МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1994

УДК 532.546.013.2

© 1994 г. Х. Ф. АЗИЗОВ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Исследуются неоднородные пространственно-временны́е распределения давления и скорости в первоначально непустом пласте с постоянным начальным давлением, вызываемые нагнетанием через границу пласта жидкости с неньютоновским поведением. Физические свойства нагнетаемой и существующей в пласте до нагнетания жидкостей одинаковы. Анализируются условия образования бегущих фронтов и локализованных структур в зависимости от нелинейности реологического закона жидкости и режима закачки.

Автоволновые структуры фильтрации газа и безнапорной фильтрации жидкости типа бегущих фронтов исследованы в [1—3]. В отличие от структур типа бегущих волн они не сохраняют постоянство скорости и формы возмущенной области. Главным условием образования таких фронтов, как и в задачах распространения тепла [4], является нулевое начальное состояние среды (первоначально пустой пласт или сухой грунт [3]). В силу инвариантности основных уравнений относительно сдвига функции давления рассматриваемые в данной статье структуры образуются на фоне постоянного начального давления в пористой среде. Стационарные диссипативные структуры типа бегущих волн $P = P(x - Vt)$ $(-\infty < t < 0)$ при фильтрации неньютоновских жидкостей изучены ранее в [5].

1. Автомодельные решения при заданном изменении давления на границе. Уравнения одномерной плоскопараллельной фильтрации степенной неньютоновской жидкости в пласте имеют вид [5]

$$\beta \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\Pi \left(\frac{U}{\lambda}\right)^n, \; n > 0 \tag{1.1}$$

Здесь P — давление, U — скорость фильтрации, β — упругоемкость насыщенного пласта; Π, λ — характерные значения градиента давления и скорости фильтрации соответственно; n — число, характеризующее неньютоновские свойства жидкости. Для псевдопластической жидкости $n < 1$, для дилатантной $n > 1$.

Рассмотрим для уравнений (1.1) краевую задачу о закачке жидкости в пласт с постоянным начальным давлением P_0 при степенном законе изменения давления на границе пласта

$$U(x, 0) = 0, \; P(x, 0) = P_0 = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

$$P(0, t) = P_0 + At^m, \; A = \mathrm{const}, \; t > 0, \; m > \max\{-1, -n/2\} \tag{1.3}$$

Функции P и U в этом случае убывают внутрь пласта, т. е. соответствующие градиенты $P_{,x}$ и $U_{,x}$ отрицательны.

Автомодельное решение задачи (1.1)—(1.3) ищется в виде

$$P = P_0 + At^m\psi(\xi), \; U = r(t) f(\xi), \; \xi = x/\varphi(t) \tag{1.4}$$

Функции $\psi(\xi)$, $f(\xi)$, $\varphi(t)$ и $r(t)$ подлежат определению.

При помощи анализа размерностей [6] функции $\varphi(t)$ и $r(t)$ находятся в виде

$$\varphi(t) = (A^{1-n}\Pi^{-1}\lambda^n\beta^{-n})^{1/(1+n)}t^{(m(1-n)+n)/(n+1)} \tag{1.5}$$

$$r(t) = (A^2\Pi^{-1}\lambda^n\beta)^{1/(1+n)}t^{(2m-1)/(n+1)} \tag{1.6}$$

Подставляя (1.4) в (1.1)—(1.3), с учетом (1.5) и (1.6) получим

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -f^n \tag{1.7}$$

$$\frac{df}{d\xi} - \frac{m(1-n)+n}{n+1}\xi\frac{d\psi}{d\xi} + m\psi = 0 \tag{1.8}$$

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(\infty) = f(\infty) = 0 \tag{1.9}$$

Систему (1.7) и (1.8) сведем к одному уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left(-\frac{d\psi}{d\xi}\right)^{1/n} - \frac{m(1-n)+n}{n+1}\xi\frac{d\psi}{d\xi} + m\psi = 0 \tag{1.10}$$

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(\infty) = 0 \tag{1.11}$$

В линейном случае ($n = 1$) уравнение (1.10) превращается в уравнение Эрмита и его решение при (1.11) имеет вид [7]

$$\psi(\xi) = 2^{2m+1}\pi^{-1/2}\Gamma(1+m)\exp(-\xi^2/4)\,H_{-(2m+1)}(\xi/2) \tag{1.12}$$

$$H_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty \exp(-t^2 - 2xt)\frac{dt}{t^{\nu+1}}$$

Здесь $H_\nu(x)$ — функция Эрмита, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Из (1.12) и (1.5)—(1.8) можно получить полное решение задачи о распределении полей давления и скорости для упругого режима фильтрации. При этом наряду с условием $n = 1$ следует также в формулах (1.7) и (1.6) отношение Π/λ заменить на отношение k/μ (k — проницаемость, μ — вязкость).

