

УДК 532.5.013.4:536.25

© 1994 г. С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, А. И. РАХМАНОВ

КОНВЕКЦИЯ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ПОЛЕ СИЛ И МИКРОГРАВИТАЦИЯ

Численно исследуются конвективные движения в плоском слое вязкой жидкости при наличии осциллирующей внешней силы [1—8]. Слой предполагается помещенным в поле силы тяжести. Рассматриваются случаи, когда осцилляция внешней силы порождается вращением вокруг горизонтальной оси или вибрацией в произвольном направлении. Для описания движения жидкости используются уравнения Навье—Стокса в приближении Буссинеска. Определяются течения, возникающие в слое при наличии поперечного градиента температуры, находятся границы устойчивости этих течений, а также изучаются надкритические режимы движения. Эти исследования проводятся с помощью метода осреднения (для нахождения границ устойчивости при высоких скоростях вращения и частотах вибрации) и метода Галеркина.

1. Рассмотрим конвекцию в плоском слое вязкой жидкости, вращающемся вокруг горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью $\Omega = (0, -\Omega, 0)$ (задача 1), и конвекцию в плоском горизонтальном слое вязкой жидкости, колеблющемся по закону $e = -c \sin \Omega t$ в направлении вектора e , лежащего в плоскости xz и составляющего произвольный угол φ с осью x (задача 2). В обоих случаях слой толщины d находится в поле силы тяжести: границы слоя, на которых поддерживается постоянная разность температур δT , предполагаются изотермическими, непроницаемыми и свободными от касательных напряжений.

Для описания движения жидкости используются уравнения Навье—Стокса в классическом для задач конвекции приближении Буссинеска. Уравнения для безразмерных скорости v , температуры T и давления p в системе координат, связанной со слоем, и соответствующие граничные условия имеют вид

$$V_i + (\mathbf{V}\nabla) V = -\nabla p + \sigma \Delta V + F_i \quad (i = 1, 2)$$

$$T_t + (\mathbf{V}\nabla) T = \Delta T, \quad \nabla V = 0$$

$$u_z = v_z = w = 0; \quad T = \mp 1/2 \quad (z = \pm 1/2)$$

$$R = \frac{g\beta\delta T d^3}{\nu\kappa}, \quad \sigma = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \tau = \frac{2\Omega d^2}{\nu}, \quad RV = \frac{c\nu^2}{4gd^4}$$

$$\mathbf{V} \equiv \{u, v, w\}, \quad \mathbf{I} \equiv \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{J} \equiv \{0, 1, 0\}; \quad \mathbf{k} \equiv \{0, 0, 1\}$$

$$F_1 = \sigma RT (\mathbf{I} \sin 1/2\sigma\tau + \mathbf{k} \cos 1/2\sigma\tau)$$

$$F_2 = \sigma RT [\mathbf{I} \cos \varphi Rv\tau^2 \sin 1/2\sigma\tau + \mathbf{k}(1 + \sin Rv\tau^2 \sin 1/2\sigma\tau)]$$

Здесь задаче 1 соответствует $i = 1$, задаче 2 — $i = 2$, σ — число Прандтля, R — число Рэлея, RV — безразмерная величина, характеризующая амплитуду вибрации; ν , κ , β — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, теплового расширения соответственно, g — модуль ускорения силы тяжести.

При наличии разности температур на границах как во вращающемся слое, так и в колеблющемся не в вертикальном направлении механическое равновесие

невозможно и в жидкости возникает периодическое по времени течение с распределением скоростей, характерным для слоев смешения

$$V = (u(z, t), 0; 0), \quad T = -z, \quad p = p(z, t)$$

$$u = V_1(z) \sin 1/2 \sigma \tau + V_2(z) \cos 1/2 \sigma \tau$$

$$V_1(z) = q (a_+ \operatorname{sh} 1/2 \sqrt{\tau} z \cos 1/2 \sqrt{\tau} z - b \operatorname{ch} 1/2 \sqrt{\tau} z \sin 1/2 \sqrt{\tau} z)$$

