beta g e \langle \theta \rangle - 2 [\Omega \langle u \rangle] + \frac{\kappa \gamma}{2} [\nabla \langle M \rangle] \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} = \gamma \left( \frac{1}{2} [\nabla \langle u \rangle] - \kappa \langle M \rangle \right) + \eta \Delta \langle M \rangle - \beta g k_0 \langle M \rangle \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial t} = A \langle e \langle u \rangle \rangle + \chi \Delta \langle \theta \rangle, \quad \nabla \langle u \rangle = 0 \quad (2.11)$$

Здесь коэффициент температуропроводности переобозначен:  $\chi + \chi_1 \rightarrow \chi$

Предполагая, что  $\nu \sim \eta \sim \lambda \sim \lambda u'$ , сделаем следующие допущения:  $\eta/\nu = \chi/\nu = 1$ , и введем обозначение  $\gamma = \nu/\nu$  (безразмерный параметр).

Перепишем систему (2.9)—(2.11) в безразмерном виде. Для этого введем масштабы: равную толщине слоя длину  $L$ , время  $t_0 = L^2/\nu$ , скорость  $u_0 = \nu/L$ , температуру  $T_0 = AL$ , давление  $p_0 = \rho_0 \nu^2/L^2$ , угловую скорость  $\Omega_0 = 2L^2/\nu$ , момент импульса  $M_0 = 2\nu\kappa^{-1}/L^2$ . Полагаем, что  $k_0 = AL^2/\nu$ . Число Рэлея  $Ra = g\beta AL^4/\nu^2$ .

В результате имеем

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} = -\nabla p + \left(1 + \frac{\gamma}{4}\right) \Delta \langle u \rangle + Ra \langle \theta \rangle e - \Omega [e \langle u \rangle] + \gamma [\nabla \langle M \rangle] \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} = \gamma \kappa \left( \frac{1}{4} [\nabla \langle u \rangle] - \langle M \rangle \right) + \Delta \langle M \rangle + Ra \langle M \rangle \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial t} = \langle u \rangle e + \Delta \langle \theta \rangle, \quad \nabla \langle u \rangle = 0 \quad (2.14)$$

Если рассматриваемый слой жидкости окружен теплопроводным массивом, то к этой системе нужно добавить уравнение для возмущения температуры массива

$$\frac{\nu}{\chi_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial t} = \Delta \theta_m \quad (2.15)$$

Здесь  $\chi_m$  — коэффициент температуропроводности массива. На границе жидкости и массива должны выполняться обычные условия исчезновения скорости и непрерывности температуры и теплового потока. В случае гладких границ (отсутствует шероховатость) момент импульса турбулентных молей также исчезает. Кроме того, необходимо потребовать затухание возмущений температуры в массиве вдали от слоя жидкости.

Выбранные для конкретной формы области граничные условия вместе с уравнениями (2.12)—(2.15) приводят к краевой задаче о собственных значениях. Применяя метод работы [11], определим некоторые общие свойства спектра, не зависящие от формы области. Будем для простоты иметь в виду случай однородных граничных условий. Следуя [11], будем рассматривать наряду с решением  $(\omega, u, M, \theta, p)$  комплексно-сопряженное  $(\omega^*, u^*, M^*, \theta^*, p^*)$ .

После преобразований получаем выражения, позволяющие сделать определенные заключения соответственно о мнимой и вещественной части инкремента

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \omega &= \omega^* - \omega = \frac{1}{A_+} \left[ -\frac{\Omega \kappa}{2} \int [u^* u] e dV + \frac{\gamma \kappa}{4} \int (M^* [\nabla u] - M [\nabla u]^* + \right. \\ &+ u^* [\nabla M] - u [\nabla M^*]) dV \left. \right] = \frac{i}{A_+} \left[ \kappa \Omega \int [\operatorname{Im} u \operatorname{Re} u] e dV + \right. \\ &+ \frac{\gamma \kappa}{2} \int (\operatorname{Re} u [\nabla (\operatorname{Im} M)] - \operatorname{Im} M [\nabla (\operatorname{Re} u)] - \operatorname{Im} u [\nabla (\operatorname{Re} M)] + \\ &+ \operatorname{Re} M [\nabla (\operatorname{Im} u)] dV \left. \right] \quad (2.16) \\ 2 \operatorname{Re} \omega &= \omega^* + \omega = \frac{1}{A_-} \left[ 2\kappa \gamma \int |M|^2 dV + \frac{\kappa}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{4}\right) \int |[\nabla u]|^2 dV - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\kappa\gamma}{4} \int (u^* [\nabla M] + u [\nabla M^*] + M^* [\nabla u] + M [\nabla u^*]) dV + 2 \int |[\nabla M]|^2 dV - \\
& - 2 Ra \int |M|^2 dV - \frac{\kappa}{2} Ra \int |[\nabla \theta]|^2 dV \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$A_{\pm} = \int |M|^2 dV + \frac{\kappa}{4} \int (|u|^2 \pm Ra |\theta|^2) dV$$

