МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1994

УДК 532.517.4

© 1994 г. Э. В. ТЕОДОРОВИЧ

# К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЯХОТА — ОРЖЕГА

Показано, что численные результаты теории турбулентности Яхота — Оржега могут быть получены без использования процедуры $\varepsilon$-разложения. Утверждение о том, что при $\varepsilon = 0$ основную роль играют нелокальные взаимодействия, опровергается прямым расчетом относительных вкладов локальных и нелокальных взаимодействий в $\beta$-функцию, которая в рамках ренормгруппового описания определяет динамику системы. Тем самым дано обоснование того, что описание турбулентности в рамках ренормгруппового подхода не противоречит колмогоровской картине развитой турбулентности.

Основные закономерности реализующейся при больших числах Рейнольдса развитой турбулентности описываются феноменологической теорией Колмогорова, которая основывается на представлениях Ричардсона о каскадном механизме переноса энергии по спектру волновых чисел через последовательность взаимодействий мод близких масштабов [1]. Из теории Колмогорова следуют предсказания о значениях показателей степенного поведения различных статистических моментов и об универсальности некоторых числовых коэффициентов. Однако теоретическое вычисление универсальных констант турбулентности, а также нахождение поправок к степенным показателям, учитывающим флуктуации спектрального потока и связанные с ними эффекты перемежаемости, лежат вне рамок феноменологической теории, фактически использующей только предположения о существенных параметрах теории и соображения размерности.

В связи с этим возникает проблема описания турбулентности с помощью динамического подхода, основывающегося на анализе статистических решений уравнений гидродинамики (уравнений Навье — Стокса). Трудность динамического подхода заключается в том, что межмодовое взаимодействие является предельно сильным, поскольку эффективным параметром разложения в ряд теории возмущений оказывается число Рейнольдса. Вторая трудность связана с тем, что турбулизованная жидкость содержит очень большое число возбужденных мод различных масштабов и моды всех масштабов одинаково существенны при описании каскадных процессов переноса энергии по спектру масштабов (волновых чисел).

Способом описания многомодовой системы при отсутствии выделенного характерного масштаба является метод ренормализационной группы (ренормгруппы), впервые возникший в квантовой теории поля, а затем модифицированный и успешно примененный в теории критических явлений. Возможность описания турбулентности с помощью этого метода указана в работе [2], где продемонстрировано, каким образом развитые в теории критических явлений методы могут быть применены для исследования движения жидкости, возбуждаемого внешней случайной силой. В работах [2—4] установлены связь между показателями степенного поведения внешней силы и спектром энергии, которая фактически следует из соображений размерности, а также соотношение между числовыми коэффициентами. При этом авторы [4] обратили внимание на то, что это соотношение носит универсальный характер.

Однако для вычисления значений универсальных констант турбулентности (типа константы Колмогорова) требуется знать связь между амплитудой парной корреляционной функции внешней случайной силы $D_0$ и имеющей одинаковую с ней размерность величиной средней скорости диссипации энергии $\Xi$. Способ определения этой связи был предложен Яхотом и Оржегом [5], в результате чего появилась возможность теоретического вычисления без использования каких-либо подгоночных параметров значения константы Колмогорова и ряда других универсальных констант развитой турбулентности. Следует отметить, что для вычисления некоторых констант, например турбулентного числа Прандтля, не требуется знания коэффициента пропорциональности между $D_0$ и $\Xi$ и они могут быть вычислены с помощью метода ренормгруппы вне рамок теории Яхота — Оржега [6—8].

Несмотря на очевидный успех теории Яхота — Оржега при вычислении набора универсальных констант турбулентности, эта теория содержит целый ряд неясных моментов. В частности, оказалось, что при вычислении универсальных констант для определяющего показатель степенного поведения корреляционной функции внешних случайных сил так называемого кроссоверного параметра $\varepsilon$ (которому в теории Колмогорова соответствует значение $\varepsilon = 4$) следует в некоторых случаях принять $\varepsilon = 0$ для получения удовлетворительного согласия с имеющимися экспериментальными данными и результатами численного моделирования турбулентности, а в других случаях сохранить значение $\varepsilon = 4$.

Для обоснования возможности использования в одной и той же формуле двух разных значений $\varepsilon = 0$ и 4 авторы [5] сформулировали некоторую идеологию так называемого $\varepsilon$-разложения [5, 9], согласно которой имеет место взаимная компенсация влияния приближения $\varepsilon \to 0$ при вычислении числовых коэффициентов и приближения, связанного с пренебрежением межмодовыми взаимодействиями, локальными в пространстве волновых чисел. Единственным критерием справедливости этой весьма произвольной гипотезы фактически явилось только хорошее согласие результатов теоретического вычисления набора универсальных констант с экспериментальными данными. Этот успех теории привел к появлению целой серии работ по уточнению теории и использованию предложенной авторами процедуры $\varepsilon$-разложения для вычисления других характеристик турбулентности [10—13]. Отметим, что процедура $\varepsilon$-разложения Яхота — Оржега не тождественна сформулированному Вилсоном и Фишером [14] методу $\varepsilon$-разложения в теории критических явлений при фазовых переходах второго рода, используемому только для вычисления критических показателей; вопрос о вычислении числовых коэффициентов в теории критических явлений обычно не рассматривается.

Данная работа посвящена анализу ренормгрупповой теории турбулентности Яхота — Оржега и применяемой в этой теории процедуре $\varepsilon$-разложения. В разд. 1 приведен пример вычисления турбулентной вязкости и показано, что полученная авторами [5] зависимость коэффициента пропорциональности от параметра $\varepsilon$ является ошибочной. В разд. 2 в связи с вычислением константы Колмогорова обсуждается гипотеза Яхота — Оржега о малости локальных взаимодействий при $\varepsilon = 0$. Проблема локальных и нелокальных взаимодействий в теории турбулентности обсуждается в разд. 3. В разд. 4 на основе полевой формулировки рассматривается вопрос о том, какие взаимодействия фактически оказываются учтенными при ренормгрупповом подходе в сочетании с процедурой $\varepsilon$-разложения.

