

УДК 533.72

© 1994 г. И. Н. ИВЧЕНКО, С. К. ЛОЯЛКА, Р. В. ТОМПСОН

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

Разработан метод для вычисления скобочных интегралов, содержащих разрывную двухстороннюю максвелловскую функцию распределения. Этот метод позволяет получить аналитические решения для различных линеаризованных систем моментных уравнений при всех числах Кнудсена. Рассмотрена частная проблема переноса тепла от нагретой сферы. Введены новые специальные функции, связанные с конкретной моментной системой, для которых приведена таблица численных значений. Приведены также приближенные аналитические выражения для вычисления скобочных интегралов.

Идея, высказанная Мотт-Смитом [1], об использовании двухсторонних максвелловских распределений для анализа плоских ударных волн, оказалась плотоворной и для других задач.

После работы [2], в которой для замыкания системы моментных уравнений предложены разрывные двухсторонние максвелловские распределения, отражающие характерные черты как свободномолекулярных, так и континуальных распределений, сформировался общий подход к решению граничных задач теории при всех числах Кнудсена с использованием моментных методов. Однако реализация этой общей схемы наталкивается на математические трудности, связанные с вычислением моментов интеграла столкновений, которые до сих пор не преодолены.

Больший прогресс достигнут в решении плоских граничных задач благодаря использованию как аналитических [3, 4], так и численных методов [5, 6]. Численные результаты цитируемых работ позволяют провести анализ точности различных приближенных методов для плоских задач.

В случае неплоской геометрии указанные выше трудности привели к использованию либо максвелловской модели межмолекулярного взаимодействия [2], либо различных приближенных методов вычисления моментов интеграла столкновений [7—9]. Решение ряда граничных задач теории переноса в наиболее полной постановке при всех числах Кнудсена получено численно лишь в последнее время [10, 11].

В настоящей работе описан метод вычисления моментов интеграла столкновений, который содержит разрывные двухсторонние максвелловские распределения и позволяет получить аналитическое решение моментной системы. Хотя конкретные вычисления реализованы для модели жестких упругих сфер, развитый подход может быть обобщен и на случай произвольных моделей потенциала межмолекулярных взаимодействий, чего невозможно сделать в предшествующих анализах. Особенности метода показаны на примере решения одной классической задачи переноса тепла от нагретой сферы. Введенные новые специальные функции позволяют получить аналитическую зависимость потока тепла от обратного числа Кнудсена. Аналогичная задача для цилиндрической геометрии была рассмотрена ранее [12].

1. Постановка задачи. Рассмотрим сферу радиуса R , имеющую температуру $T_0 + \Delta T$ и расположенную в газе, который на больших расстояниях от сферы

имеет температуру T_0 и численную плотность n_0 . Предполагается, что $\Delta T \ll T_0$, что позволяет линеаризовать задачу.

Для данной радиально-симметричной задачи моментное уравнение переноса любого молекулярного признака $Q(v)$ имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \int f v_i Q(v) dv \right) - \frac{1}{r} \int \left\{ [v_\theta^2 + v_\phi^2] \frac{\partial Q(v)}{\partial v_r} + [v_\phi^2 \operatorname{ctg} \vartheta - v_\theta v_\phi] \frac{\partial Q(v)}{\partial v_\theta} - [v_\theta v_\phi + v_\theta v_\phi \operatorname{ctg} \vartheta] \frac{\partial Q(v)}{\partial v_\phi} \right\} f dv = R \Delta Q(v), \quad (1.1)$$

где r — безразмерная радиальная координата ($r = r'/R$), v_r , v_θ и v_ϕ — декартовы координаты скорости молекулы, $\Delta Q(v)$ — момент интеграла столкновений.

