

УДК 532.517.3

© 1994 г. М. В. УСТИНОВ

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ СУБГАРМОНИЧЕСКОГО ПЕРЕХОДА В РАМКАХ АМПЛИТУДНЫХ УРАВНЕНИЙ

С целью определения пределов применимости модели Крайка проводится сравнение результатов расчетов по этой модели с выводами более точной теории вторичной неустойчивости Герберта и результатами прямого численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода. Анализ полученных результатов показывает, что модель Крайка удовлетворительно описывает развитие возмущений только до амплитуд порядка 10^{-3} скорости набегающего потока.

1. Сначала кратко опишем основные результаты теории Крайка и используемые для проверки ее применимости теорию вторичной неустойчивости Герберта и метод прямого численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода. Для этого рассмотрим обтекание плоской пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости с кинематическим коэффициентом вязкости ν . Будем исследовать течение на достаточно большом расстоянии от передней кромки, причем для простоты ограничимся плоскопараллельным приближением для течения в пограничном слое. Для введения безразмерных переменных используем толщину вытеснения пограничного слоя δ^* и скорость набегающего потока u_∞ в качестве масштабов для координат и скорости. С целью дальнейшего упрощения постановки задачи будем рассматривать развитие возмущений по времени.

При подходе Крайка возмущения скорости V_p представляются в виде

$$V_p = a_0(t) V_0(z) e^{2i(\alpha x - \omega t)} + a_+(t) V_+(z) e^{i(\alpha x + \beta y - \omega t)} + a_-(t) V_-(z) e^{i(\alpha x - \beta y - \omega t)} + (c. c)$$

$$V_0 = \{u_0, v_0, w_0\}, V_+ = \{u_1, v_1, w_1\}, V_- = \{u_1, -v_1, w_1\}$$

причем распределение пульсаций по вертикальной координате z определяется из задач на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда

$$L(2\alpha, 0, \Omega) \circ w_0 = 0, L(\alpha, \beta, \Omega) \circ w_1 = 0, \omega = \frac{\text{Re}(\Omega_0)}{2}$$

$$w_0(0) = w_0'(0) = w_0(\infty) = 0, w_1(0) = w_1'(0) = w_1'(\infty) = 0 \quad (1.1)$$

$$L(\alpha, \beta, \Omega) = i\alpha \left(U_0(z) - \frac{\Omega}{\alpha} \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} - (\alpha^2 + \beta^2) \right) - i\alpha U_0'' -$$

$$- \frac{1}{R} \left[\frac{d^2}{dz^2} - (\alpha^2 + \beta^2) \right]^2$$

Здесь $U_0(z)$ — профиль скорости в пограничном слое Блазиуса, $R = u_\infty \delta^* / \nu$ — число Рейнольдса, вычисленное по толщине вытеснения, штрих обозначает производную по z .

При условии малости амплитуд основной волны a_0 и субгармоник a_+ и a_-

их зависимость от времени задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da_0}{dt} = \gamma_0 a_0 + K_0 a_+ a_- \quad (1.2)$$

$$\frac{da_+}{dt} = (\gamma_1 - i\delta) a_+ + K_1 a_0 a_-^*, \quad \frac{da_-}{dt} = (\gamma_1 - i\delta) a_- + K_1 a_0 a_+^*$$

$$\delta = \text{Re}(\Omega_1 - \omega), \quad \gamma_1 = \text{Im}(\Omega_1), \quad \gamma_0 = \text{Im}(\Omega_0)$$

$$K_0 = \frac{(w_0^+, K_{0p})}{(w_0^+, w_0'' - 4\alpha^2 w_0)}, \quad K_1 = \frac{(w_1^+, K_{1p})}{(w_1^+, w_1'' - (\alpha^2 + \beta^2) w_1)}, \quad (f, g) = \int_0^\infty f(z) g(z) dz$$

$$K_{0p}(z) = (8\alpha^2 w_1 + 4i\alpha u_1)(i\alpha u_1 - i\beta v_1) + (8\alpha^2 w_1' + 4i\alpha u_1') w_1$$

$$K_{1p}(z) = (\alpha^2 + \beta^2)(i\alpha u_0 w_1^* + (w_0 w_1^*)') + i\alpha (i\alpha u_0 u_1^* + w_0 u_1'^* + w_1^* u_0')' + \\ + i\beta (i\alpha u_0 v_1^* - w_0 v_1'^*)'$$