$$V_2(z) = q (a_+ \operatorname{ch} 1/2 \sqrt{\tau} z \sin 1/2 \sqrt{\tau} z + b \operatorname{sh} 1/2 \sqrt{\tau} z \cos 1/2 \sqrt{\tau} z + \sqrt{\tau} z)$$

$$a_{\pm} = \mp \frac{\operatorname{sh} 1/4 \sqrt{\tau} \sin 1/4 \sqrt{\tau} \pm \operatorname{ch} 1/4 \sqrt{\tau} \cos 1/4 \sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}^2 1/4 \tau \sin^2 1/4 \sqrt{\tau} + \operatorname{ch}^2 1/4 \sqrt{\tau} \cos^2 1/4 \sqrt{\tau}}$$

$$p_1 = -\frac{1}{2} \sigma R z^2 \cos \frac{1}{2} \sigma \tau - \sigma \tau \int_{z_0}^z u(\xi, t) d\xi, \quad q = \frac{2R}{\tau^{3/2}}$$

$$p_2 = -1/2 \sigma R z^2 (1 + RV \tau^2 \sin \varphi \sin 1/2 \sigma \tau), \quad q = 2RRV \sqrt{\tau} \cos \varphi$$

Здесь (p_1) соответствует задаче 1, а (p_2) — 2. В задаче 2 в предельном случае вертикальных вибраций или при отсутствии вибраций полученное решение описывает положение механического равновесия.

2. Исследуем устойчивость найденных течений относительно малых возмущений. В случае больших чисел Тэйлора используем метод осреднения, который позволяет перейти от изучения устойчивости периодических по времени основных течений к изучению устойчивости положения равновесия соответствующих осредненных уравнений движения. Применение этого метода существенно облегчает нахождение границ устойчивости. Детальное описание этого метода осреднения можно найти в [2, 3, 5].

Задача 1. Линеаризованные осредненные уравнения для возмущений переменных функция тока — температура имеют вид

$$\Delta \Psi_i - \sigma \Delta^2 \Psi = \frac{2R^2}{\tau^2} (\varphi_{1xx} + \varphi_{2x})$$

$$T_t + \Psi_x - \Delta T = \frac{4R^2}{\tau^3 \sigma} z \varphi_{2x} \quad (2.1)$$

$$\Delta \varphi_1 + T_x = 0, \quad \Delta \varphi_2 - T_{xx} = 0$$

$$\Psi = \Psi_{zz} = \varphi_{1z} = \varphi_2 = T = 0 \quad (z = \pm 1/2)$$

Здесь $\Psi(x, z, t)$, $T(x, z, t)$ — возмущения функции тока и температуры соответственно, φ_1, φ_2 — функции, возникающие при проектировании векторов $\Pi T, kT$ на пространство соленоидальных векторов.

Будем рассматривать возмущения в виде

$$\Psi = \xi(z) \exp(\lambda t + i\alpha x), \quad T = \theta(z) \exp(\lambda t + i\alpha x)$$

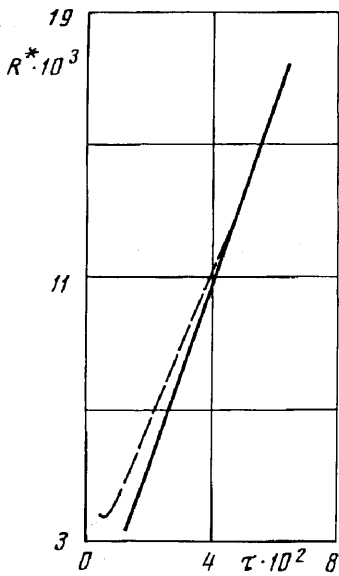
$$\varphi_1 = \eta(z) \exp(\lambda t + i\alpha x), \quad \varphi_2 = \xi(z) \exp(\lambda t + i\alpha x)$$