Для замыкания моментной системы, полученной из (1.1), в четырехмоментном приближении используется разрывная двухсторонняя функция распределения [2]. В полном пространстве скоростей для этой функции распределения удобно использовать представление [9]

$$f = f^{(0)} \{1 + \frac{1}{2} v^+ + \frac{1}{2} (c^2 - \frac{3}{2}) \tau^+ + [\frac{1}{2} v^- + \frac{1}{2} (c^2 - \frac{3}{2}) \tau^-] \operatorname{sign}(c_r - c_r^*)\} \quad (1.2)$$

$$f^{(0)} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} e^{-c^2}, \quad c = \left(\frac{m}{2k T_0} \right)^{1/2} v$$

$$v^\pm(r) = v_2(r) \pm v_1(r), \quad \tau^\pm(r) = \tau_2(r) \pm \tau_1(r)$$

где $v_i(r)$ и $\tau_i(r)$ ($i = 1, 2$) — характеристические плотности и температуры вне и внутри конуса влияния [2], на поверхности которого функция распределения разрывна в пространстве скоростей. Для данной геометрии задачи поверхность конуса влияния образуется прямыми, проходящими через заданную точку $M(r)$ и являющимися касательными к поверхности сферы. В скоростном пространстве поверхность разрыва функции распределения выражается в виде

$$c_r = c_r^*, \quad c_r^* = c \cos \chi_0, \quad \chi_0 = \arcsin r^{-1} \quad (1.3)$$

Моменты функции распределения удобно вычислять в сферических координатах в пространстве скоростей. Связь между декартовыми и сферическими координатами дается формулами

$$c_r = c \cos \chi, \quad c_\theta = c \sin \chi \cos \beta, \quad c_\phi = c \sin \chi \sin \beta \quad (1.4)$$

Внутри и вне конуса влияния (области 2 и 1 в пространстве скоростей) угол χ удовлетворяет соотношениям $0 \leq \chi \leq \chi_0$, $\chi_0 < \chi \leq \pi$. При вычислении моментов функции распределения использовано соотношение [2]

$$n \langle Q(v) \rangle = \int_0^\infty f_1 Q(v) dv + \int_0^\infty v^2 dv \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\chi_0} (f_2 - f_1) Q(v) \sin \chi d\chi \quad (1.5)$$

где интегрирование в первом слагаемом осуществляется по всему пространству скоростей. Используя функцию распределения (1.2) в уравнении (1.1), в котором $Q(c) = 1, c_r, c^2, c_r c^2$, легко получить следующую систему моментных уравнений:

$$\frac{d}{dr} \left(v^- + \frac{1}{2} \tau^- \right) = 0, \quad \frac{d}{dr} (v^+ + \tau^+) = 0, \quad \frac{d}{dr} \left(v^- + \frac{3}{2} \tau^- \right) = 0$$

$$\frac{d}{dr} (v^+ + 2\tau^+) = \frac{4\sqrt{2}}{5n_0} \left(\frac{m}{kT_0} \right)^{1/2} R \Delta c^2 c_r \quad (1.6)$$

$$\Delta c^2 c_r = -n_0^2 \{ \frac{1}{2} (v^- - \frac{3}{2} \tau^-) [\operatorname{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] +$$

r	$I^{*(1)}(r)$	r	$I^{*(1)}(r)$	r	$I^{*(1)}(r)$
1,00	9,982E-1	1,50	4,440E-1	3,50	8,143E-2
1,10	8,267E-1	1,75	3,261E-1	4,00	6,052E-2
1,20	6,944E-1	2,00	2,489E-1	5,00	3,982E-2
1,30	5,917E-1	2,50	1,591E-1	6,00	2,791E-2
1,40	5,093E-1	3,00	1,116E-1	10,0	1,049E-2

$$+ \nu_2 \tau [c^2 \operatorname{sign}(c_c - c_r^*), c^2 c_r] \} \quad (1.7)$$

где квадратные скобки $[\Psi(c), \Phi(c)]$ обозначают стандартные скобочные интегралы [13]. Аналитические выражения для этих интегралов и их представление через табулированные специальные функции $I^{*(1)}(r)$ и $I^{*(2)}(r)$ даны в таблице.

Для определения постоянных интегрирования системы использованы граничные условия на больших расстояниях от сферы и максвелловская модель граничных условий на поверхности сферы для произвольных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса α_c . Параметры диффузно отраженных молекул определены путем использования коэффициента аккомодации энергии α_T .