Здесь «*» обозначает комплексное сопряжение; функции w_0^+ , w_1^+ являются собственными функциями задачи, эрмитово сопряженной (1.1); u_0 , u_1 , v_1 соответствуют возмущениям, описываемым собственными функциями w_0 , w_1 задачи на собственные значения (1.1). Вывод уравнений (1.2) подробно описан в [1, 2]. В данной работе принята нормировка собственных функций $\max_z |u_0(z)| = \max_z |u_1(z)| = 1/2$, при которой модуль амплитуды волны равен максимальной по z амплитуде пульсаций продольной составляющей скорости.

В [3] путем численного решения (1.2) показано, что если в начальный момент времени задать $a_+ \neq a_-$, то достаточно быстро амплитуды наклонных волн выравниваются. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только симметричные субгармонические возмущения, для которых $a_+ = a_- \equiv a_1$.

В начале нелинейной стадии перехода $a_1 \ll a_0$ и наблюдается параметрическое усиление субгармоник на фоне основной волны. В этом случае (1.2) сводится к одному уравнению для амплитуды субгармоник a_1

$$\frac{da_1}{dt} = (\gamma_1 - i\delta) a_1 + K_1 a_0 a_1^*$$

При условии $|K_1 a_0| > |\delta|$ это уравнение имеет решение

$$a_1 = \text{const } e^{\sigma t}, \quad \sigma = \sqrt{|K_1 a_0|^2 - \delta^2} + \gamma_1 \quad (1.3)$$

Параметрическое усиление субгармонических возмущений более точно описывается в рамках теории вторичной неустойчивости, предложенной Гербертом [5, 6]. В ней рассматривается задача об устойчивости периодического течения V_b , задаваемого суперпозицией течения Блазиуса и плоской основной волны конечной амплитуды, по отношению к малым возмущениям V_p вида

$$V_p = \{u_p, v_p, w_p\}$$

$$\begin{pmatrix} u_p \\ w_p \end{pmatrix} = e^{\sigma t} \left[\begin{pmatrix} u_c \\ w_c \end{pmatrix} (z) \cos(\alpha x - \omega t) + \begin{pmatrix} u_s \\ w_s \end{pmatrix} (z) \sin(\alpha x - \omega t) \right] \cos \beta y$$

$$v_p = e^{\sigma t} [v_c(z) \cos(\alpha x - \omega t) + v_s(z) \sin(\alpha x - \omega t)] \sin \beta y$$

Подстановка полного поля скоростей $V = V_b + \varepsilon V_p$ в уравнения Навье — Стокса

дает задачу на собственные значения для величины σ , определяющей скорость нарастания вторичных возмущений.

При прямом численном моделировании перехода поле скоростей представляется в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^N \left\{ \begin{pmatrix} u_{0n} \\ w_{0n} \end{pmatrix} (z, t) + \sum_{m=1}^M \left[\begin{pmatrix} u_{mn} \\ w_{mn} \end{pmatrix} (z, t) e^{jm(\alpha x - c(t))} + (\text{c.c.}) \right] \right\} \cos n\beta y \quad (1.4)$$

$$v = \sum_{n=1}^N \left\{ v_{0n} (z, t) + \sum_{m=1}^M [v_{mn} (z, t) e^{jm(\alpha x - c(t))} + (\text{c.c.})] \right\} \sin n\beta y$$

После подстановки (1.4) в уравнения Навье — Стокса получается система уравнений для функций u_{mn} , v_{mn} , w_{mn} , которая решалась численно методом, описанным в [7]. Для моделирования субгармонического перехода в (1.4) выбиралось $M = 2$, $N = 1$. При этом основной волне соответствовала гармоника с индексами 20, а субгармоническим возмущениям — гармоника с индексами 11.

