

УДК 533.95

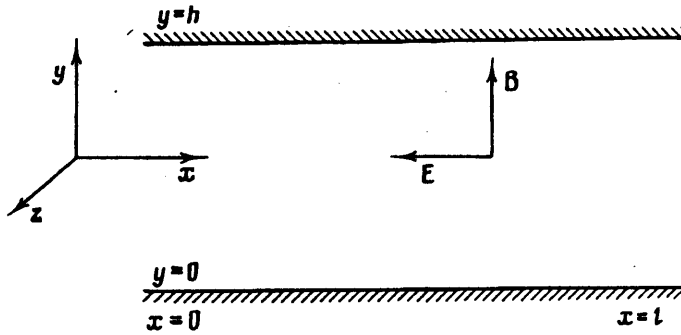
© 1994 г. К. Е. УЛЫБЫШЕВ

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОННОЙ КОМПОНЕНТЫ ПЛАЗМЫ В ПЛАЗМЕННЫХ УСКОРИТЕЛЯХ С ЗАМКНУТЫМ ДРЕЙФОМ

Рассматривается динамика электронной компоненты плазмы в плазменных ускорителях с замкнутым дрейфом и протяженной зоной ускорения при ряде упрощающих предположений (сильное однородное магнитное поле, упругое диффузное рассеяние электронов на стенках канала и т. д.). Получены точные решения кинетического уравнения для электронов в различных предельных случаях. Сделано обобщение полученных результатов на случай слабо неоднородного магнитного поля.

Данная задача возникает из теории плазменных ускорителей с замкнутым дрейфом и протяженной зоной ускорения. Данное устройство представляет собой кольцевой канал прямоугольного сечения, помещенный в сильное радиальное магнитное поле, с торцов которого расположены анод и катод. Часть электронов, испущенных катодом, проникает в канал, где ионизирует атомы нейтрального газа, поступающие со стороны анода. Образующиеся при этом положительные ионы ускоряются электрическим полем и вытекают в виде струи, заряд которой нейтрализуется оставшейся частью электронов, испущенных катодом, но не попавших в канал. Плазма является разреженной, т. е. должна описываться системой уравнений, состоящей из уравнений Больцмана для электронов, ионов и нейтралов и уравнения Пуассона для самосогласованного электрического поля. Ни численное, ни аналитическое решения данной системы в общем виде на сегодняшний день не представляются возможными. Численное решение системы кинетических уравнений, описывающих динамику тяжелых частиц, было дано в [1] (величины, определяемые из динамики электронной компоненты, предполагались известными). Наибольшие трудности представляет описание кинетики электронов из-за сложности формы траекторий частиц в скрещенных магнитном и электрическом полях, а также из-за необходимости учитывать многократные отражения электрона от диэлектрических стенок канала при перемещении поперек магнитного поля. (Ларморовский радиус электрона является малым по сравнению с характерным размером канала, для иона же выполняется обратное соотношение.) Для анализа динамики электронной компоненты был предложен ряд подходов, основанных на некоторых упрощающих предположениях. Один из таких подходов, предложенный в [2, 3], и развивается в настоящей работе.

1. Постановка задачи. Рассматривается динамика электронов в плоском канале прямоугольного сечения (фиг. 1). Сечение канала имеет длину l и ширину h , $h \sim l$. Напротив входа в канал ($x = 0$) располагается анод ($x = l$), со стороны которого в канал поступает нейтральный газ, с двух других сторон канал ограничен диэлектрическими стенками. Канал помещен в сильное однородное магнитное поле, перпендикулярное стенкам. Отношения характерного ларморовского радиуса электрона r к l и изменения потенциальной энергии электрона на расстояниях порядка r к его кинетической энергии, а также l к характерной длине свободного пробега электронов λ предполагаются много меньше единицы. Магнитное поле считаем заданным (внешним), электрическое —



Фиг. 1

направленным вдоль x и не зависящим от y : $E = (E_x, 0, 0)$. На входе в канал задается функция распределения электронов по скоростям, на аноде — условие отсутствия потока электронов в сторону рассматриваемой области, что означает обращение в ноль функции распределения для частиц с $v_x < 0$. На стенках канала ставится условие упругого диффузного (с равной вероятностью в единицу телесного угла) отражения электронов.