**1. Вычисление турбулентной вязкости в теории Яхота — Оржега.** Поскольку в основе нахождения спектра энергии и константы Колмогорова в теории Яхота — Оржега лежит вычисление турбулентной вязкости, воспроизведем способ нахождения этой величины.

Примем, что несжимаемая жидкость в инерционном интервале описывается уравнениями Навье — Стокса при наличии внешней случайной силы. После исключения давления с помощью условия несжимаемости и выполнения преобразований Фурье по пространственным и временным переменным запишем уравнение для Фурье-компонент скорости в виде

$$[-i\omega + \nu_0 k^2]\, v_i(K) + \frac{i\lambda_0}{2} P_{imn}(\mathbf{k}) \int \frac{dQ}{(2\pi)^{d+1}}\, v_m(Q)\, v_n(K-Q) = f_i(K) \tag{1.1}$$

$$K = (\mathbf{k}, \omega),\quad Q = (\mathbf{q}, \omega_q),\quad P_{imn}(\mathbf{k}) = k_n P_{im}(\mathbf{k}) + k_m P_{in}(\mathbf{k}),$$

$$P_{mn}(\mathbf{k}) = \delta_{mn} - k_m k_n / k^2$$

где $d$ — размерность пространства, параметр $\lambda_0$ введен для удобства при построении теории возмущений, в окончательном результате следует принять $\lambda_0 = 1$.

Парная корреляционная функция внешней случайной силы предполагается имеющей вид

$$\langle f_i(K)\, f_j(K')\rangle = 2D_0 P_{ij}(\mathbf{k})\, k^{-y} (2\pi)^{d+1} \delta(K + K')$$

$$y = d - 4 + \varepsilon \tag{1.2}$$

Отметим, что при $y = d$ $(\varepsilon = 4)$ константа $D_0$ имеет размерность скорости диссипации энергии $\Xi$, которая в теории Колмогорова является единственным существенным размерным параметром, определяющим свойства турбулизованной жидкости в инерционном интервале. Поэтому в дальнейшем примем, что реальной теории соответствует значение $\varepsilon = 4$.

Введем далее обрезание в пространстве волновых чисел в соответствии с условием $k < \Lambda_0$. Предположим также, что влияние отбрасываемых при этом мелкомасштабных мод сводится к замене коэффициента молекулярной вязкости $\nu_0$ на некоторое зависящее от параметра обрезания перенормированное значение $\nu = \nu(\Lambda_0)$. Подобная процедура возникает естественным образом при численном моделировании турбулентных течений, когда часть мод (подсеточные моды) оказывается вне пределов разрешимости конечно-разностной сетки с характерным масштабом $\Lambda_0^{-1}$, однако их усредненное влияние учитывается введением подсеточной вязкости $\nu(\Lambda_0)$.

Следуя методу ренормгруппы [2], проведем разбиение $v_i(K)$ на медленную $v_i^<(K)$ и быструю $v_i^>(K)$ части, для которых волновые числа лежат соответственно в интервалах $0 < k < \Lambda_0 e^{-\tau}$ и $\Lambda_0 e^{-\tau} < k < \Lambda_0$. Чтобы получить уравнение для медленных мод с учетом усредненного влияния быстрых мод, следует подставить разбиение скорости в уравнение (1.1) и выполнить усреднение по быстрым переменным. Решение уравнения для быстрой части возьмем в линейном по внешней случайной силе приближении

$$v_i^>(K) = G(K)\, f_i^>(K) - i\lambda_0 P_{imn}(\mathbf{k}) \int \frac{dQ}{(2\pi)^{d+1}}\, G(Q)\, f_m^>(Q)\, v_n^<(K-Q)$$

$$G(K) = (-i\omega + \nu k^2)^{-1}$$

где $G(K)$ — функция Грина для линейной части оператора Навье — Стокса.

В силу линейности связи между $v^>$ и $f^>$ усреднение по быстрым переменным сводится к усреднению по внешней случайной силе. В результате уравнение для медленной части примет вид уравнения Навье — Стокса, в котором вязкий член $\nu k^2 v_i(K)$ заменен на величину

$$[\nu k^2 \delta_{ij} - \delta\Sigma_{ij}(K)]\, v_j(K) \equiv \nu_{ij}(K, \nu, \Lambda)\, k^2 v_j(K) \tag{1.3}$$

$$\delta\Sigma_{ij}(K) = -2D_0 \lambda_0^2 P_{imn}(\mathbf{k}) \int \frac{dQ}{(2\pi)^{d+1}}\, G(K-Q)\, G(Q)\, G(-Q) \times$$

$$\times P_{mm'}(\mathbf{q})\, P_{nm'j}(\mathbf{k} - q)\, q^{-y} \tag{1.4}$$

и интегрирование по $Q$ осуществляется в интервале быстрых мод. Как отмечено в [2], этот результат может быть получен при помощи фейнмановской диаграммной техники с единственным отличием, связанным с ограничением на область интегрирования по волновым числам внутренних линий.

Из (1.3) следует, что возникающая при исключении быстрых мод эффективная вязкость $\nu_{ij}(K, \Lambda_0, \nu, \tau)$ зависит от волнового числа $k$ и частоты $\omega$. В пределе крупномасштабных и медленных движений $k/\Lambda_0 \to 0$ и $\omega \to 0$ (инфракрасный предел) коэффициент эффективной вязкости не зависит от $K$ и его следует отождествить с величиной подсеточной вязкости при параметре обрезания $\Lambda = \Lambda_0 e^{-\tau}$.