В случае, когда $n \neq 1$, уравнение (1.10) допускает группу преобразований

$$\Phi(\xi) = \alpha^{-(1+n)/(1-n)}\psi(\alpha\xi)$$

где α — любая положительная константа.

С помощью следующей подстановки понизим порядок (1.10):

$$\eta = \ln\xi, \quad \psi(\xi) = \xi^{(1+n)/(1-n)}F(\eta)$$

$$\frac{dW}{dF} = \frac{C_1W - C_2W^{1/n} - mnF}{W^{(1-n)/n}(W - C_3F)}$$

$$W = \frac{dF}{d\eta} + C_3F; \quad C_3 = \frac{1+n}{1-n}; \quad C_1 = \frac{mn(1-n)+n^2}{1+n}; \quad C_2 = \frac{2n}{1-n}$$

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных задач.

2. Нагнетание жидкости при постоянном давлении ($m = 0$). Уравнения (1.7) и (1.8) сведем к одному уравнению

$$\frac{df}{d\xi} + \frac{n}{n+1}\xi f^n = 0 \tag{2.1}$$

Решение (2.1) имеет вид

$$\xi^2 = -\frac{2(1+n)}{n(1-n)}\left[f^{(1-n)} - f_0^{(1-n)}\right], \quad f \leq f_0 \tag{2.2}$$

где $f_0 = f(0)$ — неизвестная пока постоянная. Функция $f(\xi)$, определяемая из (2.3), монотонно убывающая и обладает свойствами: при $n \geq 1$ $f \to 0$, когда $\xi \to \infty$; при $n < 1$ $f \to 0$, когда $\xi \to a < \infty$, где

$$a = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(1-n)} f_0^{(1-n)}} \tag{2.3}$$

Из (2.2) имеем

$$f(\xi) = \left[f_0^{(1-n)} - \frac{n(1-n)}{2(1+n)} \xi^2 \right]_+^{1/(1-n)} \tag{2.4}$$

где использовано обозначение $(\varkappa)_+ = \varkappa$, если $\varkappa \geq 0$; $(\varkappa)_+ = 0$, если $\varkappa < 0$.

Из (1.7) с учетом первого условия (1.9) находим

$$\psi(\xi) = 1 - \int_0^\xi f^n(\eta)\, d\eta \tag{2.5}$$

Из второго условия (1.9) для функции $\psi(\xi)$ для неизвестной постоянной f_0 получим уравнение

$$\int_0^\infty f^n(\eta)\, d\eta = 1 \tag{2.6}$$

Интеграл, содержащийся в формулах (2.5) и (2.6), легко раскрывается для значений $n/(1-n) = 1/2, +1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, которые попадают в интервал изменения реологического параметра n: $1/3 \leq n \leq 2$.

Фильтрация обычной ньютоновской жидкости в крупнозернистой и трещиноватой пористой среде по нелинейным законам Шези—Краснопольского и Смрекера [8] формально-математически описывается теми же уравнениями (1.1), когда $1 \leq n \leq 2$ соответственно. Поэтому результаты, полученные для фильтрации неньютоновской дилатантной жидкости в однородной пористой среде, можно отнести и к фильтрации ньютоновской жидкости по названным выше нелинейным законам.

