МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1994

УДК 532.5.013.4+532.546:536.25

© 1994 г. Х. Г. МАГОМЕДБЕКОВ, М. М. РАМАЗАНОВ

ГИДРОТЕРМАЛЬНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ТОНКОМ ПОРИСТОМ КОЛЬЦЕ

Рассматривается естественная конвекция жидкости в тонком пористом кольце, на границах которого поддерживаются стационарные распределения температур. Для этой задачи на основе двумерных уравнений конвекции получено интегродифференциальное уравнение в нулевом приближении по малому параметру — относительной толщине кольца. Выполнено параметрическое численное исследование полей течений и температур.

Термоконвективные процессы в тонких замкнутых пористых контурах исследованы в [1, 2]. Определены условия возникновения гидротермальной конвекции и показано, что при выполнении определенных критериев устанавливается стационарный поток. Однако при математическом моделировании процессов тепломассопереноса в рассматриваемых системах был введен ряд упрощающих предположений. В частности, предполагалось, что температура и тангенциальная скорость жидкости однородны по поперечному сечению контура, а теплообмен со стенками происходит по закону Ньютона. Это позволило пренебречь эффектами, связанными с конечной шириной контура, и исследовать конвекцию в контуре на основе одномерного уравнения тепломассопереноса («одномерная» модель).

1. **Постановка задачи.** Пусть пористое кольцо со средним радиусом R_0 и толщиной h ($h \ll R_0$) расположено в вертикальной плоскости. Предположим, что на границах кольца поддерживаются стационарные распределения температур, убывающие с увеличением угла от 0 до π (φ отсчитывается против часовой стрелки от оси, направленной по вектору ускорения свободного падения g). Для двумерной модели естественной конвекции жидкости в кольце система уравнений в приближении Дарси — Буссинеска в цилиндрических координатах в безразмерных переменных и граничные условия имеют вид [3]

$$u_r = -\left[\frac{\partial p}{\partial r} - (\gamma - T)\cos\varphi\right],\quad u_\varphi = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + (\gamma - T)\sin\varphi\right] \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right] = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_r\frac{\partial T}{\partial r} + u_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{(h')^2}{\mathrm{Ra}}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right]$$

$$u_r(1 - 0{,}5h', \varphi, t) = u_r(1 + 0{,}5h', \varphi, t) = 0 \tag{1.2}$$

$$T(1 - 0{,}5h', \varphi, t) = \Theta_1(\varphi),\quad T(1 + 0{,}5h', \varphi, t) = \Theta_2(\varphi)$$

$$F_i(r, \varphi, t) = F_i(r, \varphi + 2\pi, t),\quad F_i = \{u_r, u_\varphi, P, T\}$$

$$\mathrm{Ra} = \frac{k\rho_f g\alpha_f \Delta T c_f h^2}{\lambda\mu R_0},\quad \gamma = \frac{1}{\alpha_f\Delta T} + \frac{T_f}{\Delta T}$$

Здесь R_0 — характерный масштаб длины, $\Delta T = T_1 - T_f$ — температуры,

$k\rho_f g\alpha_f \Delta T/\mu$ — скорости, $R_0 c\mu/(C_0 k\rho_f g\alpha_f \Delta T)$ — времени, $\rho_f g\alpha_f \Delta T R_0$ — давления, где T — температура; u_r и u_φ — составляющие скорости вдоль r и по φ, t — время; P — давление в жидкой фазе; k, C, λ — проницаемость, объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности пористой среды; C_0, μ, ρ_f, α_f — соответственно объемная теплоемкость, динамическая вязкость, плотность (при температуре T_f) и коэффициент температурного расширения подвижной жидкости, насыщающей пористую среду.