Итерационное исключение быстрых мод путем частичного усреднения по полосе мод со все более уменьшающимися волновыми числами сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{d\nu}{d\Lambda} = \beta(\nu, \Lambda) = -\frac{\delta\nu(\nu, \Lambda)}{\delta\Lambda}. \tag{1.5}$$

где $\delta\nu$ — добавка к вязкости, обусловленная усредненным взаимодействием с модами из полосы волновых чисел $\delta\Lambda$.

Для нахождения $\beta(\nu, \Lambda)$ необходимо вычислить $\lim\limits_{k\to 0} \delta\Sigma_{ij}(K)/k^2$. Из свойства изотропности следует, что тензор $\delta\Sigma_{ij}(K)$ может быть представлен в виде

$$\delta\Sigma_{ij}(K) = \delta_{ij}\Sigma(k, \omega) + k_i k_j \Sigma^{(1)}(k, \omega) \tag{1.6}$$

однако поскольку в (1.3) входит выражение $\Sigma_{ij} v_j$, то в силу условия несжимаемости $k_j v_j = 0$ оказывается, что второй член формулы (1.6) вклада не дает и для нахождения $\Sigma(k, \omega)$ можно использовать соотношение

$$P_{ij}(\mathbf{k})\,\delta\Sigma_{ij}(K) = (d-1)\,\Sigma(k, \omega)$$

После выполнения интегрирования по частоте найдем

$$\Sigma(k, 0) = -\frac{D_0\lambda_0^2}{(d-1)\nu^2}\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\,\frac{b(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{q^{y+2}\,[q^2 + (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2]}$$

$$b(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = P_{ij}(\mathbf{k})\,P_{lmn}(\mathbf{k})\,P_{mm'}(\mathbf{q})\,P_{nm'j}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) =$$

$$= k^2\left[1 - \frac{(\mathbf{kq})^2}{k^2q^2}\right]\left[d - 1 - 2\,\frac{q^2(k^2 - \mathbf{kq})}{k^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right] \tag{1.7}$$

В пределе $k/\Lambda \to 0$ это выражение принимает вид

$$\Sigma(k, 0) = -\frac{D_0\lambda_0^2}{2(d-1)\nu^2}\int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d}\,(d + 3 - 6\sin^2\vartheta)\sin^2\vartheta \int\limits_{\Lambda-\delta\Lambda}^{\Lambda} \frac{dq}{q^{y-d+5}} \cong$$

$$\cong -\frac{A_d D_0\lambda_0^2}{\nu^2}\,\frac{\delta\Lambda}{\Lambda^{1-\varepsilon}} \tag{1.8}$$

Используя формулу

$$\int d\Omega_d \sin^{2n}\vartheta = \frac{\Gamma[d/2]}{\Gamma[d/2 + n]}\,\frac{\Gamma[(d-1)/2 + n]}{\Gamma[(d-1)/2]}\,s_d, \quad s_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

найдем

$$A_d = \frac{d-1}{2(d+2)}\,\frac{s_d}{(2\pi)^d} \tag{1.9}$$

Формула (1.9) получена ранее в [15] и воспроизведена недавно в [16].

Определяя с помощью (1.8) функцию $\beta(\nu, \Lambda)$ и решая дифференциальное уравнение (1.5), для подсеточной вязкости найдем выражение

$$\nu(\Lambda) = [\nu^3 + 3A_d D_0 (\Lambda^{-\varepsilon} - \Lambda_0^{-\varepsilon})/\varepsilon]^{1/3} \tag{1.10}$$

которое в пределе $\Lambda/\Lambda_0 \to 0$ дает

$$\nu(\Lambda) = (3A_d D_0/\varepsilon)^{1/3}\Lambda^{-\varepsilon/3} \tag{1.11}$$

В теории Яхота — Оржега ее авторы, следуя [2, 4], для упрощения интегрирования по направлениям вектора $\mathbf{q}$ применяли замену $\mathbf{q} \to \mathbf{k} + 1/2\mathbf{q}$ в подынтегральном выражении, однако при этом они не учитывали изменение области интегрирования при подобной замене. В результате ими было получено уже приводившееся ранее в [4] выражение

$$A_d = \frac{d^2 - d - \varepsilon}{2d(d+2)} \frac{s_d}{(2\pi)^d} \tag{1.12}$$

которое только при $\varepsilon = 0$ переходит в (1.9). Однако при вычислении константы Колмогорова и других универсальных констант авторы использовали значение $\varepsilon = 0$ в выражении (1.12) для $A_d$ и $\varepsilon = 4$ в определяющих подсеточную вязкость формулах (1.10)—(1.11). Только при этих условиях оказалось возможным получить хорошее согласие с экспериментальными данными.

Вследствие того что поправка к $A_d$ при $\varepsilon = 4$ не является малой, для обоснования возможности использования в формуле (1.12) значения $\varepsilon = 0$ вместо $\varepsilon = 4$ авторы [5, 9] высказали предположение, что поскольку в пределе $\Lambda \to 0$ фактический параметр разложения в ряд теории возмущений $h = \lambda_0^2 D_0/\nu^3(\Lambda)\Lambda^\varepsilon$ оказывается пропорциональным $\varepsilon$, соответствующий ряд по $\varepsilon$ является асимптотическим. В этом случае поправки высших приближений взаимно компенсируются и даже при $\varepsilon = 4$ оказывается достаточным ограничиться низшим приближением по $\varepsilon$. Однако зависимость $A_d$ от $\varepsilon$ в теории Яхота — Оржега ошибочна и поэтому сформулированная гипотеза представляется лишенной основания.