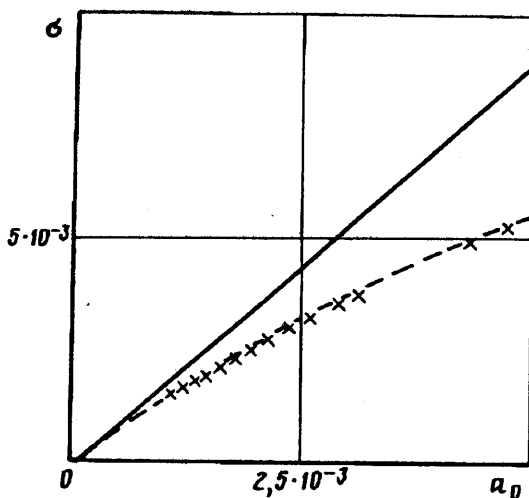
С целью выяснения адекватности описания нелинейной стадии перехода в рамках модели Крайка проводилось два вида тестов: проверка правильности описания процесса параметрического усиления вторичных возмущений и исследование правильности описания развития возмущений на более поздней стадии, когда основная волна и субгармоники имеют амплитуды одного порядка.

Все дальнейшие расчеты проводились при $R = 818$, $\alpha = 0,17$. Данные значения параметров близки к так называемой «точке ответвления симметричных триплетов от нейтральной кривой», в которой $R = 818$, $\alpha = 0,178$, $\beta = 0,19$ [8]. В этой точке основная волна и субгармоники, находясь в резонансе ($\Omega_0 = 2\Omega_1$), нейтральны ($\gamma_0 = \gamma_1 = 0$). Выбранное значение α слегка меньше, чем в «точке ответвления триплетов», обеспечивает очень медленное нарастание основной волны ($\gamma_0 = 9,3 \cdot 10^{-4}$) и слабое затухание субгармоник ($\gamma_1 = -2,1 \cdot 10^{-4}$). Поэтому при выбранных α , R субгармоники начинают усиливаться при амплитуде основной волны $a_0 \sim 10^{-4}$, что дает возможность исследовать нелинейные эффекты, начиная с очень малых амплитуд, когда использованные при выводе (1.2) предположения о малости a_0 и a_1 заведомо выполняются.

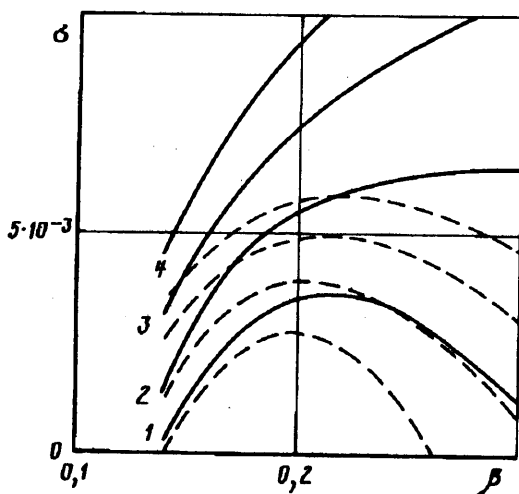
Зависимости инкрементов нарастания вторичных возмущений при их параметрическом усилении σ от амплитуды основной волны a_0 при значении поперечного волнового числа $\beta = \beta_r = 0,19$, соответствующем условию резонанса, показаны на фиг. 1. На этой фигуре сплошной кривой показаны результаты расчетов по модели Крайка (формула (1.3)), штриховой кривой — результаты теории Герберта, точками нанесены инкременты нарастания, найденные из прямого численного моделирования по формуле $\sigma = d \ln A_1 / dt$, где $A_1(t) = 2 \max |u_{11}(z, t)|$.