2. Уравнение для функции распределения электронов на стенке. Граничное условие для f на стенке (в силу симметрии задачи, вытекающей из идентичности свойств стенок, а также предполагаемой независимости f от y при $x = 0$, рассмотрение можно провести только для нижней стенки) при сделанных выше предположениях имеет вид (см. [3])

$$f^-(v^2, x) = -\frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} f^+(v, x) \cos \theta d\Omega; \quad f = f^+, \quad v_y < 0;$$

$$f = f^-, \quad v_y > 0; \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\psi;$$

$$v_y = v \cos \theta, \quad v_x = v \sin \theta \cos \psi, \quad v_z = v \sin \theta \sin \psi; \quad 0 < \psi < 2\pi, \quad \pi/2 < \theta < \pi \quad (2.1)$$

Для того чтобы выразить f^+ через f^- , воспользуемся уравнением Больцмана

$$\frac{df}{dt} = v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{e}{m} \left(E_x + \frac{1}{c} [vB]_x \right) \frac{\partial f}{\partial v_x} = S$$

Здесь S — интеграл столкновений. Запишем данное уравнение в интегральной форме

$$f^+(v, x, y = 0) = f^-(v', x', y = h) + \int_{h/v_y}^0 S(\mathbf{r}^*(t), \mathbf{v}^*(t)) dt \quad (2.2)$$

$$m \frac{dv^*}{dt} = -e \left(E + \frac{1}{c} [v^*B] \right), \quad \mathbf{v}^* = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt}, \quad t = 0: \mathbf{v}^* = \mathbf{v}, \quad \mathbf{r}^* = (x, 0, z)$$

$$t = h/v_y; \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{v}', \quad \mathbf{r}^* = (x', h, z')$$

Решая уравнения движения электрона в предположении, что электрическое поле мало меняется на расстояниях $\sim r = v/\omega$, получим

$$v^2 = v^2 + \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad x' = x + \Delta x, \quad \varphi(x) = -\frac{2e}{m} \int E_x(x) dx,$$

$$\Delta x = \frac{v_x}{\omega} \sin\left(\frac{\omega h}{v_y}\right) - \frac{v_z - u}{\omega} \cos\left(\frac{\omega h}{v_y}\right) + \frac{v_z - u}{\omega}, \quad \omega = \frac{eB}{mc}, \quad u = \frac{cE_x}{B} \quad (2.3)$$

Из (2.1) с учетом (2.2) и (2.3) получаем уравнение для f

$$f^-(v^2, x) + S_1(v^2, x) = -\frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} f^-(v^2 + \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), x + \Delta x) \cos \theta d\Omega \quad (2.4)$$

$$S_1(v^2, x) = \frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} \left\{ \int_{h/v}^0 S(r^*(t), v^*(t)) dt \right\} \cos \theta d\Omega \quad (2.5)$$

Введем новые переменные: $\xi = x, \eta = v^2 - \varphi(x)$. Разлагая $f^-(v^2 + \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), x + \Delta x)$ в ряд Тейлора по малой $\sim r$ величине Δx с точностью до членов второго порядка включительно и подставляя данное разложение в уравнение (2.4), получаем

$$\langle \Delta x \rangle \frac{\partial f^-}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \langle \Delta x^2 \rangle \frac{\partial^2 f^-}{\partial \xi^2} = S_1 \quad (2.6)$$

$$\langle \Delta x \rangle = -\frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} \Delta x \cos \theta d\Omega = \frac{1}{2} \frac{\varphi'}{\omega^2}, \quad \langle \Delta x^2 \rangle = -\frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} (\Delta x^2) \cos \theta d\omega = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\omega^2} \quad (2.7)$$

Величины $\langle \Delta x \rangle$ и $\langle \Delta x^2 \rangle$ вычислены с точностью до членов $\sim 1/\omega^2$. Вычислим теперь правую часть уравнения (2.6), которая, очевидно, зависит от функции распределения электронов в канале. Так как $\lambda \gg h$, то в столкновительные члены можно подставить функцию распределения, вычисленную без учета столкновений. Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, получим

$$f(x, y, v) = f^-(v^2 + \varphi(x + \Delta x^*) - \varphi(x), x + \Delta x^*) = f^-(v^2, x) + \frac{\partial f^-}{\partial \xi} \Delta x^* \quad (2.8)$$