Ниже приводится набор точных решений, полученных для конкретных значений параметра n при $m = 0$

$$n = 1/3:\quad f = f_0 (1-\eta^2)^{3/2} (\sigma(\eta) - \sigma(\eta - 1)) \tag{2.7}$$

$$\psi = \frac{2}{\pi} [\arccos \eta + \eta \sqrt{1-\eta^2}\,] (\sigma(\eta) - \sigma(\eta-1))$$

$$\eta = \frac{\xi}{a},\quad a = \sqrt{12}\, f_0^{1/3},\quad f_0 = \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)^{-3/2}$$

$$\sigma(x) = \{1, (x \geq 0);\ 0, (x < 0)\}$$

$$n = 1/2: f = f_0 (1-\eta^2)^2 (\sigma(\eta) - \sigma(\eta-1)) \tag{2.8}$$

$$\psi = [1 - f_0^{1/2} a\eta (1 - 1/3\eta^2)] (\sigma(\eta) - \sigma(\eta-1))$$

$$\eta = \frac{\xi}{a},\quad a = \sqrt{12}\, f_0^{1/4},\quad f_0 = \left(\frac{3}{4\sqrt{3}}\right)^{4/3}$$

$$n = 1:\quad f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right),\quad \psi(\xi) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{2.9}$$

$$n = 3/2:\quad f = f_0 (1+\zeta^2)^{-2} \sigma(\zeta) \tag{2.10}$$

$$\psi = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arcctg}\zeta + \frac{2\zeta}{3(1+\zeta^2)^2} + \frac{\zeta}{1+\zeta^2}\right]\sigma(\zeta)$$

$$\zeta = \frac{\xi}{b},\quad b = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} f_0^{-1/4},\quad f_0 = \left(\frac{8}{\pi\sqrt{15}}\right)^{4/3}$$

$$n = 2: f = f_0(1+\zeta^2)^{-1}\sigma(\zeta) \tag{2.11}$$

$$\psi = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arcctg}(\zeta) + \frac{\zeta}{1+\zeta^2}\right]\sigma(\zeta)$$

$$\zeta = \frac{\xi}{b},\quad b = \sqrt{3} f_0^{-1/2},\quad f_0 = \left(\frac{4}{\pi\sqrt{3}}\right)^{2/3}$$

Анализ формул (2.5), (2.6) и приводимые выше решения показывают, что при нагнетании псевдопластической жидкости ($n < 1$) в пласт образуется четкий фронт между возмущенной и невозмущенной областями пласта. В отличие от жидкостей с начальным градиентом, где возмущения давления опережают возмущения скорости, оба фронта в этом случае совпадают. В отличие от фронтов, образующихся при нагнетании газа в пустой пласт [1, 2], фронт возмущений псевдопластической жидкости образуется в непустом пласте на фоне постоянного начального давления.

При нагнетании дилатантной жидкости ($n > 1$), как и линейной ньютоновской жидкости в пласт, четкий фронт возмущений отсутствует и имеет место бесконечная скорость распространения возмущений давления и скорости.

Качественное поведение зависимостей $f(\xi)$ и $\psi(\xi)$ показаны на фигуре: сплошные кривые относятся к $\psi(\xi)$, штриховые — к $f(\xi)$.

3. Нагнетание жидкости при заданном расходе. В этом случае граничные условия для уравнений (1.1) имеют вид

$$P(x, 0) = P_0 = \text{const},\quad U(x, 0) = 0 \tag{3.1}$$

$$U(0, t) = Bt^m,\quad B = \text{const},\quad m > -1$$

Решение (1.1) и (3.1) ищется в виде

$$U = Bt^m f(\xi),\quad P = P_0 + g(t)\psi(\xi),\quad \xi = x/\varphi(t) \tag{3.2}$$

$$\varphi(t) = (\beta\Pi)^{-1/2}\lambda^{n/2}B^{(1-n)/2}t^{(1+m(1-n))/2} \tag{3.3}$$

$$g(t) = (\beta^{-1}\Pi)^{1/2}\lambda^{-n/2}B^{(1+n)/2}t^{(1+m(1+n))/2} \tag{3.4}$$

Безразмерные функции $f(\xi)$ и $\psi(\xi)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -f^n \tag{3.5}$$

$$\frac{df}{d\xi} - \frac{1+m(1-n)}{2}\xi\frac{d\psi}{d\xi} + \frac{1+m(1+n)}{2}\psi = 0 \tag{3.6}$$