Пусть жидкость подогревается снизу. В этом случае число Рэлея  $Ra$  положительно, так как равновесный градиент температуры  $A > 0$ . При этом знаменатель выражения (2.16) существенно положителен, а сумма членов в фигурных скобках в числителе есть действительное число, в общем случае отличное от нуля. Это отличие от нуля сохранится и в случае отсутствия вращения  $\Omega = 0$ . Таким образом, при подогреве снизу турбулентной жидкости инкременты нормальных возмущений (в общем случае) комплексны и, следовательно, нормальные возмущения затухают или нарастают со временем, осциллируя. В то же время в отсутствие турбулентности (и вращения), как известно [11], все нормальные возмущения при  $A > 0$  изменяются монотонно. Турбулентность, таким образом, ведет к отмене принципа монотонности возмущений. Вращение в отсутствие турбулентности также приводит к осцилляциям при  $A > 0$  согласно расчетам и экспериментам для плоского слоя [11] и для произвольной области.

Рассмотрим теперь случай подогрева сверху ( $A < 0$  и  $Ra < 0$ ). В формуле (2.17) все интегралы, содержащие множителем число Рэлея, при  $Ra < 0$  положительны. Сумма оставшихся интегралов также положительна согласно проведенным оценкам, и поэтому  $Re \omega > 0$ . Таким образом, в случае умеренной неравновесности турбулентности все нормальные возмущения при подогреве сверху затухают и равновесие на макромасштабах устойчиво.

3. Устойчивость вращающейся турбулентной жидкости. Из уравнений (2.12)–(2.14) можно исключить давление  $p$  и горизонтальные компоненты скорости  $\langle u_1 \rangle$  и  $\langle u_2 \rangle$ , ротора скорости  $[\nabla \langle u \rangle]_1$ ,  $[\nabla \langle u \rangle]_2$ , момента импульсов турбулентных молей  $\langle M_1 \rangle$  и  $\langle M_2 \rangle$ , ротора момента импульсов  $[\nabla \langle M \rangle]_1$  и  $[\nabla \langle M \rangle]_2$ . В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Delta u_3 &= \left(1 + \frac{\gamma}{4}\right) \Delta \Delta u_3 + Ra \Delta_1 \theta - \Omega \frac{\partial F_3}{\partial x_3} + \gamma \Delta G_3 \\
\frac{\partial F_3}{\partial t} &= \left(1 + \frac{\gamma}{4}\right) \Delta F_3 + \Omega \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \gamma \Delta M_3 \\
\frac{\partial}{\partial t} \Delta M_3 &= \frac{1}{4} \kappa \gamma \Delta F_3 - \kappa \gamma \Delta M_3 + \Delta \Delta M_3 + Ra \Delta M_3 \\
\frac{\partial G_3}{\partial t} &= -\frac{1}{4} \kappa \gamma \Delta u_3 - \kappa \gamma G_3 + \Delta G_3 + Ra G_3 \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta \theta + u_3, \quad \nabla u = 0, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (3.1)
\end{aligned}$$

$$F_3 = [\nabla u]_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = i(k_1 u_2 - k_2 u_1) \quad (3.2)$$

Здесь скобки осреднения величин опущены;  $G_3 = [\nabla M]_3$ .

Сформулируем граничные условия. Будем считать, что границы слоя свободные, т. е. на них исчезают касательные напряжения. Считаем также, что границы плоские: возникающие конвективные возмущения не приводят к их искривлениям. Возмущения температуры, как указывалось выше, исчезают на границах. В

таким случае у границ слоя справедливо условие равновесия на уровне турбулентных масштабов  $1/4 [\nabla \langle u \rangle] = \langle M \rangle$ , поскольку причины его нарушения отсутствуют. При этом в компонентах тензора касательных напряжений исчезает антисимметричная часть, обусловленная неравновесной турбулентностью, т. е., как и в классическом случае, получаем

$$u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0, \quad \theta = 0 \quad (x_3 = 0 \text{ и } x_3 = 1) \quad (3.3)$$

Пользуясь граничными условиями для скорости, найдем

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0 \quad (x_3 = 0; 1) \quad (3.4)$$

На свободной границе, где  $\partial u_1 / \partial x_3 = \partial u_2 / \partial x_3 = 0$ , в силу (3.2)  $F_3' = 0$ .