2. Аналитическое решение для потока тепла. Введем некоторые специальные функции $I^{*(1)}(r)$ и $I^{*(2)}(r)$, связанные со скобочными интегралами посредством соотношений

$$[\operatorname{sign}(c_c - c_r^*), c^2 c_r] = -\frac{2}{3} \left(\frac{2kT_0}{m}\right)^{\nu_2} \sigma^2 I^{*(1)}(r) \quad (2.1)$$

$$[c^2 \operatorname{sign}(c_c - c_r^*) c^2 c_r] = \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{2kT_0}{m}\right)^{\nu_2} \sigma^2 I^{*(2)}(r) \quad (2.2)$$

где σ — диаметр молекулы. Множители, стоящие перед функциями, выражают значения скобочных интегралов для плоской геометрии [9]. В таблице и на фиг. 1 представлены численные значения этих функций.

Считая функции $I^{*(1)}(r)$ известными, легко найти аналитическое решение системы моментных уравнений, которое дает для полного потока тепла с поверхности сферы следующее выражение:

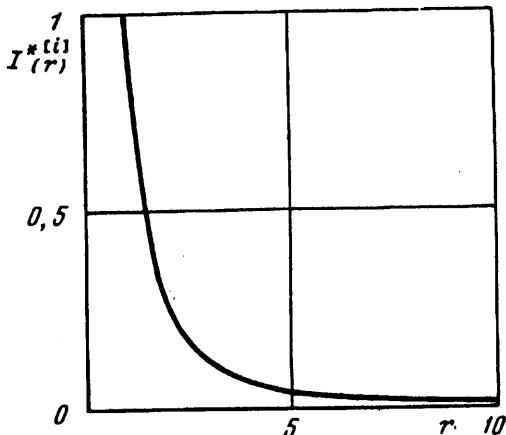
$$\frac{Q}{Q^*} = \frac{1}{1 + \zeta \text{Kn}^{-1}}, \quad Q^* = 4\pi R^2 \frac{p_0}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT_0}{m}\right)^{\nu_2} \alpha_c \alpha_T \frac{\Delta T}{T_0} \quad (2.3)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \alpha_c \alpha_T (\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2), \quad \psi_1 = \int_1^\infty I^{*(1)}(r) dr, \quad \psi_2 = \int_1^\infty I^{*(2)}(r) dr$$

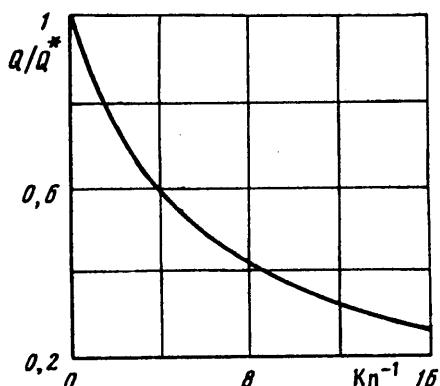
$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{R}, \quad p_0 = n_0 kT_0, \quad \alpha_1 = \frac{8\sqrt{2}}{15\pi}, \quad \alpha_2 = (8 + 3\pi) \frac{\sqrt{2}}{30\pi}$$

Выражение (2.3) дает аналитическое решение задачи для произвольных чисел Кнудсена в случае, если молекулы являются жесткими упругими сферами. Важно отметить, что для сферической геометрии введенные специальные функции будут содержаться во всех задачах теории переноса при указанном выборе молекулярных признаков $Q(c)$. При ином выборе наряду с этими функциями будут содержаться и функции другого вида, каждая из которых связана с конкретным скобочным интегралом. Определенный набор этих специальных функций позволяет получить решение любой задачи.

3. Обсуждение результатов. Прежде всего проведем анализ различных предельных соотношений, которые можно получить из аналитического решения



Фиг. 1



Фиг. 2

(2.3). В свободномолекулярном режиме, когда $\text{Kn} \rightarrow \infty$, поток тепла дается выражением $Q = Q^*$, которое точно совпадает с предельной формулой.

Для плотности потока тепла $Q_r = Q/4\pi R^2$ в континуальном режиме из (2.3) получим

$$Q_r = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta T}{R} \left(\frac{k^3 T_0}{\pi m} \right)^{1/2} \sigma^{-2} \frac{1}{\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2}. \quad (3.1)$$

Соответствующее выражение для плоской геометрии имеет вид [9]

$$Q_x = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta T}{L} \left(\frac{k^3 T_0}{\pi m} \right)^{1/2} \sigma^{-2} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (3.2)$$

где L — расстояние между двумя плоскостями. При $R \rightarrow \infty$ множители при $\Delta T/L$ и $\Delta T/R$ должны совпадать, что приводит к соотношению

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \quad (3.3)$$

которое является общим свойством введенных специальных функций.