Декремент затухания λ находится с помощью метода Галеркина

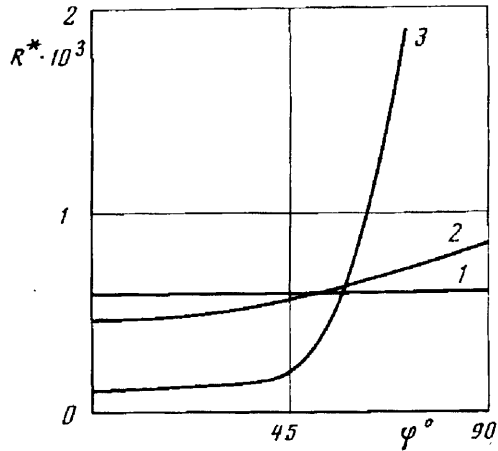
$$\xi = \sum_{n=1}^N A_n \sin \left(n\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$Q = \sum_{n=1}^N B_n \sin \left(n\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) \right)$$

Функции η и ξ находятся из последних двух уравнений (2.1) и граничных условий. (Расчеты проводились при $N = 30$.)



Фиг. 1



Фиг. 2

Проведенные расчеты показали следующее.

Имеет место колебательная неустойчивость (на границе устойчивости мнимая часть декремента затухания отлична от нуля). Величина критического волнового числа, характеризующего наиболее опасные возмущения, меньше, чем в случае покоящегося слоя. С увеличением скорости вращения критическое волновое число возрастает, стремясь снизу к значению 1,75.

Вращение вокруг горизонтальной оси препятствует возникновению конвективных движений. При достаточно больших числах Тэйлора с увеличением скорости вращения критическое число Рэлея R^* возрастает практически линейно.

На фиг. 1 приведена зависимость $R^*(\tau)$ при $\sigma = 1$, $\alpha = 1,75$. Кривая 1 получена по осредненным, а кривая 2 по неосредненным уравнениям движения.

Критическое число Рэлея возрастает также с увеличением числа Прандтля σ .

Задача 2. Линеаризованные осредненные уравнения для возмущений имеют вид:

$$(u_y - v_x)_t = \sigma \Delta (u_y - v_x)$$

$$(u_z - w_x)_t = \sigma \Delta (u_z - w_x) - \sigma R T_x + 2R^2 R V^2 \tau^2 (\Psi_{xx} \cos \varphi + T_x \sin^2 \varphi + \Psi_{xz} \sin \varphi)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad T_t - w = \Delta T \quad (2.2)$$

$$\Delta \Psi = -T_x \cos \varphi - T_z \sin \varphi \quad (z = \pm 1/2)$$

Здесь $\mathbf{V}(x, y, z, t) = (u, v, w)$, $T(x, y, z, t)$ — возмущения скорости и температуры соответственно, Ψ — функция, возникающая при проектировании вектора $T(I \cos \varphi + R \sin \varphi)$ на пространство соленоидальных векторов.

Решение ищем в виде

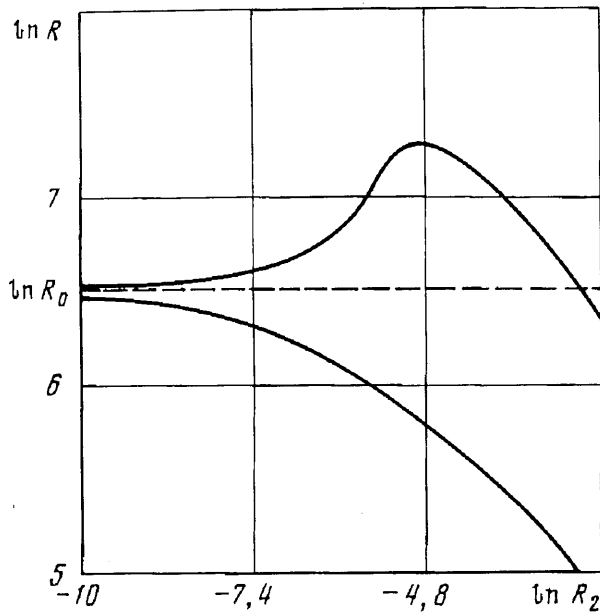
$$\mathbf{V} = \xi(z) \exp[\lambda t + i(\alpha x + \beta y)], \quad T = \theta(z) \exp[\lambda t + i(\alpha x + \beta y)]$$

$$\Psi = \eta(z) \exp[\lambda t + i(\alpha x + \beta y)]$$

Декремент затухания λ находится численно методом Галеркина. (Расчеты проводились при $N = 30$.)

Получены следующие результаты.