**2. Вычисление спектральной плотности энергии.** Спектральная плотность турбулентной энергии определяется соотношением

$$E(k) = \frac{s_d}{(2\pi)^d} k^{d-1} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int \frac{dQ}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d\omega}{2\pi} \langle v_i(Q)\, v_i(K+Q)\rangle$$

При вычислении этой величины принимается

$$v_i(K) = G(K) f_i(K) \tag{2.1}$$

и для функции Грина используется представление

$$G(K) = [-i\omega + \nu(k)k^2]^{-1} \tag{2.2}$$

в котором $\nu(k)$ — зависящий от волнового числа коэффициент турбулентной (вихревой) вязкости.

Применение формул (1.2), (2.1), (2.2) после выполнения интегрирования по частоте дает для спектральной плотности энергии соотношение

$$E(k) = \frac{(d-1)D_0}{2} \frac{s_d}{(2\pi)^d} \frac{k^{-y+d-3}}{\nu(k)} \tag{2.3}$$

Следуя [4], Яхот и Оржег предполагают возможность отождествления коэффициента турбулентной вязкости $\nu(k)$ с вычисленной выше величиной подсеточной вязкости $\nu(\Lambda)$, взятой при $k = \Lambda$. Указанное отождествление позволяет записать выражение для плотности энергии в виде

$$E(k) = \frac{d-1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{3A_d}\right)^{1/3} D_0^{2/3} \frac{s_d}{(2\pi)^d} k^{1-2\varepsilon/3} \tag{2.4}$$

что при $\varepsilon = 4$ воспроизводит закон Колмогорова — Обухова для спектра энергии.

Воспользовавшись предложенным Яхотом и Оржегом методом нахождения связи между $D_0$ и $\Xi$, можно вычислить константу Колмогорова.

Связь между $D_0$ и $\Xi$ может быть также установлена следующим образом. Поскольку предполагается, что подсеточная вязкость $\nu(\Lambda)$ параметризует влияние подсеточных мод на остальные, то для скорости диссипации энергии в область подсеточных мод можно записать соотношение [12]

$$\Xi = 2\nu(\Lambda) \int_0^{\Lambda} k^2 E(k)\, dk \tag{2.5}$$

что после подстановки выражения для спектральной плотности энергии дает соотношение вида

$$\Xi = \frac{d-1}{4-2\varepsilon/3} \frac{s_d}{(2\pi)^d} \Lambda^{4-\varepsilon} D_0 \tag{2.6}$$

Из этой формулы видно, что только при $\varepsilon = 4$ скорость диссипации не будет зависеть от $\Lambda$ и в этом случае

$$\Xi = \frac{3(d-1)}{4} \frac{s_d}{(2\pi)^d} D_0 \tag{2.7}$$

В результате для константы Колмогорова получаем

$$C_E = (2/3)[2(d+2)]^{1/3} \; (= 1{,}44 \text{ при } d = 3) \tag{2.8}$$

которое оказывается несколько меньше значения, полученного в теории Яхота — Оржега. Следует тем не менее отметить, что учет зависимости эффективной вязкости от частоты в линейном по частоте приближении ведет к увеличению этой константы [17].

Однако возможность отождествления коэффициента вихревой вязкости с подсеточной вязкостью, используемая при выводе формулы (2.3), не очевидна. Из проведенного в разд. 1 вычисления видно, что формула (1.4) описывает поправку к вихревой вязкости, обусловленную учетом прямого влияния мелкомасштабных мод с волновыми числами из узкого интервала $\Lambda - \delta\Lambda < q < \Lambda$ на крупномасштабные движения ($k << \Lambda$). Область применения полученных формул задается условием $k/\Lambda \to 0$, соответствующим учету существенно нелокальных в пространстве волновых чисел межмодовых связей. В процессе последовательного исключения быстрых мод это условие сохраняет свою силу на каждом этапе итерационной процедуры. Поэтому строгое обоснование используемой в теории Яхота — Оржега предельной процедуры $\Lambda \to k$ представляется маловероятным.

Если предположить, что локальные взаимодействия пренебрежимо малы по сравнению с нелокальными, то при предельном переходе $k \to \Lambda$ результат для вязкости не должен измениться. В связи с этим возникает вопрос о том, какова относительная роль локальных взаимодействий по сравнению с нелокальными. Согласно приведенной в [4] оценке для отношения характерных времен релаксации за счет локальных $\tau_l$ и нелокальных $\tau_{nl}$ взаимодействий, имеет место соотношение

$$\tau_l/\tau_{nl} \sim \varepsilon^{-1/2}$$

Отсюда следует, что при малых $\varepsilon$ нелокальные взаимодействия преобладают над локальными и замена $\nu(\Lambda) \to \nu(k)$ оказывается оправданной. Однако остается неясным, какое отношение имеют результаты, полученные в рамках ренормгруппового подхода при учете только нелокальных взаимодействий, к закономерностям теории Колмогорова, существенно основывающейся на предположении о локальности межмодовых связей?

Для объяснения успеха теории при вычислении набора универсальных констант в [9] сформулирована гипотеза, целью которой было обоснование возможности применения полученных результатов для описания турбулентности. Согласно этой гипотезе, одновременное использование двух приближений: (*1*) $\varepsilon \to 0$ при вычислении числовых коэффициентов и (*2*) предельный переход $k/\Lambda \to 1$, означающий пренебрежение локальными взаимодействиями, приводит к взаимно компенсирующим друг друга эффектам, в результате чего остаются только нелокальные взаимодействия, которые и учитываются в рамках метода ренормгруппы.