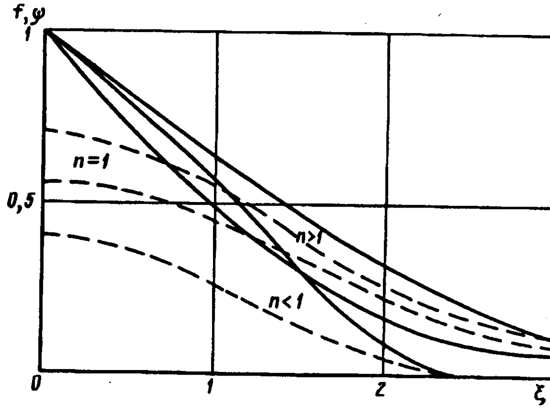
$$f(0) = 1,\quad f(\infty) = \psi(\infty) = 0 \tag{3.7}$$

Уравнения (3.5) и (3.6) можно заменить одним уравнением второго порядка для функции $f(\xi)$

$$\frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{1+m(1-n)}{2}\xi\frac{df^n}{d\xi} - mnf^n = 0$$

которое допускает группу преобразований $\Phi(\xi) = \alpha^{-2/(1-n)}f(\alpha\xi)$ и понижение порядка. Фазовый портрет такого типа уравнений подробно исследован в [1, 2].

Ряд точных решений системы (3.5), (3.6) можно получить, если между



параметром граничного режима m и реологическим параметром n имеется связь $m = -1/(1+n)\, g(t) = \text{const}$. Граничный режим (3.1) с таким параметром имеет физический смысл, так как, несмотря на бесконечный темп закачки в начальный момент, суммарная закачка в любой момент остается конечной.

С учетом этой связи между m и n (3.5) и (3.6) сводятся к уравнению

$$\frac{df}{d\xi} + \frac{n}{n+1}\xi f^n = 0 \tag{3.8}$$

Решение (3.8) с начальным условием $f(0) = 1$ имеет вид

$$f(\xi) = \left[1 - \frac{n(1-n)}{2(1+n)}\xi^2\right]_+^{1/(1-n)} \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.5) определяем функцию $\psi(\xi)$ с учетом условия $\psi(\infty) = 0$

$$\psi(\xi) = \int_\xi^\infty f^n(\eta)\, d\eta, \quad 0 \le \xi < \infty \tag{3.10}$$

Из (3.9) видно, что при $n < 1$ функция $f(\xi)$ отлична от нуля только в интервале $0 \le \xi \le a$, а формула (3.10) приобретает вид

$$\psi(\xi) = \int_\xi^a f^n(\eta)\, d\eta, \ \ \xi < a; \ \ \psi(\xi) \equiv 0, \ \ \xi > a \tag{3.11}$$

$$a = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(1-n)}}, \quad n < 1$$

При $n > 1$ функции (3.9) и (3.10) положительны на всей полуоси $0 \le \xi < \infty$, фронт отсутствует и возмущения в дилатантной жидкости распространяются с бесконечной скоростью.

Простые точные формулы для функции $\psi(\xi)$, подобные формулам (2.7)—(2.11), можно получить для значений параметра $n/(1-n) = 1/2, +1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Для этого в указанных формулах следует положить $f_0 = 1$.

4. Изменение давления на границе в режиме с обострением. Пусть на границе $x = 0$ задан закон изменения давления в режиме с обострением

$$P(0, t) = P_0 + A(T_0 - t)^m, \ \ m < -\frac{n}{2}, \ \ -\infty < t < T_0 \tag{4.1}$$

где $T_0 < \infty$ — время обострения.

Уравнения (1.1) в этом случае имеют следующие автомодельные решения:

$$P = P_0 + A(T_0 - t)^m \psi(\xi), \quad U = r(t) f(\xi), \quad \xi = x/\varphi(t) \tag{4.2}$$

$$\varphi(t) = (A^{1-n}\Pi^{-1}\lambda^n\beta^{-n})^{1/(1+n)} (T_0 - t)^{(m(1-n)+n)/(1+n)} \tag{4.3}$$

$$r(t) = (A^2\Pi^{-1}\lambda^n\beta)^{1/(1+n)} (T_0 - t)^{(2m-1)/(1+n)} \tag{4.4}$$