Обнаружена монотонная неустойчивость (на границе устойчивости мнимая часть декремента затухания практически равна нулю: $\text{Im } \lambda \sim 10^{-9}$). Простран-



Фиг. 3

ственная задача может быть сведена к плоской ($\beta = 0$) и критическое число Рэлея R^* , характеризующее границу устойчивости, определяется тремя параметрами: волновым числом α , углом наклона оси вибрации φ и вибрационным параметром $R_2 = RV^2\tau^2/\sigma$.

Критическое число Рэлея монотонно возрастает с увеличением угла φ от 0 до 90° , в случае горизонтальных вибраций ($\varphi = 0^\circ$) неустойчивость наступает при меньших, а в случае вертикальных вибраций ($\varphi = 90^\circ$) при больших числах Рэлея, чем в случае покоящегося слоя. Влияние вибрации на границу устойчивости усиливается с ростом вибрационного параметра. На фиг. 2 приведены кривые зависимости $R^*(\varphi)$ для $\alpha = 2,26$ при $R_2 = 4 \cdot 10^{-6}$, $= 4 \cdot 10^{-4}$, $= 4 \cdot 10$ — кривые 1—3. При отклонении оси вибрации от вертикального направления верхняя ветвь границы устойчивости смещается в сторону больших значений числа Рэлея и область неустойчивости расширяется.

При малых R_2 ($R_2 = 4 \cdot 10^{-6}$) критическое волновое число α практически не отличается от критического волнового числа в задаче без вибрации ($\alpha^* \approx 2,221$) для всех φ . При больших значениях вибрационного параметра (например, при $R_2 = 4 \cdot 10^{-4}$) α^* уменьшается с ростом угла наклона φ , причем это убывание становится заметным лишь при достаточно больших φ .

Зависимость критического числа Рэлея R^* от вибрационного параметра R_2 определяется направлением вибрации. Определено такое значение угла наклона оси вибрации φ_0 , что при всех $\varphi < \varphi_0$ высокочастотная вибрация способствует возникновению конвекции и критическое число Рэлея убывает с ростом вибрационного параметра, а при $\varphi > \varphi_0$ высокочастотная вибрация может препятствовать возникновению конвекции и кривая $R^*(R_2)$ может иметь немонотонный характер. На фиг. 3 приведены кривые зависимости $R^*(R_2)$ для $\alpha = 2,26$ при $\varphi^\circ = 45; 62,63$ — кривые 1—2; величина R_0 отвечает критическому значению числа Рэлея в задаче без вибрации. Отметим, что при указанном значении волнового числа $\varphi_0 \approx 56,5$.

В области параметров, где критическое число Рэлея убывает с ростом вибра-

ционного параметра, зависящие от переменных x, z, t возмущения наиболее опасны.

Для обеих рассматриваемых задач достоверность результатов, полученных методом осреднения, подтверждена прямыми расчетами. В случае задачи 1 определена область применимости метода осреднения, показано, что, например, для $\sigma = 1$ уже при $\tau > 100$ достигается хорошее качественное, а при 300 — хорошее количественное согласование результатов, полученных по осредненным и неосредненным уравнениям (фиг. 1).

3. Рассмотрим вторичные режимы движения, которые возникают в результате потери устойчивости основных течений. Эти исследования проводятся в рамках двумерных нелинейных неосредненных уравнений для возмущений, которые в переменных функция тока — температура имеют вид

$$\Delta \Psi_t = \sigma \Delta^2 \Psi - u \Delta \Psi_x + u_{zz} \Psi_x + F_t + \Psi_x \Delta \Psi_z - \Psi_z \Delta \Psi_x \quad (3.1)$$

$$T_t = \Delta T - u T_x - \Psi_x T_z - T_x \Psi_z$$

$$F_1 \equiv \sigma R (T_z \sin 1/2 \sigma \tau t - T_x \cos 1/2 \sigma \tau t) \quad (3.2)$$

$$F_2 \equiv \sigma R [T_z R V \tau^2 \cos \varphi \sin 1/2 \sigma \tau t - T_x (1 + R V \tau^2 \sin \varphi \sin 1/2 \sigma \tau t)]$$

Здесь $u(z, t)$ — ненулевая компонента скорости основного течения, F_1 и F_2 соответствуют задачам 1 и 2.