Однако, как это следует из (1.9), при нахождении коэффициента пропорциональности в формуле для вязкости предельный переход $\varepsilon \to 0$ не требуется и результат (1.10) может быть получен на основе использования ренормгрупповой процедуры исключения быстрых мод при учете нелокальных взаимодействий непосредственно для колмогоровского спектра. Необходимость выполнения перехода $\varepsilon \to 0$ в теории Яхота — Оржега возникла исходя из ошибочной формулы (1.12). Тем самым не может быть речи о взаимной компенсации эффектов двух аппроксимаций и вопрос о локальных и нелокальных взаимодействиях приобретает самостоятельный интерес.

**3. Локальные и нелокальные взаимодействия при ренормгрупповой трактовке турбулентности.** В ряде недавних работ исследовался вопрос о том, каким образом локальные взаимодействия, которые, согласно теории Колмогорова, ответственны за формирование режима развитой турбулентности, оказываются учтенными при ренормгрупповой трактовке турбулентности, основанной на рассмотрении нелокальных межмодовых связей. Исследование относительной роли локальных и нелокальных взаимодействий в зависимости от кроссоверного параметра $\varepsilon$ в рамках теории возмущений [18] заключается в анализе того, какие области интегрирования по пространству волновых чисел дают основной вклад в выражения для поправок к вязкости и случайной силе. Большинство авторов [10, 11, 13, 18, 19] пришли к заключению, что локальные взаимодействия в теории Яхота — Оржега, по-видимому, учитываются путем экстраполяции результатов расчетов вблизи $\varepsilon = 0$ к значению $\varepsilon = 4$, при этом в окрестности точки $\varepsilon = 0$ доминируют нелокальные взаимодействия.

Однако проведенные в разд. 1, 2 вычисления показывают, что результаты теории Яхота — Оржега для вязкости и спектра получаются при использовании предположения о доминирующей роли нелокальных взаимодействий непосредственно для колмогоровского случая ($\varepsilon = 4$). Напомним, что предположение о малости локальных взаимодействий в этой теории требуется при замене подсеточной вязкости на вихревую. С другой стороны, рассмотрение разложения вблизи точки $\varepsilon = 0$ необходимо для обоснования возможности использования низших приближений теории возмущений при аппроксимации быстрых мод, исключаемых в процессе проведения ренормгрупповой процедуры, поскольку только при малых $\varepsilon$ фактический параметр разложения оказывается малым в асимптотической области малых волновых чисел.

Таким образом, приведенные в [9] рассуждения нельзя рассматривать как обоснование процедуры $\varepsilon$-разложения, а скорее как формулировку некоторых условий, при которых успехи теории Яхота — Оржега можно было бы считать неслучайными.

**4. Проблема локальности при полевой формулировке метода ренормализационной группы.** Новый взгляд на проблему обоснования возможности описания турбулентности в рамках ренормгруппового подхода дает использование теоретико-полевой формулировки. В теории поля этот метод следует рассматривать как способ улучшения теории возмущений путем суммирования некоторой бесконечной подпоследовательности полного ряда теории возмущений [20]. В отличие от применяемой в теории Яхота — Оржега процедуры усреднения по узкой полосе спектра волновых чисел в пределе учета только нелокальных взаимодействий ($k/\Lambda \to 0$) в полевой формулировке рассматриваются взаимодействия данной моды с модами всех остальных масштабов, т. е. учитываются как локальные, так и нелокальные взаимодействия. Поскольку интегрирование при этом проводится не по узкому сферическому слою, а по полному объему пространства волновых чисел, то в теории возможно появление расходящихся интегралов и возникает проблема их правильной интерпретации и корректного обращения с ними.

Как известно [21], при подстановке в уравнения для функции Грина и парного коррелятора (уравнения Дайсона и Уайлда) решений в виде степенных функций с соответствующими колмогоровскому спектру показателями появляются расходимости интегралов в области малых волновых чисел (инфракрасные расходимости). Причина появления инфракрасных расходимостей связана с неприменимостью формальной теории возмущений в случае наличия в системе возбуждений со сколь угодно малыми волновыми числами и частотами (таким возбуждениям в теории поля соответствуют кванты с нулевой массой). При наличии квантов нулевой массы теория возмущений должна быть перестроена таким образом, чтобы взаимодействия с возбуждениями, имеющими малые волновые числа, оказались просуммированными точно.

В теории турбулентности нелокальные взаимодействия мелкомасштабных мод из инерционного интервала с крупномасштабными сводятся к переносу крупномасштабными модами мелкомасштабных. Такие взаимодействия не приводят к перераспределению энергии между модами и тем самым не влияют на формирование спектра в инерционном интервале. Просуммированное по теории возмущений взаимодействие с крупномасштабными модами проявляется в форме допплеровского сдвига частоты и может быть устранено переходом в сопутствующую систему отсчета [22].

Обусловленные нелокальными взаимодействиями инфракрасные расходимости носят степенной характер, т. е. являются сильными. После отделения сильных инфракрасных расходимостей останутся более слабые расходимости логарифмического типа. Согласно Вилсону [23], наличие логарифмических расходимостей является характерным симптомом локальных взаимодействий и каскадного механизма переноса энергии по спектру масштабов. Именно для описания локальных взаимодействий метод ренормгруппы наиболее эффективен. Это утверждение противоречит теории Яхота — Оржега, в которой метод ренормгруппы используется для описания нелокальных взаимодействий. Поэтому представляет интерес исследование проблемы локальности в рамках полевой формулировки метода. Основной задачей при этом оказывается выделение формирующих каскадный режим локальных взаимодействий, развивающихся на фоне сильных нелокальных взаимодействий. Подобная задача может быть успешно решена с помощью ренормгруппового подхода.