$$\Delta x^* = -\frac{v_x}{\omega} \sin \omega t^* - \frac{v_z - u}{\omega} \cos \omega t^* + \frac{v_z - u}{\omega}, \quad t^* = \frac{y - h}{v}, \quad v_y < 0;$$

$$t^* = \frac{y}{v}, \quad v_y > 0$$

Таким образом, в первом приближении f в канале является изотропной и не зависит от y , совпадая с функцией распределения частиц, уходящих от стенки. Из этого следует, что на уравнение (2.6) можно смотреть как на уравнение относительно функции распределения в канале, и далее индекс минус в данном уравнении будем опускать. Из того, что функция распределения в канале изотропна, следует также, что интеграл столкновений, зависящий от $f(x, y, v)$, может зависеть от скорости только через $v^2: S = S(v^2, x)$. Из формулы (2.5) имеем

$$S_1 = S_1(v^2, x) = -\frac{2h}{v} S(v^2, x) \quad (2.9)$$

Подставляя в уравнение (2.6) выражения (2.7) и (2.9) и проводя несложные преобразования, получаем

$$Lf \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\eta + \varphi(\xi))^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = -8h\omega^2 \sqrt{\eta + \varphi(\xi)} S(\eta + \varphi(\xi), \xi) \quad (2.10)$$

Граничные условия к данному уравнению: при $x = 0$ функцию распределения считаем заданной: $f = f_0(v^2)$; при $x = l$ (на аноде) функция распределения электронов, летящих от анода, должна обращаться в ноль, а так как f в первом приближении является изотропной, то данному условию можно удовлетворить только в том случае, если положить $f(x = l) = 0$. Кроме того, область, в которой ищется решение (в координатах x, v^2), ограничена прямой $v^2 = 0$, следовательно, требуется дополнительное граничное условие, которое будет получено ниже.

3. Вычисление потоков электронов. Найдем ток через канал (на единицу

координаты z), создаваемый группой электронов, обладающих данной энергией, в некотором сечении x

$$\delta J_x = \int_0^h \delta j_x dy, \quad \delta j_x = v^2 dv \int_{(4\pi)} f(x, y, v) v_x d\Omega \quad (3.1)$$

Для $f(x, y, v)$ можно взять выражение (2.8), вычисленное без учета столкновений. Изотропная часть функции не дает вклада в ток, из выражения для Δx^* можно взять только первое слагаемое, так как при осреднении по углам остальные слагаемые обратятся в ноль, отсюда

$$\delta j_x = -\frac{\partial f}{\partial \xi} v^2 dv \int_{(4\pi)} \frac{v_x^2}{\omega} \sin \omega t^* d\Omega \quad (3.2)$$

Подставляя данное выражение в формулу для δJ_x и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\delta J_x = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\pi}{2} \frac{\partial f}{\partial \xi} v^5 dv = -\frac{\pi}{4} \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} v^4 dv^2 \quad (3.3)$$

На основании (3.3) уравнению (2.10) после несложных преобразований может быть придан простой физической смысл

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_v}{\partial (v^2)} = 2\pi h v S; \quad \Gamma_x = -\frac{\pi}{4} \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} v^4, \quad \Gamma_v = \varphi'(x) \Gamma_x \quad (3.4)$$

Величины Γ_x и Γ_v — компоненты вектора плотности потока вещества в пространстве (x, v^2) . Таким образом, (3.4) представляет собой уравнение неразрывности в координатно-энергетическом пространстве. Из (3.3) следует, что δJ_x не зависит от ширины канала. Данный результат согласуется с выводами работы [2], где показано, что если процесс переноса электронов поперек сильного магнитного поля обусловлен столкновениями со стенками, то весь ток оказывается сосредоточенным в узком пристеночном слое.