Граничные условия одинаковы для обеих рассматриваемых задач

$$\Psi = \Psi_{zz} = T = 0 \quad (z = \pm 1/2)$$

Решения систем уравнений (3.1)—(3.2) находятся с помощью метода Галеркина. Возмущения с волновым числом α представляются в виде

$$\Psi = \sum_{i=1}^M \sin \left(i\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) \right) \sum_{j=0}^N [A_{ij}(t) \cos j\alpha x + B_{ij}(t) \sin j\alpha x]$$

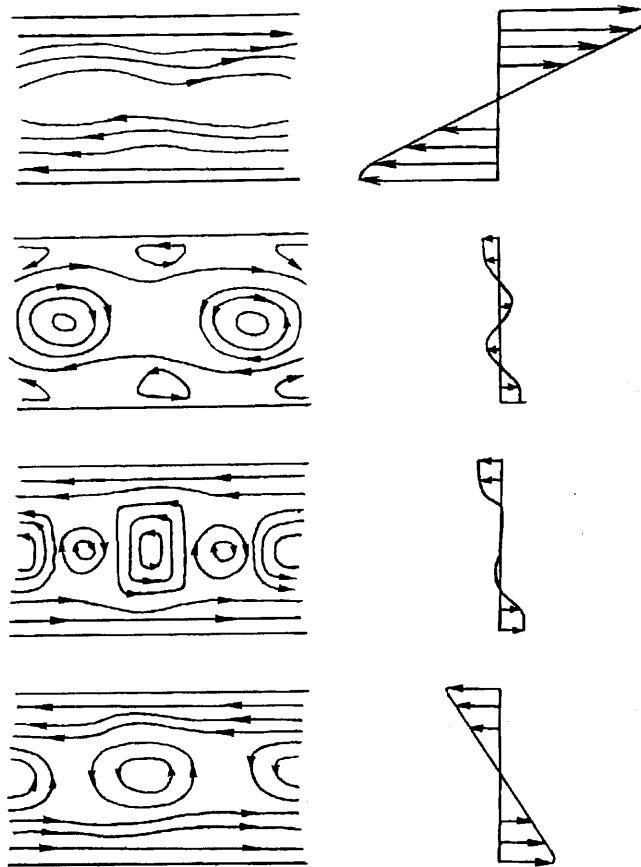
$$T = \sum_{i=1}^M \sin \left(i\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) \right) \sum_{j=0}^N [C_{ij}(t) \cos j\alpha x + D_{ij}(t) \sin j\alpha x]$$

Амплитуды $A_{ij}(t)$, $B_{ij}(t)$, $C_{ij}(t)$, $D_{ij}(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая интегрируется по схеме Кутты—Мерсона с автоматическим выбором шага и контролем заданной точности вычислений. Вычисление нелинейной части амплитудных уравнений сводится к перемножению тригонометрических рядов, которое происходит каждый раз по одним и тем же алгоритмам, определяемым числами M и N . Естественно проделать эту процедуру один раз до начала счета, приводя подобные члены и упрощая формулы, а затем вычислять нелинейную часть, подставляя в готовые формулы конкретные значения амплитуд A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} . Для автоматизации этого процесса была написана специальная подготовительная программа. Эта программа, однократно вычисляя нелинейную часть, проводит необходимую оптимизацию, сокращая число арифметических операций, создает линейные ассемблерные программы перемножения тригонометрических рядов и записывает их на диск. Созданная таким образом библиотека программ используется затем при расчете конкретных вариантов. Использование такого метода существенно сокращает время вычисления нелинейных членов.

Обычно в качестве начальных данных задавалось только возмущение температуры с равными амплитудами при всех гармониках, т. е.

$$A_{ij}(0) = B_{ij}(0) = 0; \quad C_{ij}(0) = D_{ij}(0) = a = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 0, 1, \dots, N).$$

Проведенные методические расчеты показали, что при числах Рэлея, меньших пяти критических значений, для описания надкритических режимов движения достаточно учитывать 6—9 функций по z ($M = 6—9$) и 2—4 гармоники по x ($N = 2—4$) в галеркинском разложении каждой из искомым функций; с дальнейшим увеличением количества членов разложения решение качественно не меняется, а изменение средних характеристик не превосходит 6% (вблизи нейтральной кривой $R \leq 2,5R^*$ — такое изменение не превосходит 2—3%).

