

УДК 532.517.2.013.4:536.25

© 1994 г. Д. С. ПАВЛОВСКИЙ

## ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СЛОЕ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассматривается потеря устойчивости плоскопараллельного течения несжимаемой вязкой теплопроводящей жидкости в горизонтальном слое с приложенным к нему продольным градиентом температуры. Нижняя поверхность слоя считается твердой, а верхняя — свободной, коэффициент поверхностного натяжения на которой линейно зависит от температуры. Обе границы слоя предполагаются теплоизолированными. Критическое значение градиента температуры в зависимости от остальных определяющих параметров находится из анализа спектра линеаризованной задачи. Возникающие после потери устойчивости вторичные течения находятся из анализа полной нелинейной задачи путем разложения решения в ряд по степеням закритичности в окрестности точки бифуркации. Исследованы три типа вторичных течений: плоские двумерные волны, распространяющиеся вдоль градиента температуры, плоские волны, бегущие под некоторым углом к градиенту, и трехмерные волны, распространяющиеся вдоль градиента. Описан метод численного решения задачи, основанный на полиномиальной аппроксимации.

Взаимодействие тепловой и термокапиллярной конвекции возникает всегда, когда температурный градиент приложен вдоль свободной поверхности жидкости. Одним из примеров такой ситуации является конвекция при выращивании кристаллов из расплава в горизонтальной открытой лодочке (метод Бриджмена). В земных условиях преобладает тепловая гравитационная конвекция, но в условиях невесомости, при пониженной гравитации, существенную роль играет термокапиллярная конвекция. Планирование и обработка технологических экспериментов на борту космических аппаратов требуют учета взаимодействия обоих факторов неустойчивости.

В данной работе изучается потеря устойчивости плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости, возникающего в горизонтальном слое при наличии продольного градиента температуры. На горизонтальных границах слоя могут быть поставлены различные условия как для скорости жидкости, так и для температуры. Исследованию устойчивости такого течения посвящено много работ, обзор которых можно найти в [1], сводка результатов решений линейных и слабо нелинейных задач приведена в [2].

Здесь исследуется случай, когда границы слоя считаются теплоизолированными, нижняя поверхность — твердой, а верхняя — свободной, при этом на ней действует термокапиллярная сила, обусловленная зависимостью коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Адиабатические граничные условия для температуры могут служить достаточно хорошим приближением для жидкостей с высоким коэффициентом температуропроводности, поэтому будет рассматриваться область с малыми числами Прандтля, что характерно для жидких металлов и расплавов полупроводников.

Критический градиент температуры, при котором происходит изменение режима течения (возникновение колебаний), может быть определен методами линейной теории устойчивости. Этим способом определяются критическое число Грасгофа, длина волны и частота наиболее опасного возмущения. Такой анализ в отсутствие сил поверхностного натяжения проведен в [2, 3]. Выяснено, что при возрастании числа Прандтля наиболее опасной является сначала двумерная

колебательная мода ( $Pr < 0,0045$ ), а потом существенно трехмерная колебательная мода ( $0,0045 < Pr < 0,41$ ). Оказывается в интервале чисел Прандтля  $0,41 < Pr < 1,2$  существует еще спиральная монотонная мода [4], аналогичная той, которая найдена для задачи с твердыми изолированными границами в [5]. Линейное исследование потери устойчивости в другом предельном случае — в отсутствие силы тяжести — проведено в [6]. Показано, что для всех чисел Прандтля основное течение теряет устойчивость и наиболее опасная мода существенно трехмерна.

Линейный анализ может дать только критические значения числа Грасгофа и наиболее опасные моды (растущие экспоненциально в линейном приближении). Вопросы устойчивости вторичных течений, величины их амплитуд и значения частот вторичных колебательных режимов могут быть получены только в результате исследования полных нелинейных уравнений в окрестности критической точки (точки бифуркации). Такое исследование только для существенно трехмерной моды без учета сил поверхностного натяжения проведено в [3], а для случая невесомости — в [7].