В результате численного интегрирования получено, что $\psi_1 = 1,0106$. Тогда из (3.3) следует, что $\psi_2 = 0,9903$. Для этих численных значений $\zeta = 0,2508 \alpha_1 \alpha_2$.

В континуальном режиме для потока тепла справедливо соотношение

$$Q = 4\pi R \kappa \Delta T, \quad \kappa = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2} \frac{n_0 k \lambda}{\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2} = 1,2692 \left(\frac{k^3 T_0}{\pi m} \right)^{1/2} \sigma^{-2}. \quad (3.4)$$

Знак κ — коэффициент теплопроводности.

Численный коэффициент в (3.4) превышает соответствующий коэффициент, вычисленный по теории Чепмена — Энскога [13] (в четвертом приближении), на 5,6%. Это различие можно объяснить отсутствием в аппроксимирующей функции распределения (1.2) членов, пропорциональных потоку тепла. При произвольных числах Кнудсена результаты данного исследования изображены на фиг. 2, где представлена зависимость приведенного потока тепла от обратного числа Кнудсена при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

4. Вычисление скобочных интегралов. С моментной системой в данном приближении связаны следующие скобочные интегралы:

$$[\text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r], \quad [c^2 \text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] \quad (4.1)$$

Например, аналитическое выражение первого из этих интегралов для молекул в виде жестких упругих сфер имеет вид

$$\begin{aligned} [\text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] &= \frac{\sigma^2}{2\pi^3} \left(\frac{kT_0}{m} \right)^{1/2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-G_r^2) dG_r \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-G_\theta^2) dG_\theta \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-G_\phi^2) dG_\phi \int_0^{\infty} g^3 \exp(-g^2) dg \\ &\quad \frac{2}{\sqrt{2}} \{ G_r (g_r^2 - g_r'^2) + G_\theta (g_\theta g_\theta - g_\theta' g_\theta') + G_\phi (g_\phi g_\phi - g_\phi' g_\phi') \} \\ &\quad \text{sign}(G_r - g_r - \sqrt{(G_r - g_r)^2} (1 - 1/r^2)^{1/2}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} (G - g), \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (G + g)$$

$$g_r = g \cos \alpha, \quad g_\theta = g \sin \alpha \cos \beta, \quad g_\phi = g \sin \alpha \sin \beta$$

Координаты относительной скорости молекул после столкновения приведены в [12].

После интегрирования по всем значениям переменных θ , ϵ , g в выражении (4.1) и аналогичном выражении для второго скобочного интеграла удобно ввести для других интегрирований новые переменные посредством соотношений

$$G_r = xg, \quad G_\theta = yg, \quad G_\phi = zg, \quad \cos \alpha = t \quad (4.2)$$

Тогда функции $I^{*[1]}(r)$ могут быть выражены в форме

$$I^{*[1]}(r) = -\frac{72}{\pi^2} I^{[1]}(r), \quad I^{*[2]}(r) = \frac{1440}{\pi^2 (8 + 3\pi)} I^{[2]}(r) \quad (4.3)$$

$$I^{[1]}(r) = \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{x_0}^{\infty} F(t, \beta, y, z, x) dx \quad (4.4)$$

$$I^{[2]}(r) = \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{x_0}^{\infty} F(t, \beta, y, z, x) \Phi(t, \beta, y, z, x) dx \quad (4.5)$$

$$x_0 = t + [1 - t^2 + y^2 + z^2 - 2y\sqrt{1-t^2} \cos \beta - 2z\sqrt{1-t^2} \sin \beta]^{1/2} (r^2 - 1)^{1/2}$$

$$F(t, \beta, y, z, x) =$$

$$= \frac{x(t^2 - 1/3) + yt\sqrt{1-t^2} \cos \beta + zt\sqrt{1-t^2} \sin \beta}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\Phi(t, \beta, y, z, x) =$$

$$= 1 - \frac{2xt + 2y\sqrt{1-t^2} \cos \beta + 2z\sqrt{1-t^2} \sin \beta}{1+x^2+y^2+z^2}$$