Так как на границах  $\langle M \rangle = 1/4 [\nabla \langle u \rangle]$ , то последнее равенство означает, что

$$M_3' = 0 \quad (x_3 = 0; 1) \quad (3.5)$$

Собственные функции краевой задачи (3.1), (3—3)—(3.5) имеют вид простых гармоник

$$u = a \sin n\pi x_3, \quad \theta = b \sin n\pi x_3, \quad F = c \cos n\pi x_3$$

$$G = d \sin n\pi x_3, \quad M = f \cos n\pi x_3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Дисперсионное соотношение для основной моды ( $n = 1$ )

$$0 = -(\omega - K^2) K^2 + \frac{K^2 B}{\omega - K^2 + Ra - \kappa\gamma} + \frac{k^2 Ra}{\omega - K^2} -$$

$$- \frac{(\Omega\pi)^2 (D - (\omega - K^2) K^2)}{(\omega - K^2) (D - (\omega - K^2) K^2) + BK^2}$$

$$B = \frac{1}{4} \kappa\gamma K^2, \quad D = \kappa\gamma K^2 - K^2 Ra, \quad K^2 = k_1^2 + k_2^2 + \pi^2, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

есть уравнение пятой степени относительно  $\omega$ . Чтобы найти нейтральную кривую, определяющую критические числа Рэлея в зависимости от волнового числа  $k$ , примем  $\omega = 0$  и получим уравнение третьей степени относительно числа Ра

$$Ra^3 + r Ra^2 + s Ra + t = 0 \quad (3.6)$$

$$r = -\frac{1}{k^2 \delta} (\delta^2 K^6 + k^2 (2\delta K^2 + \kappa\gamma (\delta + 1)) + (\Omega\pi)^2)$$

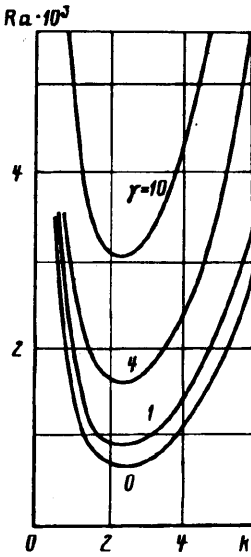
$$s = \frac{1}{k^2 \delta} (K^6 \delta (2\delta K^2 + \kappa\gamma (\delta + 1)) + k^2 (\kappa\gamma + K^2) (\kappa\gamma + \delta K^2) -$$

$$- \frac{1}{4} \kappa\gamma K^6 \delta + 2 (\kappa\gamma + K^2) (\Omega\pi)^2)$$

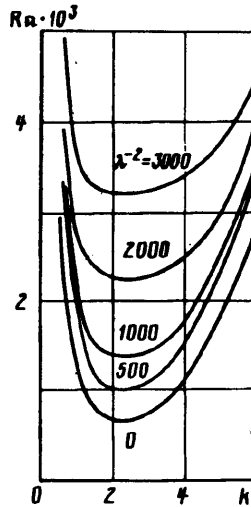
$$t = -\frac{1}{k^2 \delta} (K^6 (\kappa\gamma + \delta K^2) (\delta (\kappa\gamma + K^2) - \frac{1}{4} \kappa\gamma) + (\Omega\pi)^2 (\kappa\gamma + K^2)^2)$$

$$\delta = 1 + \frac{\gamma}{4}$$

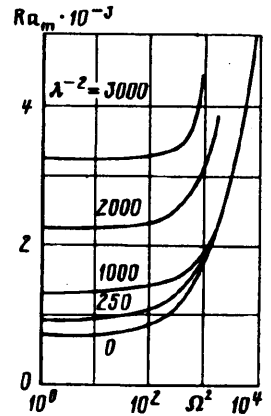
Решение уравнения (3.6) содержит три ветви  $Ra(k)$ , соответствующие трем его корням. Чтобы определить ветвь, имеющую физический смысл нейтральной кривой, рассмотрим предельный случай. Пусть  $\kappa \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$ . Тогда уравнение (3.6) разложится на множители



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\left( Ra - \frac{K^6 + (\Omega\pi)^2}{k^2} \right) (Ra - K^2)^2 = 0 \quad (3.7)$$

Первый корень, как видно, соответствует нейтральной кривой для классического случая конвекции в горизонтальном слое вращающейся жидкости в отсутствие турбулентности. Другие два образуют корень, кратный двум. Покажем, что этот корень соответствует ветви, имеющей смысл нейтральной кривой на уровне внутренних масштабов турбулентности и отвечающей условию равновесия.

Действительно, в случае равновесия на уровне турбулентных масштабов к системе уравнений (3.1) добавится уравнение  $1/4 F_3 = M_3$ , с помощью которого из уравнений (3.1) получаем

$$0 = -(\omega - K^2) K^2 - \chi\gamma K^2 + \chi\gamma K^2 - K^2 Ra$$

При  $\omega = 0$  имеем  $Ra = K^2$ . Отсюда видно, что для длинноволновой части равновесие на уровне турбулентных масштабов отсутствует уже при  $Ra > \pi^2$ , так что в практически интересной области значений чисел Рэлея турбулентность неравновесная.