Из фиг. 1 видно полное совпадение результатов теории Герберта и прямого численного моделирования, что подтверждает вывод [9] о правильном описании параметрического усиления вторичных возмущений в рамках этой теории. Поэтому ниже результаты теории Герберта будут рассматриваться как точные. Инкременты нарастания, найденные по модели Крайка при малых значениях a_0 , близки к рассчитанным по теории Герберта, однако при увеличении амплитуды основной волны модель Крайка дает завышенные значения σ , причем при $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ расхождение достигает 30%.

Зависимости σ от поперечного волнового числа β при амплитудах основной волны $a_0 = 0,002, 0,003, 0,004, 0,005$ показаны кривыми 1—4 на фиг. 2 (результаты, полученные из моделей Крайка и Герберта, обозначены аналогично фиг. 1). Из фиг. 2 видно, что при $\beta < \beta_r$ расхождение результатов моделей Крайка и Герберта меньше, а при $\beta > \beta_r$ больше, чем в точке резонанса. В целом зависимость



Фиг. 1

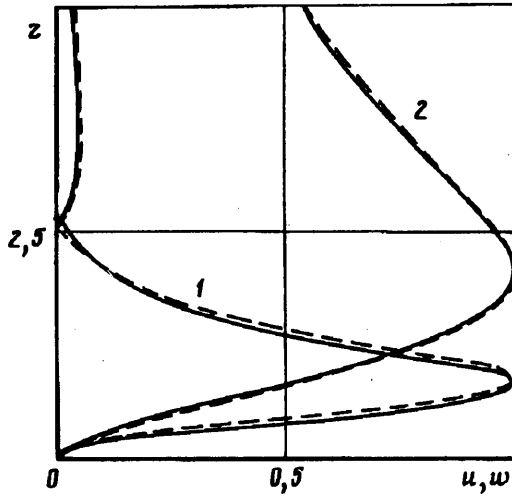


Фиг. 2

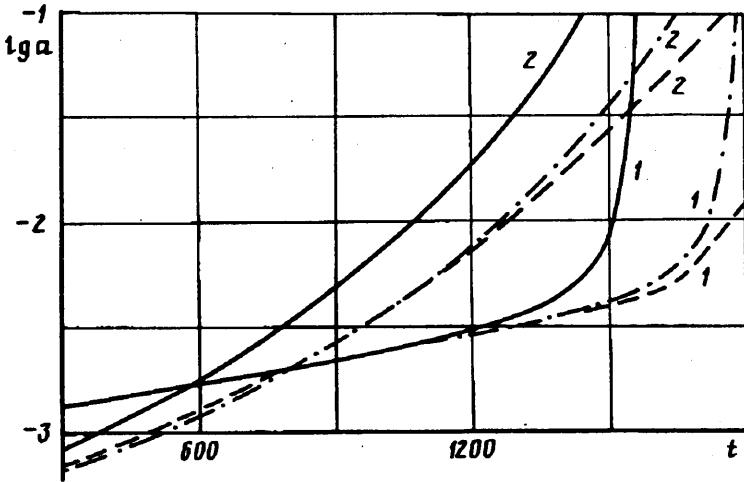
$\sigma(\beta)$ удовлетворительно описывается в рамках модели Крайка только при $a_0 = 0,002$.

На фиг. 3 показаны распределения амплитуд пульсаций скорости вторичных возмущений по нормальной к стенке координате z . Здесь кривые 1 и 2 соответствуют пульсациям продольной u и вертикальной w составляющих скорости. Для модели Крайка данные зависимости определяются собственными функциями уравнения Орра — Зоммерфельда. Практически полное совпадение форм вторичных возмущений, полученных из моделей Крайка и Герберта, опровергает широко распространенное мнение о том, что теория Герберта дает усиление возмущений особой формы, непохожих на собственные функции уравнения Орра — Зоммерфельда [10].