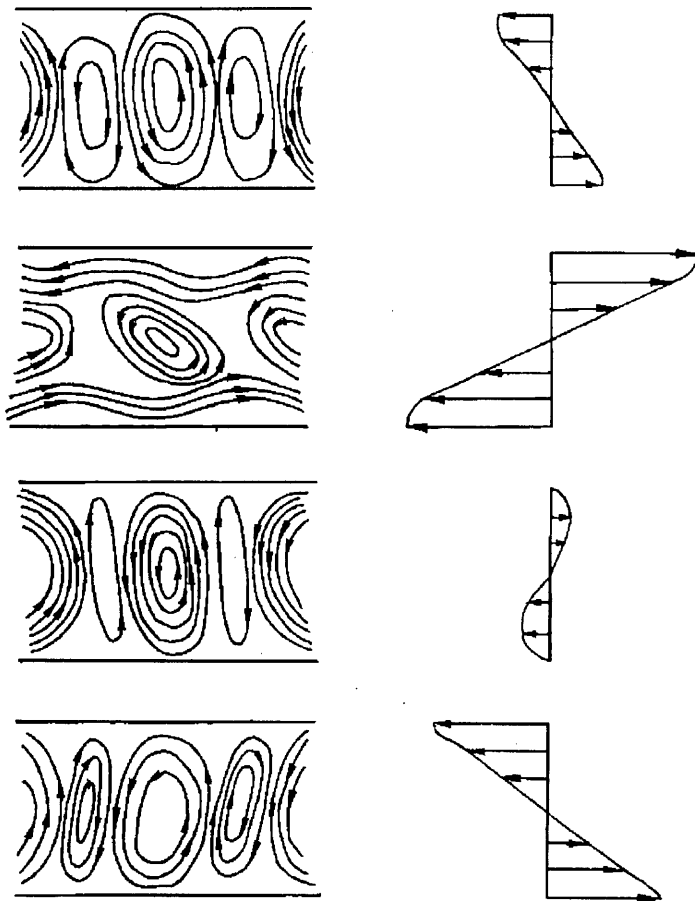


Фиг. 4

Получены следующие результаты.

При числах Прандтля порядка единицы недалеко от нейтральной кривой $R < 5R^*$ (в задаче 2 в случае высокочастотной вибрации) возмущения выходят на периодический по времени режим с периодом, равным периоду вращения или вибрации. В обеих рассматриваемых задачах наряду с чисто конвективной неустойчивостью важную роль играет механизм неустойчивости, характерный для слоев смешения. Неустойчивость возникает в виде вихрей на границе встречных потоков. На фиг. 4 схематично изображены линии тока суммарного движения во вращающемся слое при $\sigma = 1$, $\tau = 500$, $\alpha = 1,75$, $R = 12560$ в некоторые моменты времени; рядом приведено распределение скоростей основного течения.

Помимо линий тока суммарного движения строились линии тока возмущений. Обнаружено, что при малых надкритичностях (в задаче 2 — также при малых амплитудах вибрации) линии тока возмущений представляют собой обычную пару конвективных валов на протяжении всего периода внешней силы. При большей надкритичности (в задаче 2 — также при большей амплитуде вибрации) линии тока возмущений на одном периоде по времени могут представлять собой как пару конвективных валов, так и одиночные валы, осложненные сквозным течением. Процесс разрушения и образования пары конвективных валов изображен на фиг. 5 для задачи 2 при $\sigma = 1$, $\tau = 500$, $RV = 410$, $R = 240$, $\alpha = 2,26$, $\varphi = 45^\circ$. Справа приводится схематическое изображение профиля скорости основного течения в рассматриваемый момент времени. Возмущения препятствуют изменению направлений скоростей встречных потоков.