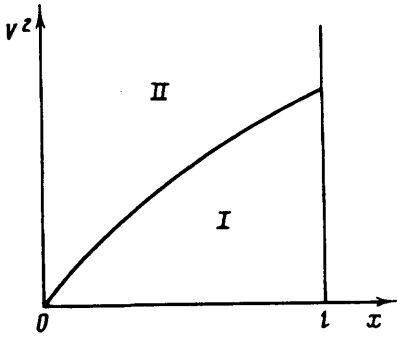
4. Анализ и решение уравнения для функции распределения. Пусть правая часть уравнения (2.10) — заданная функция от ξ, η . Тогда в переменных (x, v^2) оно является уравнением параболического типа, характеристики которого кривые $\eta = v^2 - \varphi(x) = \text{const}$. Из того, что в дифференциальный оператор L переменная η входит как параметр, следует, что решение также должно содержать η только в качестве параметра, следовательно, можно рассматривать решения при различных η независимо друг от друга. В переменных (x, v^2) рассмотрим область, в которой будем искать решение (фиг. 2). Положим $\varphi(0) = 0$ и проведем из начала координат характеристику $\eta = 0$, которая разобьет данную область на две подобласти: (I) и (II), где область (II) отвечает положительным значениям η , область (I) — отрицательным. В области (II) характеристики начинаются при $\xi = 0$ и оканчиваются при $\xi = l$. В данной области требуется ставить граничные условия, указанные ранее

$$\xi = 0 : f = f_0(v^2 - \varphi(0) + \varphi(0)) = f_0(\eta); \quad \xi = l : f = 0 \quad (4.1)$$

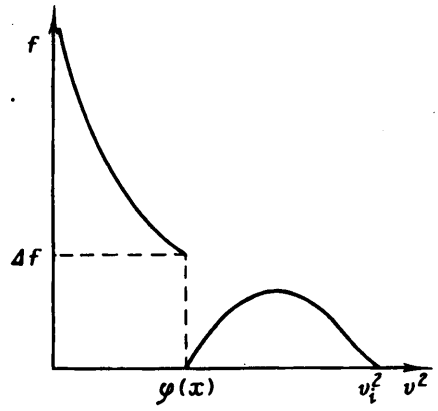
Интегрируя уравнение (2.10) с учетом условий (4.1), получим

$$f(\xi, \eta) = -8h\omega^2 \int_0^\xi \frac{dt}{(\varphi(t) + \eta)^2} \int_0^t \sqrt{\varphi(\tau) + \eta} S(\varphi(\tau) + \eta, \tau) d\tau + g(\eta) I(\xi, \eta) + f_0(\eta)$$

$$g(\eta) = \frac{8h\omega^2}{I(l, \eta)} \int_0^l \frac{dt}{(\varphi(t) + \eta)^2} \int_0^t \sqrt{\varphi(\tau) + \eta} S(\varphi(\tau) + \eta, \tau) d\tau - \frac{f_0(\eta)}{I(l, \eta)} \quad (4.2)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$I(a, \eta) = \int_0^a \frac{dt}{(\varphi(t) + \eta)^2}$$

Полученными формулами и дается решение уравнения (2.10) с заданной правой частью в области (II). Рассмотрим решение в области (I). Проинтегрируем уравнение (2.10) от $\xi' = \varphi^{-1}(-\eta)$, при котором $v^2 = 0$, до текущего значения ξ (вводя обратную функцию φ^{-1} , здесь и далее потенциал предполагаем монотонно возрастающей функцией от x)

$$(\varphi(\xi) + \eta)^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} = -8h\omega^2 \int_{\varphi^{-1}(-\eta)}^{\xi} \sqrt{\varphi(t) + \eta} S(\varphi(t) + \eta, t) dt$$

Интегрируя второй раз с учетом условия $f(x=1) = 0$, получим

$$f(\xi, \eta) = 8h\omega^2 \int_{\xi}^1 \frac{dt}{(\varphi(t) + \eta)^2} \int_{\varphi^{-1}(-\eta)}^t \sqrt{\varphi(\tau) + \eta} S(\varphi(\tau) + \eta, \tau) dt \quad (4.3)$$

При выводе формулы (4.3) было сделано предположение, что $(\varphi(\xi) + \eta) \partial f / \partial \xi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \varphi^{-1}(-\eta)$, т. е. было наложено определенное условие на поведение $\partial f / \partial \xi$ при $\xi \rightarrow \varphi^{-1}(-\eta)$. Данное условие можно получить и непосредственно из физических соображений. Действительно, $(\varphi(\xi) + \eta) \partial f / \partial \xi \sim \Gamma_v$, поток частиц через нижнюю границу области (I) равен нулю, откуда следует справедливость сделанного выше предположения.