При полевой формулировке объектом рассмотрения является коэффициент эффективной вязкости $\nu(K)$, определяющий затухание возмущений в турбулизованной жидкости и выражающийся через обратную функцию Грина посредством формулы

$$G^{-1}(K) = -i\omega + \nu(K)\,k^2 \tag{4.1}$$

при этом из уравнения Дайсона для функции Грина следует, что $\nu(K)$ связана с оператором собственной энергии $\Sigma(K)$ соотношением

$$\nu(K) = \nu_0 - \Sigma(K)/k^2 \tag{4.2}$$

Далее будет рассматриваться эффективная вязкость в статическом пределе $\omega \to 0$. Уточнение этого предположения, связанное с учетом первого члена разложения $\Sigma(K) = \Sigma(k, \omega)$ по $\omega$, ведет к перенормировке частоты, учет влияния этой перенормировки на результат вычисления константы Колмогорова проведен в [17].

Оператор собственной энергии $\Sigma$ является некоторым функционалом от функции Грина и с учетом этого формулу (4.2) следует рассматривать как нелинейное уравнение для эффективной вязкости. Поскольку оператор собственной энергии пропорционален $\lambda_0^2$, то можно строить теорию возмущений по параметру $\lambda_0$, при этом в качестве нулевого приближения для коэффициента эффективной вязкости использовать значение исходного коэффициента молекулярной вязкости $\nu_0$. Поскольку поправка к вязкости, обусловленная учетом турбулентного переноса импульса, является большой и фактический параметр разложения $h = \lambda_0^2 D_0/\nu_0^3$ велик, то применение формальной теории возмущений не эффективно. Однако с помощью операции перенормировки можно перестроить ряд теории возмущений таким образом, чтобы вычисляемые по обычной теории возмущений большие поправки оказались учтенными в нулевом приближении перенормированной теории возмущений и вычисляемые с помощью перенормированной теории поправки оказались малыми.

Для этого в уравнении (4.2) выполним замену $\nu_0 \to \nu$, а компенсирующую эту замену добавку отнесем в виде так называемого контрчлена к перенормированному оператору собственной энергии согласно соотношению

$$\nu (K) = \nu - \Sigma^{(R)} (K)/k^2, \quad \Sigma^{(R)} (K) = \Sigma (K) + (\nu - \nu_0)\, k^2 \tag{4.3}$$

и будем рассматривать $\Sigma^{(R)}$ как возмущение. В результате фактический параметр разложения в ряд перенормированной теории возмущений $h = \lambda_0^2 D_0/\nu^3$ уменьшится. Произвол в выборе коэффициента перенормированной вязкости $\nu$ устраняется с помощью условия нормировки, заключающегося в требовании, чтобы в точке нормировки, т. е. при фиксированных значениях волнового числа $k = \mu$ и частоты $\omega_\mu = 0$, коэффициент эффективной вязкости совпадал с перенормированным значением $\nu$. Другими словами, в точке нормировки должно выполняться условие $\Sigma^{(R)}(K) = 0$. Как следствие условия нормировки произвол при выборе перенормированного коэффициента вязкости, отражающий неоднозначность разбиения $\nu(K)$ на невозмущенную часть и возмущение, переходит в произвол в выборе точки нормировки (значения $\mu$). Требование ренормализационной инвариантности отражает свойство независимости полного ряда перенормированной теории возмущений от выбора точки нормировки.

Вычисляемая по перенормированной теории возмущений статическая эффективная вязкость является функцией волнового числа $k$, числовых параметров задачи $D_0$, $\nu$, а также задающего масштаб произвольного параметра $\mu$. Из соображений размерности следует

$$\nu(k, D_0, \nu, \mu) = \nu f (k/\mu, h), \quad h = \lambda_0^2 D_0/\nu^3\mu^\varepsilon \tag{4.4}$$

и, согласно условию нормировки, $f(1, h) = 1$.

Требование ренормализационной инвариантности означает, что при ренормгрупповом преобразовании $\mu \to \mu_1$, $\nu \to \nu_1$ вид функции $\nu(k, D_0, \nu, \mu)$ остается неизменным, т. е.

$$\nu(k, D_0, \nu, \mu) = \nu f (k/\mu, h) = \nu_1 f (k/\mu_1, h_1), \quad h_1 = \lambda_0^2 D_0/\nu_1^3\mu_1^\varepsilon \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует, что функция

$$H (k/\mu, h) = h (k/\mu)^{-\varepsilon} f^{-3} (k/\mu, h), \quad H (1, h) = h \tag{4.6}$$

является инвариантом ренормгруппового преобразования, т. е.

$$H (k/\mu, h) = H (k/\mu_1, h_1) \tag{4.7}$$

Эта функция представляет собой аналог инвариантного заряда в квантовой теории поля [20], являющегося зависящим от волнового числа фактическим параметром разложения. Она удовлетворяет функциональному уравнению ренормгруппы

$$H (x, h) = H (x/t, H (t, h)) \tag{4.8}$$

и следующему из него дифференциальному уравнению

$$\left\{ -x \frac{\partial}{\partial x} + \beta (h) \frac{\partial}{\partial h} \right\} H (x, h) = 0, \quad \beta (h) = \left. \frac{\partial H (x, h)}{\partial x} \right|_{x=1} \tag{4.9}$$

Решение дифференциального уравнения (4.9) позволяет найти зависимость коэффициента эффективной вязкости от волнового числа, при этом никаких ограничений на область изменения волнового числа не накладывается в отличие от теории Яхота — Оржега, в которой рассматривается случай $k \to 0$. Однако в уравнение (4.9) входит неизвестная функция $\beta(h)$ (называемая $\beta$-функцией, функцией Гелл — Манна и Лоу или функцией Вилсона), определяемая поведением решения вблизи точки нормировки. В методе ренормгруппы [20] эта функция вычисляется в низшем приближении перенормированной теории возмущений.