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -f^n; \quad \frac{df}{d\xi} + \frac{m(1-n)+n}{1+n}\xi\frac{d\psi}{d\xi} - m\psi = 0 \tag{4.5}$$

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(\infty) = f(\infty) = 0 \tag{4.6}$$

При $m = -n/(1-n)$ $(n < 1)$ задача (4.5)—(4.6) имеет следующее решение:

$$f(\xi) = \left[\sqrt{\frac{n(1-n)}{2(1+n)}}(a - \xi)_+\right]^{2/(1-n)}, \quad \psi(\xi) = \int_\xi^a f^n(\eta)\,d\eta \tag{4.7}$$

где a — постоянная, которая определяется из соотношения

$$\int_0^a f^n(\eta)\,d\eta = 1 \tag{4.8}$$

Ниже приводятся примеры точных решений, найденных из (4.7) для различных значений параметра n.

Пусть $n = 1/5$ $(m = -1/4)$

$$f(\xi) = \left[\frac{1}{\sqrt{15}}(a-\xi)_+\right]^{5/2}, \quad \psi(\xi) = \frac{2}{3\sqrt[4]{15}}(a-\xi)_+^{3/2}$$

$a = 3/2\sqrt[4]{15}$, $n = 1/3$ $(m = -1/2)$

$$f(\xi) = \left[\frac{1}{\sqrt{12}}(a-\xi)_+\right]^3, \quad \psi(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{12}}(a-\xi)_+^2, \quad a = 2\sqrt{12}$$

Примеры точных решений можно увеличить, если учесть, что интеграл в (4.7) просто раскрывается для всех натуральных значений параметра $2n/(1-n)$, которые соответствуют интервалу (0, 1) изменения реологического параметра n.

Принципиальное отличие полученных в этом пункте решений от предыдущих в том, что положение фронта возмущений давлений и скорости в псевдопластической жидкости не меняется в течение всего времени воздействия на пласт, несмотря на неограниченный рост давления в области $(0, a)$. Действительно, если перейти к размерным переменным, то положение фронта во всех случаях определяется выражением $x_*(t) = a\varphi(t)$ и поведение фронта полностью определяется характером функции $\varphi(t)$. Из формулы (4.3) очевидно, что $\varphi(t) = \text{const}$ при $m = -n/(1-n)$ $(n < 1)$.

Таким образом, в отличие от обычных режимов воздействия на пласт при ограниченных режимах с обострением происходит локализация возмущений в граничной области пласта, длина которой зависит от реологического параметра жидкости. Не менее важно и то, что физической причиной локализации в данном случае является реологическое поведение (псевдопластичность) жидкости, а не проводимость среды, как это имеет место в задачах теплопроводимости.

Отметим еще одну важную особенность рассмотренных движений. В случае первоначально пустого пласта фронт (граница) внедряемой жидкости совпадает с фронтом возмущений давления [1—3]. В данном случае объем внедряемой жидкости равен упругому изменению возмущенной области пласта. Во всех рассмотренных выше случаях справедлива формула

$$L(t) = \int_{t_0}^t U(0, t)\,dt = \beta(P(0, t) - P_0)C\varphi(t)$$

Здесь безразмерный коэффициент C вычисляется подстановкой в эту формулу величин $U(0, t)$, $P(0, t)$ и $\varphi(t)$; $C\varphi(t)$ — размер возмущенной области пласта, $L(t)$ — глубина проникновения закачиваемой жидкости.

Автор благодарит А. Х. Мирзаджанзаде за плодотворные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. № 1. С. 67—78.
2. *Баренблатт Г. И.* Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. № 6. С. 679—698.
3. *Кочина П. Я.* Точные решения нелинейного уравнения Буссинеска // Гидродинамики и теория фильтрации. М.: Наука, 1991. С. 203—206.
4. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М., 1950. С. 61—71.
5. *Азизов Х. Ф.* Граничные режимы с обострением и локализация в нелинейной фильтрации неньютоновских жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 91—97.
6. *Клайн С. Дж.* Подобие и приближенные методы. М.: Мир, 1968. 302 с.
7. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.
8. *Муравьев И. М., Крылов А. П.* Эксплуатация нефтяных месторождений. М.: Гостоптехиздат, 1949. 776 с.

Баку

Поступила в редакцию
2.VIII.1993