Оценим теперь влияние столкновений на функцию распределения. Для этого приведем уравнение (2.10) к безразмерному виду

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left((\eta^* + \varphi^*(\xi^*))^2 \frac{\partial f^*}{\partial \xi^*} \right) = -\chi \sqrt{\eta^* + \varphi^*(\xi^*)} S^*, \quad \chi = 8 \frac{h}{\lambda} \frac{P}{r^2} \quad (4.4)$$

Здесь $f = f^* f_c$, $\xi = \xi^* l$, $\eta = \eta^* v_c^2$, $S = S^* f_c v_c / \lambda$, f_c и v_c — характерные значения функции распределения и скорости частиц, λ — средняя длина свободного пробега. Из (4.4) видно, что в сильных магнитных полях влияние столкновений на функцию распределения может быть велико даже при λ , много большей характерного размера канала. Этот факт объясняется тем, что при перемещении вдоль x на расстояние δx ($\delta x \gg r$) путь, проходимый частицей, оказывается много большим δx , поскольку из-за малости ларморовского радиуса при перемещении поперек магнитного поля частице приходится многократно проходить расстояние h между верхней и нижней стенками канала. Иначе говоря, как легко показать, параметр χ имеет смысл отношения длины канала к характерной длине свободного

пробега λ_x частицы вдоль x , причем $\lambda_x \sim \lambda^2/\beta$. Отсюда ясно, почему в данных системах ионизация играет существенную роль, несмотря на разреженность плазмы.

При выводе формул (4.2) — (4.3) функция $S(v^2, x)$ полагалась заданной. На самом деле S зависит от f довольно сложным образом и в общем случае для решения уравнения (2.10) требуется привлечение численных методов. Аналитическое решение данного уравнения возможно получить в двух предельных случаях: при $\chi \rightarrow 0$, а также при $\chi \rightarrow \infty$ и правой части, описывающей ионизацию атома электронным ударом. Решение однородного уравнения как предельный случай решения неоднородного уравнения при $\chi \rightarrow 0$ можно получить, положив в формулах (4.2) — (4.3) $S = 0$

$$\eta > 0 : f(\xi, \eta) = f_0(\eta) \left[1 - \frac{I(\xi, \eta)}{I(l, \eta)} \right]; \quad \eta < 0 : f(\xi, \eta) = 0 \quad (4.5)$$

При $\varphi' = \text{const}$ можно легко получить следующее выражение для f

$$f(v^2, x) = f_0(v^2 - \varphi) \frac{v^2 - \varphi}{v^2} \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

Из (3.3) при $\varphi' = \text{const}$

$$J_x = \frac{\pi}{4\omega^2} \varphi' \int_0^\infty f_0(\eta) \eta d\eta + \frac{\pi}{4\omega^2 l} \int_0^\infty f_0(\eta) \eta^2 d\eta$$

Первое слагаемое описывает ток, обусловленный наличием электрического поля, второе — ток, возникающий из-за диффузии электронов от $x = 0$ к аноду.

Во втором предельном случае, как легко показать, вся ионизация производится электронами с энергией, близкой к пороговой, а рождающиеся электроны имеют энергию, близкую к нулевой. Отсюда следует, что предельное выражение для S имеет вид $S(v^2, x) = S^+ + S^-$

$$S^- = -q(x) \frac{\delta(v - v_i)}{4\pi v^2}, \quad S^+ = 2q(x) \frac{\delta(v)}{4\pi v^2}, \quad v_i = \sqrt{\frac{2W_i}{m}}$$

Здесь W_i — энергия ионизации. Величина $q(x)$ представляет собой частоту актов ионизации в единице объема, которая может быть найдена либо из сохранения вещества в пространстве (x, v^2) , либо из рассмотрения решения уравнения (4.4) для электронов с энергией большей пороговой, во втором предельном случае, при этом $f(v_i^2) \rightarrow 0$ при $\chi \rightarrow \infty$. Рассмотрим случай $\varphi(l) < v_i^2$. В данном случае вычисления дают

$$q(x) = \frac{\pi}{4h\omega^2} \frac{f_0(v_i^2 - \varphi(x))}{I(x, v_i^2 - \varphi(x))} \varphi'(x) \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что частота ионизации не зависит ни от концентрации нейтралов, ни от сечения реакции. Объяснение этому может быть дано следующее. На частоту ионизации влияют два фактора — частота столкновений электронов с атомами и скорость нагрева электронов в электрическом поле. Первый фактор от магнитного поля не зависит, второй уменьшается с ростом ω как $1/\omega^2$. Из этого ясно, что в предельном случае $\omega \rightarrow \infty$ частота ионизации будет определяться скоростью второго, т. е. самого медленного процесса, которая не зависит от названных величин. Область решения разобьется на три подобласти, определяемые неравенствами

$$\eta < 0, \quad v^2 > 0; \quad 0 < \eta < v_i^2 - \varphi(l); \quad \eta > v_i^2 - \varphi(l), \quad v^2 < v_i^2$$