Определяющий критерий подобия в рассматриваемой задаче Ra — фильтрационное число Рэлея, вычисленное по среднему радиусу кольца R_0. Так как $h \ll R_0$, то в задаче существует малый параметр $\varepsilon \equiv h' = h/R_0$. Введем «растянутую» координату $y = (r-1)/\varepsilon$ и будем искать решение задачи (1.1), (1.2) в виде

$$u_r = \varepsilon v + \varepsilon^2 v_2 + \ldots, \quad u_\varphi = u + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots$$
$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \ldots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots \tag{1.3}$$

Здесь учтена оценка $u_r/u_\varphi \sim \varepsilon$, которая следует из уравнения неразрывности в (1.1). Подставляя (1.3) в (1.1), (1.2), используя методику, описанную в [4], получим задачу для нулевого приближения (индекс ноль у T_0 и P_0 опускаем для краткости)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad u = -\left[\frac{\partial p}{\partial \varphi} + (\gamma - T)\sin\varphi\right] \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial y} + u\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{\mathrm{Ra}}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$v(-0{,}5, \varphi, t) = v(0{,}5, \varphi, t) = 0, \; T(-0{,}5, \varphi, t) = \Theta_1(\varphi), \; T(0{,}5, \varphi, t) = \Theta_2(\varphi) \tag{1.5}$$

Необходимо найти периодическое по φ решение задачи (1.4), (1.5).

Введя функцию тока Ψ и дифференцируя второе уравнение в (1.4) по y, получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial y}\sin\varphi \tag{1.6}$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\Psi = \sin\varphi \int_{-0{,}5}^{y} T dy + (y + 0{,}5)\, G(\varphi, t) \tag{1.7}$$

где G — некоторая функция, зависящая только от φ и t. На Ψ накладываются ограничения, которые задают условия непроницаемости границ кольца

$$\Psi|_{y=-0{,}5} = 0, \quad \Psi|_{y=0{,}5} = u_0(t) \tag{1.8}$$

Из (1.5), (1.6) получим

$$G(\varphi, t) = u_0(t) - \langle T\rangle \sin\varphi, \quad \langle T\rangle = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} T(y, \varphi, t)\, dy$$

Здесь $\langle T \rangle$ — средняя по ширине кольца температура. Подставляя в выражения для $G(\varphi, t)$, в (1.6) находим

$$\Psi = \sin\varphi \int_{-0,5}^{y} (T - \langle T \rangle)\, dy + u_0(t)(y + 0,5) \tag{1.9}$$

Для определения u_0 воспользуемся вторым уравнением в (1.4)

$$(T - \langle T \rangle) \sin\varphi + u_0(t) = -\frac{\partial p}{\partial \varphi} - (\gamma - T)\sin\varphi$$

Интегрируя обе части этого уравнения по φ от 0 до 2π, получим

$$u_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle T \rangle \sin\varphi d\varphi \tag{1.10}$$

Можно записать задачу (1.4) в несколько иной форме. Собирая вместе (1.4), (1.5), (1.9), (1.10), получим интегродифференциальное уравнение, описывающее двумерную конвекцию в тонком пористом кольце

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{Ra}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{1.11}$$

$$\Psi = \sin\varphi \int_{-0,5}^{y} (T - \langle T \rangle)\, dy + \frac{1}{2\pi}(y + 0,5) \int_0^{2\pi} \langle T \rangle \sin\varphi d\varphi$$

Соответствующими граничными условиями для T будут (1.5).

Задача (1.1), (1.5) обладает рядом особенностей. Во-первых, в отличие от задачи конвекции в стандартной постановке (в которой для функции тока необходимо решить уравнение Пуассона) [5] здесь для функции тока выписано явное представление. Во-вторых, в выражение для функции тока входит величина u_0, представляющая собой не что иное, как среднюю скорость фильтрации по направлению φ, и которая появляется независимо от конкретного вида граничных условий (1.5).