Для проведения исследования закритических режимов течения в данной работе использовался метод [3] с исправлением некоторых допущенных там неточностей. Этот метод основывается на редукции исходной системы уравнений на «центральное многообразие». При этом получают уравнения, описывающие поведение возмущений в окрестности точки бифуркации.

1. Исследуется потеря устойчивости течения в слое толщины  $H$  и длины  $L$ , в котором создан продольный градиент температуры  $\delta T/L$ ; ширину слоя будем считать достаточно большой. Нижнюю поверхность слоя будем считать твердой, а верхнюю — свободной. Свободная граница плоская, при этом поверхностное натяжение на ней предполагается линейно зависящим от температуры  $\sigma = \sigma_0 + \partial\sigma/\partial T (T - T_0)$ . Верхняя и нижняя границы слоя считаются теплоизолированными.

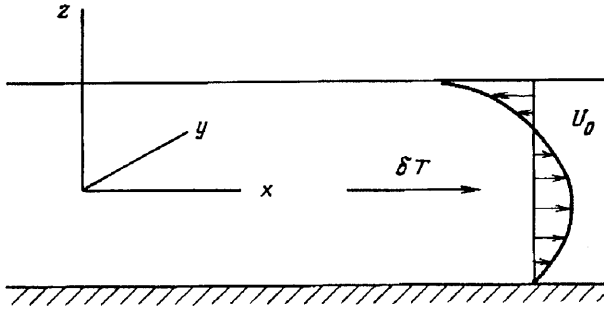
При малых градиентах температуры возникает одноячейковая циркуляция внутри слоя, которую в средней части можно считать плоскопараллельным течением. Для исследования устойчивости этого течения рассмотрим случай бесконечного плоского слоя ( $L/H \rightarrow \infty$ ), соблюдая условие отсутствия среднего переноса жидкости через любое поперечное сечение слоя.

Так поставленная задача описывается тремя безразмерными параметрами: числом Прандтля  $Pr = \nu/a$ , числом Грасгофа  $Gr = g\beta\delta TH^4/L\nu^2$  и коэффициентом  $M = -\partial\sigma/\partial T (\rho g\beta H^2)^{-1}$ , характеризующим влияние сил поверхностного натяжения. При определении этих критериев подобия использованы следующие размерные величины:  $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $a$  — коэффициент температуропроводности и  $\rho$  — плотность жидкости.

Число Прандтля и коэффициент  $M$ , являющийся отношением числа Марангони  $Ma = -\partial\sigma/\partial T (\delta TH^2/L\rho\nu a)$  к числу Рэлея:  $M = Ma/(GrPr)$ , и показывающий соотношение сил плавучести и сил поверхностного натяжения, определяются только физическими свойствами жидкости и размером слоя. Задача нахождения критического градиента температуры, при котором происходит потеря устойчивости, может быть сформулирована как нахождение критического числа Грасгофа  $Gr_0(Pr, M)$  в зависимости от остальных определяющих параметров.

Выберем ось  $z$  поперек слоя, ось  $x$  — вдоль градиента температуры, а начало системы координат расположим в середине слоя, как показано на фиг. 1. В качестве единиц измерения длины, скорости, температуры и времени выберем  $H/2$ ,  $2g\beta\delta TH^3/L\nu$ ,  $8\delta TH/L$  и  $H^2/4\nu$  соответственно. Тогда описывающие конвективное движение уравнения Навье — Стокса в приближении Буссинеска запишутся в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + Gr (V \cdot \nabla) V = -\nabla P + \Delta V + Te$$



Фиг. 1

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{Gr}(\mathbf{V} \cdot \nabla T) = \frac{1}{\operatorname{Pr}} \Delta T$$

где  $\mathbf{V} = (U, V, W)$  — вектор скорости течения,  $P$  — давление,  $T$  — температура,  $e$  — единичный вектор, направленный против силы тяжести.