В области (III) решение определяется из однородного уравнения (2.10) с учетом условий $f(v_i^2, x) = 0, f(v^2, 0) = f_0(v^2)$, что дает

$$f(\xi, \eta) = f_0(\eta) \left[1 - \frac{I(\xi, \eta)}{I(\varphi^{-1}(\nu^2 - \eta), \eta)} \right] \quad (4.7)$$

В области (II) решение известно и дается формулой (4.5) при $\eta > 0$. Чтобы получить решение в области (I), в формулу (4.3) подставим S в виде $S(\nu^2, x) = 2q(x) \delta(\nu - \nu^2)/4\pi\nu^2$, а затем устремим ν^0 к нулю

$$f = \frac{8h\omega^2}{\pi} \frac{q(\varphi^{-1}(-\eta))}{\varphi'(\varphi^{-1}(-\eta))} \int_{\xi}^1 \frac{dt}{(\varphi(t) + \eta)^2} \quad (4.8)$$

Здесь q вычисляется по формуле (4.6). Так как $q \sim 1/h\omega^2$, то f не зависит ни от h , ни от ω . Также полезно заметить, что f имеет особенность при $\nu^2 \rightarrow 0$: $f \sim 1/\nu^2$, но интеграл от $4\pi\nu^2 f d\nu$ сходится, так что при усреднении данная особенность трудностей не вызывает. Примерный вид функции распределения показан на фиг. 3. При $\nu^2 = \varphi(x)$ функция распределения может в общем случае терпеть разрыв.

$$\Delta f = 2\nu^4 \left. \frac{\partial f_0}{\partial(\nu^2)} \right|_{\nu^2=\nu_0^2} \varphi'(0) \int_x^1 \frac{dt}{(\varphi(t))^2} \quad (4.9)$$

Такое необычное поведение функции распределения объясняется тем, что не были учтены электрон-электронные столкновения, которые должны приводить к «сглаживанию» функции, а также видом функции $S(\nu^2, x)$ при $\chi \rightarrow \infty$.

Подход, использованный при решении данной задачи, может быть обобщен на случай магнитного поля, однородного по направлению, но изменяющегося вдоль x по величине. Уравнение для f при этом примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{(\varphi(\xi) + \eta)^2}{\omega^2(\xi)} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] = -8h \sqrt{\varphi(\xi) + \eta} S \quad (4.10)$$

Изложенный в данной работе подход позволяет решать задачи описания электрического разряда в сильном поперечном магнитном поле, когда основной вклад в процесс переноса электронов поперек магнитного поля вносит пристеночная проводимость. Преимуществом данного подхода является возможность кинетического описания разряда, которое из-за разреженности плазмы более корректно, чем гидродинамическое. Основная идея данного подхода, заключающаяся в уменьшении размерности задачи путем сведения уравнения Больцмана к уравнению относительно функции распределения электронов на стенке и использовании условия малости отношения ларморовского радиуса электрона к характерному размеру задачи, позволяет надеяться на его применение к случаю существенно неоднородных магнитных полей, где поле зависит уже от двух переменных.

Автор выражает глубокую благодарность А. Б. Ватажину и Г. А. Любимову за активное участие в обсуждении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков Б. И., Свешников А. Г., Якунин С. А. О математическом моделировании физических процессов в плазмооптических системах // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 2. С. 265—268.
2. Морозов А. И. Эффект пристеночной проводимости в хорошо намагниченной плазме // ПИМТФ. 1968. № 3. С. 19—22.
3. Морозов А. И., Шубин А. П. Кинетика электронов в режиме пристеночной проводимости. 1, 2 // Физика плазмы. 1984. Т. 10. № 6. С. 1262—1274.