Для проверки правильности описания развития возмущений на полностью нелинейном этапе, когда основная волна и субгармоники, имея сравнимые амплитуды, влияют друг на друга, был выполнен расчет развития возмущений при $\beta = \beta_c = 0,19$ и начальных амплитудах $a_0(0) = 10^{-3}$, $a_1(0) = 5 \cdot 10^{-4}$. Результаты



Фиг. 3



Фиг. 4

этого расчета в виде зависимостей логарифмов амплитуд основной волны (кривые 1) и субгармоник (кривые 2) от времени, полученных по модели Крайка (сплошные кривые) и из прямого численного моделирования (штриховые кривые), приведены на фиг. 4. Из этих зависимостей видно, что модель Крайка дает более быстрый рост субгармоник, который приводит к более раннему их влиянию на развитие основной волны, чем следует из прямого моделирования. Поэтому для удобства сравнения результатов на полностью нелинейном этапе на фиг. 4 штрихпунктирными кривыми нанесены зависимости $\lg |a_0(t)|$ и $\lg |a_1(t)|$, рассчитанные по модели Крайка, но смещенные так, чтобы точка равенства амплитуд основной волны и субгармоник совпадала с аналогичной точкой для результатов прямого моделирования. После такого совмещения, компенсирующего расхождение в инкрементах нарастания субгармоник при их параметрическом усилении, становится видно, что сразу после отклонения кривой $\lg |a_0(t)|$ от линейного закона начинается очень сильное расхождение результатов модели Крайка и прямого моделирования.

Параметры в последнем расчете подбирались с целью обеспечения полностью нелинейного развития возмущений при минимально возможных амплитудах основной волны и субгармоник. Поэтому из полученных результатов можно сделать вывод о том, что модель Крайка ни при каких условиях не обеспечивает количественного описания развития возмущений на полностью нелинейной стадии перехода.

Проведенная проверка применимости модели Крайка позволяет считать, что данная модель дает верные результаты до амплитуд основной волны и субгармоник порядка 10^{-3} . В экспериментах по исследованию субгармонического перехода [4, 10] характерные уровни возмущений составляют 10^{-2} и, следовательно, модель Крайка непригодна для количественного описания этих экспериментов. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17613).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Craik A. D.* Non-linear resonant instability in boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 50. № 2. P. 393—413.
2. *Зельман М. Б.* О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.* 1974. Вып. 3. № 13. С. 16—21.
3. *Зельман М. Б., Масленникова И. И.* Об эффектах резонансных взаимодействий волновых возмущений в пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1984. № 4. С. 23—30.
4. *Качанов Ю. С., Левченко В. Я.* Резонансное взаимодействие возмущений при переходе к турбулентности в пограничном слое: Препринт № 10. М.: ИТПИМ СО АН СССР, 1982. 55 с.
5. *Herbert T.* Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances // *Phys. Fluids.* 1983. V. 26. № 4. P. 871—874.
6. *Herbert T.* Analysis of the subharmonic rout to transition in boundary layer // *AIAA. Pap.* 1984. № 0009. 9 p.
7. *Устинов М. В.* Исследование субгармонического перехода в плоском канале методом прямого численного моделирования // *Изв. РАН. МЖГ.* 1993. № 3. С. 46—53.
8. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
9. *Singer B., Reed H. L., Ferziger J. H.* Investigation of the effects of initial disturbances on plane channel transition // *AIAA Pap.* 1986. № 0433. 10 p.
10. *Corke T. C., Mangano R. A.* Resonant growth of three-dimensional modes in transitioning Blasius boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 209. P. 93—150.

Москва

Поступила в редакцию
19.VII.1993