Анализ рассмотренного предельного случая дисперсионного уравнения показывает, что макроравновесие определяется выделенной из решений уравнения (3.6) той ветвью  $Ra(k)$ , которая асимптотически связана с первым из корней уравнения (3.7). Отвечающие этой ветви нейтральные кривые, полученные при вариациях параметров задачи  $\gamma$  и  $\chi$ , представлены соответственно на фиг. 1 и 2. Параметр вращения слоя жидкости здесь принят равным нулю ( $\Omega = 0$ ). Нижние кривые на этих графиках соответствуют асимптотическому случаю  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\chi \rightarrow 0$  и совпадают с нейтральной кривой в классическом примере конвекции в плоском горизонтальном слое в отсутствие турбулентности [11].

Из поведения кривых при  $\gamma \neq 0$  и  $\chi \neq 0$  видно, что в неравновесно-турбулентной жидкости устойчивость по отношению к длинноволновым возмущениям повышается при условии равновесия турбулентности на границах области. Этот вывод может быть интерпретирован следующим образом. В турбулентной среде с развитой мелкомасштабной турбулентностью имеется возможность отводить часть поступающей извне тепловой энергии, являющейся источником жизнеспособности длинноволновых возмущений, на внутренние степени свободы, обусловленные



моментами импульсов турбулентных молей. Темп роста длинноволновых возмущений, ведущих к потере макроравновесия, замедляется вследствие сохранения полной энергии в системе при том же темпе подогрева на границах и соответствующем значении числа Рэлея.

Отметим быстрое уменьшение размеров области неустойчивости (фиг. 1) (ее сужение) с ростом параметра  $\gamma$  — отношения вращательной вязкости к эффективной сдвиговой вязкости. Примечательно также, что с увеличением развитости турбулентности (рост параметра  $\kappa$ , а следовательно, уменьшение масштаба турбулентности  $\lambda$ ) область неустойчивости сокращается, а минимум нейтральной кривой становится менее выраженным (фиг. 2), т. е. происходит своего рода «рассеяние» критического числа Рэлея по волновым числам.

На фиг. 3 представлены расчетные кривые зависимости минимального (критического) числа  $Ra_m$  от квадрата безразмерного параметра вращения слоя жидкости (пропорционального числу Тейлора) при вариации параметра  $\kappa$  ( $\gamma = 1$ ). Нижняя кривая совпадает с классической зависимостью минимального числа Рэлея для конвекции во вращающемся плоском горизонтальном слое жидкости в отсутствие турбулентности [11]. При  $\Omega^2 < 10^2$  зависимость  $Ra_m$  от параметра вращения довольно слабая, а значение минимального числа Рэлея равномерно повышается с увеличением развитости турбулентности (рост параметра  $\kappa$ ), как уже отмечалось выше. При  $\Omega^2 > 10^2$  все кривые асимптотически стремятся к классическому случаю отсутствия турбулентности. Такое поведение расчетных данных объясняется постепенным с увеличением  $\Omega^2$  нарастанием доминирующего влияния энергии вращения слоя жидкости как целого по сравнению с суммарной энергией вращения турбулентных молей.

Таким образом, оба процесса — вращение слоя как целого и собственное вращение турбулентных молей — оказывают стабилизирующее влияние на развитие неустойчивости, замедляя начало тепловой конвекции. Причем при малых и умеренных значениях  $\Omega^2$  доминирует второй процесс.

Представляет интерес также случай отсутствия равновесия турбулентности на одной из границ как более часто реализующаяся на практике ситуация, например, при анализе атмосферных процессов. Такая задача требует особого рассмотрения.

Часть исследований была поддержана Фондом Сороса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
2. Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В. Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью//ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 2. С. 144—153.
3. Березин Ю. А., Жуков В. П. Конвективная неустойчивость в среде со спиральной турбулентностью//ПМТФ. 1990. № 1. С. 62—66.
4. Березин Ю. А., Жуков В. П. О влиянии вращения на возникновение крупномасштабных структур в турбулентной среде: Препринт № 17. Новосибирск: ИПТМ СО АН СССР, 1988. 31 с.
5. Трофимов В. М. Гидродинамика турбулентности, включающей крупномасштабную ее часть: Препринт № 13. Новосибирск: ИПТМ СО АН СССР, 1991. 36 с.
6. Трофимов В. М. К феноменологической вихревой модели турбулентности//Моделирование в механике. Новосибирск. 1992. Т. 6 (23). № 2. С. 137—150.
7. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
9. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В. и др. Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности//ЖЭТФ. 1983. Т. 85. № 6. С. 1979—1987.
10. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
11. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.