Для целей последующего обсуждения приведем здесь также уравнение термоконвекции для одномерной модели. Это уравнение было получено в [2] (при условии, что скорость u_c и температура T_c однородны по поперечному сечению кольца, а теплообмен с границами задается по закону Ньютона) и имеет вид

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} - \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_c \sin\varphi d\varphi\right] \frac{\partial T_c}{\partial \varphi} = \frac{K}{\mathrm{Ra}}(\Theta - T_c) \tag{1.12}$$

Здесь K — безразмерный коэффициент теплообмена, Θ — температура стенки.

Для решения задачи (1.11), (1.5) была использована неявная продольно-поперечная схема [6].

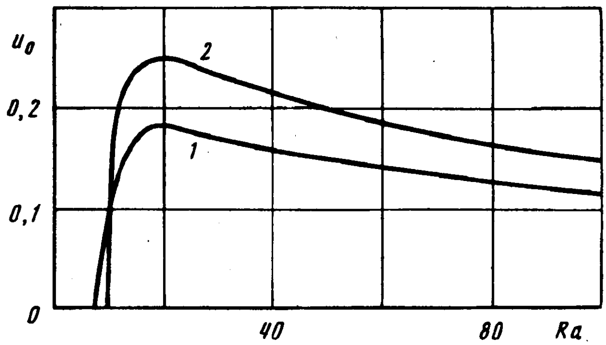
В результате расчетов было установлено, что используемая схема лишь условно устойчива, т. е. имеет ограничение на временной шаг $\Delta t \leq \tau_0$, где τ_0 зависит от числа Рэлея и величин пространственных шагов Δy и $\Delta\varphi$.

Обсуждение результатов. Основные результаты были получены из расчетов на сетке с числом узлов 11×64 ($\Delta y = 0,1$, $\Delta\varphi \approx 0,1$). При этом предполагалось, что

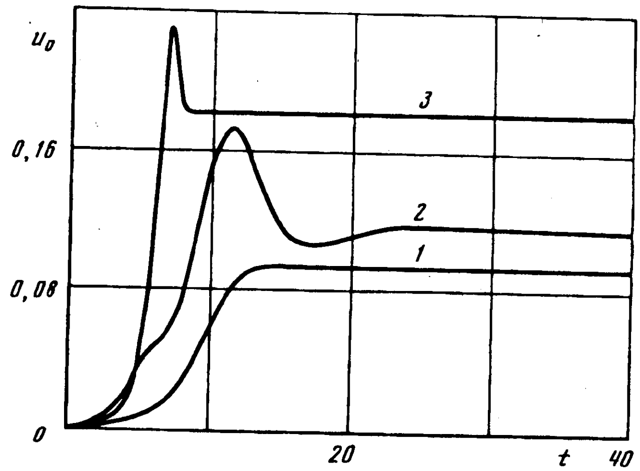
$$\Theta_1(\varphi) = (1 - 0,5h')\cos\varphi,\ \Theta_2(\varphi) = (1 + 0,5h')\cos\varphi,\ \Theta(\varphi) = \cos\varphi$$

Амплитуда начального возмущения задавалась в виде $u_0^* = 0,0001$.

На фиг. 1 представлен график зависимости стационарной скорости циркуляции от числа Рэлея Ra (кривая *1*). Экстраполируя график до пересечения с осью абсцисс, определим критические значения Ra_c, при превышении которого в кольце возникает циркуляция жидкости: $\mathrm{Ra}_c \approx 8,8$. При $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_c$ в кольце устанавливается устойчивый стационарный поток флюида в тангенциальном направ-



Фиг. 1



Фиг. 2

лении. Об этом свидетельствует, в частности, фиг. 2, на которой представлены графики зависимости скорости циркуляции от времени, полученные соответственно при Ra = 10; 20; 100 (кривые *1—3*).