Следует подчеркнуть, что низшее приближение теории возмущений используется только для нахождения $\beta$-функции, а последующее решение уравнения ренормгруппы соответствует суммированию определенной бесконечной подпоследовательности полного ряда теории возмущений. В некотором смысле решение уравнения ренормгруппы определяет свойства каскадной цепочки из последовательности взаимодействий на основе знания свойств отдельного звена — единичного акта взаимодействия (задаваемого $\beta$-функцией) — и задаваемого требованием ренормализационной инвариантности свойства самоподобия образующих цепочку звеньев [8].

Проведенный расчет дает для оператора собственной энергии $\Sigma$ в низшем приближении перенормированной теории возмущений выражение вида [24]

$$\Sigma(k, 0) = -(\lambda_0^2 D_0/2\nu^2)\, k^2 \Gamma(\varepsilon/2)\, A_d(\varepsilon)\, k^{-\varepsilon} \tag{4.10}$$

$$A_d(\varepsilon) = \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma[(d+\varepsilon)/2]} \frac{s_d}{(2\pi)^d} \int_0^1 \eta^{d/2-1}\, d\eta \left\{ \frac{d+\eta}{4^{1-\varepsilon/2}} \eta^{\varepsilon/2} (1-\eta^2)^{-\varepsilon/2} - \eta (1-\eta)^{-\varepsilon/2} \right\} \tag{4.11}$$

Из (4.10) видно, что оператор собственной энергии, рассматриваемый как функция $\varepsilon$, имеет полюсную особенность в точке $\varepsilon = 0$. Согласно применяемому в теории поля методу размерной регуляризации расходящихся интегралов [25], эта особенность отражает наличие при $\varepsilon = 0$ расходимости логарифмического типа в области больших волновых чисел (ультрафиолетовая расходимость). Выделение этой полюсной особенности и ее продолжение в точку $\varepsilon = 4$ не представляет трудности. Однако $A_d(\varepsilon)$ не может быть продолжено в точку $\varepsilon = 4$, так как соответствующий интеграл не существует при $\varepsilon \geq 2$. При $\varepsilon < 2$ коэффициент $A_d$ выражается через Эйлеров интеграл первого рода (бэта-функцию), которая в области отрицательных значений своего аргумента определяется не посредством интегрального представления, а с помощью рекуррентных соотношений.

Таким образом, продолжение в область $\varepsilon \geq 0$ будет содержать полюсные особенности, которые в методе размерной регуляризации отражают наличие инфракрасных расходимостей, связанных с учетом сильных нелокальных взаимодействий моды $k$ с крупномасштабными модами. Просуммированное взаимодействие с крупномасштабными модами сводится к эффектам переноса, которые следует выделить из общего выражения для эффективной вязкости и включить в допплеровский сдвиг частоты. Оставшееся после отделения эффектов переноса выражение, отождествляемое с поправкой к вязкости, не будет иметь особенностей в области $\varepsilon > 0$. Таким образом, в этой области эффективная вязкость может быть аппроксимирована единственной оставшейся полюсной особенностью, расположенной в точке $\varepsilon = 0$ и имеющей вычет $A_d(0)$. В результате получающееся после отделения эффектов переноса выражение для оператора собственной энергии имеет вид

$$\Sigma'(k, 0) = -(\lambda_0^2 D_0/\nu^2)\, k^2 A_d(0)\, k^{-\varepsilon} \varepsilon^{-1} \tag{4.12}$$

Вычисление $A_d(0)$ дает результат, тождественно совпадающий с найденным согласно теории Яхота — Оржега выражением для коэффициента $A_d$ (формула (1.9)).

Исходя из (4.12) и используя (2.3), (4.5), (4.6), (4.9), нетрудно найти β-функцию

$$\beta(h) = -\varepsilon h + 3A_d(0)\,h^2 \qquad (4.13)$$

Подстановка $\beta(h)$ в дифференциальное уравнение (4.9) дает возможность найти $H(x, h)$ и вычислить эффективную вязкость

$$\nu(k) = [\nu^3 + (3/\varepsilon)\,A_d(0)\,D_0\,(k^{-\varepsilon} - \mu^{-\varepsilon})\,]^{1/3} \qquad (4.14)$$

Сравнение с (1.10) показывает, что этот результат при замене $k \to \Lambda$, $\mu \to \Lambda_0$ дает выражение для подсеточной вязкости теории Яхота — Оржега. Тем самым предположение о возможности замены подсеточной вязкости на вихревую получает подтверждение без использования гипотезы о малости локальных взаимодействий при $\varepsilon = 0$.

Входящая в теорию Яхота — Оржега в качестве важного составного элемента гипотеза о том, что с помощью метода ренормгруппы учитываются нелокальные взаимодействия, а роль локальных взаимодействий пренебрежимо мала, не согласуется со взглядами Вилсона на этот метод как на способ описания локальных взаимодействий [23]. Действительно, наличие логарифмической ультрафиолетовой расходимости для задающего поправку к вязкости оператора собственной энергии, по мнению авторов работ [10, 18], следует квалифицировать как результат влияния сильного нелокального взаимодействия. Однако об относительной роли локальных и нелокальных взаимодействий в методе ренормгруппы следует судить по их вкладу в β-функцию, в которой отражена вся специфика рассматриваемой системы.