Фиг. 5

Для того чтобы понять, как деформируется основное течение в результате развития возмущений, строилось распределение скоростей осредненного течения по x

$$v_{00}(z, t) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} (v_0 + v') dx$$

Здесь v_0 — скорость основного течения, v' — возмущение скорости. Проведенные расчеты показали, что если возмущения достаточно развиты, то в обеих рассматриваемых задачах скорости встречных потоков осредненного по x суммарного течения вблизи середины слоя не меняют своего направления на протяжении всего периода внешней силы (в отсутствие возмущений направления скоростей встречных потоков периодически меняются).

Поперечный теплоперенос увеличивается с ростом надкритичности. Так, с увеличением числа Рэлея от R^* до $2R^*$ осредненное число Нуссельта, характеризующее тепловой поток, может возрастать более чем в 2 раза.

В обеих рассматриваемых задачах при малых числах Прандтля (например, при $\sigma = 0,1$) обнаружена низкочастотная модуляция периодических режимов, которая представляет собой периодическое изменение интенсивности возмущений. Хотя возмущения никогда полностью не затухают, существуют интервалы времени, в течение которых поперечный теплоперенос осуществляется почти пол-

ностью за счет теплопроводности. Период модуляции уменьшается с ростом надкритичности.

В обеих рассматриваемых задачах изменение начальных данных (т. е. величины a) при фиксированном наборе параметров может приводить к тому, что возмущения выходят на режимы с разными локальными характеристиками (такими, как скорость или температура в точке), но с одинаковыми средними характеристиками (такими, как число Нуссельта или квадрат нормы скорости). Подробные исследования, проведенные для периодических по времени режимов, показали, что режимы, отвечающие разным начальным данным, получают один из другого сдвигом вдоль оси абсцисс на величину, зависящую от начальных данных.

Проведено численное исследование динамических систем, являющихся галеркинскими аппроксимациями неосредненных уравнений вибрационной конвекции. Для системы 20 уравнений ($M = N = 2$) установлено, что при $\sigma = 10$, $\tau = 400$, $RV = 8,65 \cdot 10^{-5}$, $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 2,22144$ увеличение числа Рэлея приводит к последовательному усложнению решения. Например, при $R = 7840$ проекция фазовой траектории на плоскость амплитуд (C_{20}, C_{11}) с точностью до высокочастотных колебаний представляет собой однооборотный цикл (окружность), при $R = 8480$ — двухоборотный цикл (восьмерка); при $R = 9200$ — восьмиоборотный цикл (траектория 4 раза обходит вокруг одной точки и 4 раза вокруг другой), а при $R = 10520,17$ имеет место непериодический режим типа «странного аттрактора». Эти результаты качественно согласуются с результатами работы [4]. Полученный таким образом непериодический режим исчезает при отклонении оси вибрации от вертикального направления. В динамической системе большего числа уравнений (например, при $M = N = 3$) при тех же значениях параметров (и $\varphi = 90^\circ$) непериодический режим не реализуется, а имеет место однооборотный цикл.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17342).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герценштейн С. Я., Рахманов А. И. Конвекция в плоском слое жидкости, вращающемся вокруг горизонтальной оси // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 561—564.
2. Симоненко И. Б. Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сб. 1972. Т. 87. Вып. 2. С. 236—253.
3. Зеньковская С. М. О влиянии вибрации на возникновение конвекции. Ростов-на-Дону. 1978. 31 с. — Деп. ВИНТИ, 11.02, № 2437-78.
4. Закс М. А., Любимов Д. В. О возможном механизме накопления бифуркаций в конечномерной аппроксимации уравнений конвекции // Бифуркационные переходы в некоторых задачах теории гидродинамической устойчивости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С. 40—70.
5. Рахманов А. И. Конвекция в колеблющемся слое вязкой жидкости: Препринт № 114. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1983. 24 с.
6. Бабенко К. И., Рахманов А. И. Численное исследование двумерной конвекции: Препринт № 118. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1988. 26 с.
7. Lyubimov D. V., Cherepanov A. A., Lyubimova T. P. The motion of solid body in a liquid under the influence of a vibrational field. Hydromechanics and Heat // Mass Transfer in Microgravity Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 1992. P. 247—251.
8. Bauer H. F. Stability and vibrational behavior of cylindrical liquid layers in microgravity. Hydromechanics and Heat // Mass Transfer in Microgravity. Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 1992. P. 197—202.