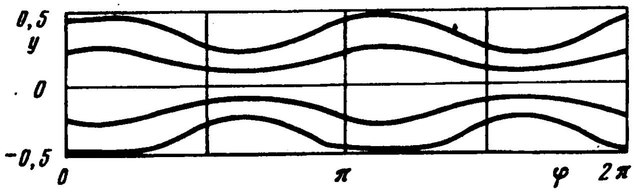
На фиг. 3 представлены изолинии функций тока, рассчитанные при Ra = 20 в «растянутых» координатах (y, φ). Из этих фигур видно, что при Ra > Ra_c в кольце устанавливается в основном тангенциальное движение флюида с небольшими вариациями скорости в радиальном направлении, т. е. структура течения носит волнообразный характер. В то же время при Ra < Ra_c каких-либо заметных движений флюида в кольце не наблюдалось.

На фиг. 4 представлены профили температур в сечении $\varphi = 0$, рассчитанные соответственно при Ra = 10; 20; 100 (кривые *1—3*). Из этих данных, а также из анализа результатов расчета изолиний функций тока следует, что с увеличением числа Рэлея (при Ra > Ra_c) каких-либо качественных изменений в системе не наблюдается.

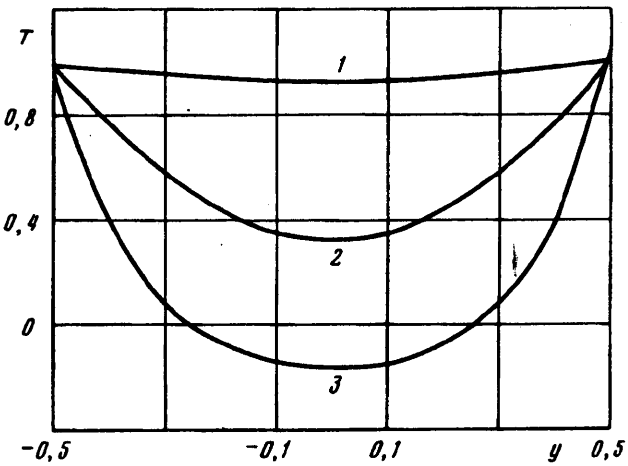
Обсудим теперь некоторые результаты, полученные в рамках одномерной модели [1]. Стационарное решение уравнения (1.12) и соответствующая зависимость стационарной скорости циркуляции от числа Рэлея имеют вид

$$T_c(\varphi) = \frac{K}{\text{Ra}}\left[2\cos\varphi + \sqrt{2\left(\frac{\text{Ra}}{K} - 2\right)}\,\sin\varphi\right] \qquad (2.1)$$

$$u_c = \pm\sqrt{\frac{\text{Ra}/K - 2}{2\,(\text{Ra}/K)^2}} \qquad (2.2)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Данные, рассчитанные по формуле (2.1) ($K = 5$), приведены на фиг. 1 кривой 2. Сравнение кривых и анализ результатов численного решения уравнения (1.12) показывают, что при $K = 5$ наблюдается хорошее согласие между результатами одномерной и двумерной моделей. Это свидетельствует о том, что в большинстве практически важных случаев (в частности, когда необходимо исследовать термоконвекцию в контурах, расположенных в геофизической среде [1]) достаточно рассматривать поведение исследуемой системы на основе уравнения (2.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Магомедбеков Х. Г., Рамазанов М. М.* Качественный анализ гидротермальной конвекции в замкнутых флюидонасыщенных контурах. Махачкала: Даг. политехн. ин-т. 1990.— Деп. в ВИНИТИ 26.06.90 № 3637. 15 с.
2. *Магомедбеков Х. Г., Гайдаров Г. М., Осман-Заде Ш. С.* Гидротермальная конвекция в разломных зонах//Геотермия. Вып. 1. М.: Наука, 1991. С. 113—117.
3. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
4. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
5. *Клейн И. С., Полежаев В. И.* Конвективный теплообмен в проницаемых пористых средах: Препринт № 111. М.: ИПМ АН СССР, 1978. 66 с.
6. *Кирюхин А. В., Сугробов В. М.* Модели теплопереноса в гидротермальных системах Камчатки. М.: Наука, 1987. 150 с.

Махачкала, Каспийск

Поступила в редакцию
27.I.1992