После выполнения интегрирования по переменной x дальнейшие интегрирования по переменным y и z удобно выполнять, если ввести новые переменные по формулам

$$y' = y - \sqrt{1-t^2} \cos \beta = \rho \cos \varphi', \quad z' = z - \sqrt{1-t^2} \sin \beta = \rho \sin \varphi'$$

После интегрирования по β , интегралы (4.4), (4.5) могут быть представлены в виде

$$I^{[1]}(r) = \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho \Psi_i(t, \varphi, \rho) d\rho \quad (4.6)$$

где $\varphi = \varphi' - \beta$ и функции Ψ_i являются довольно громоздкими алгебраическими выражениями, которые не приведены в данной статье.

Дальнейшие интегрирования удобно выполнять численно, что позволяет получить табулированные значения функций $I^{*[1]}(r)$, которые приведены в таблице. На фиг. 1 изображены графики этих функций. Следует заметить, что численный анализ дает очень близкие значения для этих функций (отклонения результатов меньше 1%), поэтому как в таблице, так и на графике эти функции неразличимы.

Для рассмотренных здесь скобочных интегралов можно получить очень простые приближенные аналитические выражения, используя общие свойства уравнения Больцмана, которые детально проанализированы в [14]. Простой анализ, описанный в [12], дает

$$I^{*[1]}(r) = \frac{4\sqrt{2}}{5} \frac{1}{r^2}, \quad I^{*[2]}(r) = \frac{64\sqrt{2}}{5(8+3\pi)} \frac{1}{r^2}$$

Эти выражения являются приближенными, однако точность этих формул может быть легко оценена путем сравнения с соответствующими численными значениями. Относительные отклонения от численных результатов 13 и 4% соответственно.

Эта работа стала возможной благодаря финансовой поддержке, обеспеченнной Новыми Исследовательскими Программами Агентства по Охране Окружающей Среды, США (Exploratory Research Program, US EPA) и поддержке фулбрайтовского фонда (US Fulbright grant) для проф. И. Н. Ивченко.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mott-Smith H. M. The solution of the Boltzmann equation for a shock wave//Phys. Rev. 1951. V. 82. № 6. P. 885—892.
2. Lees L Kinetic theory description of rarefied gas flow//J. Soc. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. № 1. P. 278—311.
3. Gross E. P., Ziering S. Kinetic theory of linear shear flow//Phys Fluids. 1958. V. 1. № 3. P. 215—224.
4. Gross E. P., Ziering S. Heat flow between parallel plates//Phys Fluids. 1959. V. 2. № 6. P. 701—712.
5. Loyalka S. K. Temperature jump and thermal creep slip: Rigid sphere gas//Phys. Fluids A. 1989. V. 1. № 2. P. 403—408.
6. Loyalka S. K., Hickey K. A. The Kramers problem: Velocity slip and defect for a hard sphere gas with arbitrary accommodation//ZAMP. 1990. V. 41. № 2. P. 245—253.
7. Ивченко И. Н. Об одном методе решения граничных задач переноса при произвольных числах Кнудсена//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 182—185.
8. Ivchenko I. N. Evaporation (condensation) theory of spherical particles with all Knudsen numbers//J. Colloid Interface Sci. 1987. V. 120. № 1. P. 1—7.
9. Ivchenko I. N. Generalization of the Lees method in boundary problems of transfer//J. Colloid Interface Sci. 1990. V. 135. № 1. P. 16—19.
10. Loyalka S. K. Motion of a sphere in a gas: Numerical solution of the linearized Boltzmann equation//Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 5. P. 1049—1056.
11. Loyalka S. K. Thermophoretic force on a single particle-I. Numerical solution of the linearized Boltzmann equation//J. Aerosol Sci. 1992. V. 23. № 3. P. 291—300.
12. Ивченко И. Н., Лоялка С. К., Томпсон Р. В. Об одном методе решения проблемы переноса тела между двумя цилиндрами при произвольных числах Кнудсена//ТВТ. 1993. Т. 31. № 4. С. 636—641.
13. Chapman S., Cowling T. G. The mathematical theory of nonuniform gases. Cambridge Univ. Press, U. K., 1970. 423 p.
14. Loyalka S. K. An approximate method in the kinetic theory//Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 11. P. 2291—2294.

Поступила в редакцию
19.I.1993