Для оценки этой роли в [24] проведен расчет β-функции при наличии обрезания в пространстве волновых чисел для крупномасштабных мод с $q < m$ и для мелкомасштабных с $q > M$. Учет обрезания приводит к поправкам в β-функции вида $(m^2/\mu^2)^{1-\varepsilon}$ и $(\mu^2/M^2)^{1+\varepsilon}$. Отсюда следует, что при $\varepsilon = 0$ вклад нелокальных взаимодействий с обрезаемыми модами мал и основную роль играют локальные взаимодействия. С ростом $\varepsilon$ влияние взаимодействия с крупномасштабными модами возрастает, однако это взаимодействие сводится к эффектам переноса, которое не оказывает влияния на величину эффективной вязкости.

Основной результат работы сводится к утверждению, что использование для описания турбулентности ренормгруппового подхода в сочетании с процедурой ε-разложения означает учет локальных в пространстве волновых чисел межмодовых связей. Этот результат противоречит представлениям авторов и последователей теории Яхота — Оржега, согласно которым при $\varepsilon = 0$ локальные связи пренебрежимо малы и учитываются при аналитическом продолжении по $\varepsilon$ в точку $\varepsilon = 4$. Лежащая в основе процедуры ε-разложения гипотеза о взаимной компенсации влияния учета локальных связей и приближения $\varepsilon \to 0$ в выражении для коэффициентов пропорциональности не оправдывается, так как в теории Яхота — Оржега используется ошибочная формула для этих коэффициентов. Тем не менее количественные результаты для универсальных констант турбулентности воспроизводятся на основе более строгой теории, использующей полевую формулировку метода ренормгруппы. Согласно этой формулировке, аналитическое продолжение по $\varepsilon$ расположенной в точке $\varepsilon = 0$ полюсной особенности в точку $\varepsilon = 4$ означает пренебрежение нелокальными взаимодействиями с крупномасштабными модами, сводящимися к переносу и не дающими вклада в эффективную вязкость.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. Т. 1. 694 с.
2. *Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J.* Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid//Phys. Rev. A. 1977. V. 16. № 2. P. 732—749.
3. *De Dominicis C., Martin P. C.* Energy spectra of certain randomly-stirred fluids//Phys. Rev. A. 1979. V. 19. № 1. P. 419—422.
4. *Fournier J.-D., Frisch U.* Remarks on the renormalization group in statistical fluid dynamics//Phys. Rev. A. 1983. V. 28. № 2. P. 1000—1002.
5. *Yakhot V., Orszag S. A.* Renormalization-group analysis of turbulence//Phys. Rev. Letts. 1986. V. 57. № 14. P. 1722—1724; Renormalization group analysis of turbulence. 1. Basic theory//J. Sci. Comp. 1986. V. 1. № 1. P. 3—51.
6. *Fournier J.-D., Sulem P.-L., Pouquet A.* Infrared properties of forced magnetohydrodynamic turbulence//J. Phys. A: Math. Gen. 1982. V. 15. № 4. P. 1393—1420.
7. *Аджемян Л. Ц., Васильев А. Н., Гнатич М.* Ренормгрупповой подход в теории турбулентности: включение пассивной примеси//ТМФ. 1984. Т. 58. № 1. С. 72—78.
8. *Теодорович Э. В.* Явления турбулентного переноса и метод ренормализационной группы//ПММ. 1988. Т. 52. № 2. С. 218—224.
9. *Dannevik W. P., Yakhot V., Orszag S. A.* Analytical theories of turbulence and the ε expansion//Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 6. P. 2021—2029.
10. *Carati D.* Locality hypothesis in the renormalized Navier-Stokes equation//Phys. Rev. A. 1991. V. 44. № 10. P. 6932—6935.
11. *Smith L. M., Reynolds W. C.* On the Yakhot — Orszag renormalization group method for deriving turbulence statistics and models//Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 2. P. 364—390.
12. *Lam S. H.* On the RNG theory of turbulence//Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 5. P. 1007—1017.
13. *Zhou Y., Vahala G.* Local interactions in renormalization methods for Navier-Stokes turbulence//Phys. Rev. A. 1992. V. 46. № 2. P. 1136—1139.
14. *Wilson K., Fisher M.* Critical exponents in 3.99 dimensions//Phys. Rev. Letts. 1972. V. 28. № 4. P. 240—243.
15. *Теодорович Э. В.* Развитая турбулентность и метод ренормгруппы//Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Матер. III Всесоюз. школы по гидрофизике. Н. Новгород: ИПФ АН СССР, 1990. С. 72—86.
16. *Wang X.-H., Wu F.* One modification to the Yakhot-Orszag calculation in the renormalization-group theory of turbulence//Phys. Rev. E. 1993. V. 48. № 1. P. R37—R38.
17. *Теодорович Э. В.* К вычислению константы Колмогорова при описании турбулентности методом ренормгруппы//ЖЭТФ. 1989. Т. 96. Вып. 1(7). С. 163—170.
18. *Kraichnan R. H.* Hydrodynamic turbulence and the remormalization group//Phys. Rev. A. 1982. V. 25. № 6. P. 3281—3289.
19. *Kraichnan R. H.* An interpretation of the Yakhot-Orszag turbulence theory//Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 8. P. 2400—2405.
20. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. Изд. 4. М.: Наука, 1984. 597 с.
21. *Захаров В. Е., Львов В. С.* О статистическом описании нелинейных волновых полей//Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 10. С. 1470—1487.
22. *Белиничер В. И., Львов В. С.* Масштабно-инвариантная теория развитой гидродинамической турбулентности//ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 2. С. 533—551.
23. *Wilson K. G.* The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem//Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. № 4. P. 773—840.
24. *Теодорович Э. В.* О роли локальных и нелокальных взаимодействий в формировании режима развитой турбулентности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 36—42.
25. *Коллинз Дж.* Перенормировка: Введение в теорию перенормировок, ренормализационной группы и операторных разложений. М.: Мир, 1988. 446 с.



Москва

Поступила в редакцию
1.XI.1993