Граничные условия на нижней твердой и на верхней свободной поверхностях соответственно для системы (1.1) задаются следующим образом:

$$z = -1: \quad U = V = W = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$z = 1: \quad W = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -4M \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -4M \frac{\partial T}{\partial y}$$

Система уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) всегда имеет решение, описывающее плоскопараллельное течение [8], которое определяется формулами

$$\mathbf{V}_0 = (U_0, 0, 0) \quad (1.3)$$

$$U_0(z) = \sqrt[3]{384} [4z^3 - 3z^2 - 6z + 1 - 12M(3z^2 + 2z - 1)]$$

$$T_0 = \sqrt[3]{16} x + \operatorname{Gr} \operatorname{Pr} \tau_0(z)$$

$$\tau_0(z) = \sqrt[3]{122880} [4z^5 - 5z^4 - 20z^3 + 10z^2 + 40z - 20M(3z^4 + 4z^3 - 6z^2 - 12z)]$$

Для дальнейшего использования запишем систему (1.1) для возмущений неизвестных функций относительно решения (1.3) (штрих обозначает дифференцирование по  $z$ )

$$u = U - U_0, \quad v = V, \quad w = W, \quad p = P - P_0, \quad \theta = T - T_0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{Gr} \left( U_0 \frac{\partial u}{\partial x} + U_0' w + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\operatorname{Gr} \left( U_0 \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{Gr} \left( U_0 \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w + \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\operatorname{Gr} \left( U_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} + u/16 + \operatorname{Gr} \operatorname{Pr} \tau_0' w + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{\operatorname{Pr}} \Delta \theta$$

с граничными условиями

$$z = -1: \quad u = v = w = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

$$z = 1: \quad w = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -4M \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -4M \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Рассматриваемая задача обладает естественной группой симметрий. Так как начало системы координат в плоскости  $xu$ , а также направление оси  $y$  могут быть выбраны произвольно, то задача инвариантна относительно сдвигов вдоль осей  $x$  и  $y$  и отражений относительно плоскости  $xz$ . Более точно: если набор функций

$$\{u(x, y, z), v(x, y, z), p(x, y, z), \theta(x, y, z)\}$$

удовлетворяет задаче (1.4), (1.5), то наборы

$$\{u(x + s, y, z), v(x + s, y, z), p(x + s, y, z), \theta(x + s, y, z)\}$$

$$\{u(x, y + s, z), v(x, y + s, z), p(x, y + s, z), \theta(x, y + s, z)\}$$

$$\{u(x, -y, z), -v(x, -y, z), p(x, -y, z), \theta(x, -y, z)\}$$

являются решениями той же задачи.

Цель работы состоит в том, чтобы определить ту область определяющих параметров  $Gr$ ,  $Pr$  и  $M$ , в которой система уравнений (1.4) с граничными условиями (1.5) имеет устойчивое нулевое решение, найти бифуркационные значения параметров и исследовать структуру решений, возникающих после бифуркации. Критические значения параметров могут быть найдены в результате анализа линеаризованной системы уравнений, а нахождение закритических решений требует анализа полных нелинейных уравнений.

2. Для нахождения критических значений параметров, при которых происходит потеря устойчивости основного течения (1.3), линеаризуем систему (1.4) и будем искать возмущения в виде произведения некоторой амплитудной функции, зависящей только от координаты  $z$ , и гармонической волны вида  $\exp\{i(kx + hy) + \lambda t\}$ .

Обозначим амплитудные функции возмущений скоростей, давления и температуры теми же буквами  $u, v, w, p, \theta$  и введем параметры  $\rho$  и  $\alpha$  — модуль и угол наклона волнового вектора  $(k, h)$ . Для конкретных значений волновых чисел  $k$  и  $h$  получаем задачу на собственные значения

$$\lambda u = -Gr (ikU_0 u + U_0' w) - \rho^2 u + u'' - ikp \quad (2.1)$$

$$\lambda v = -Gr (ikU_0 v) - \rho^2 v + v'' - ihp$$

$$\lambda w = -Gr (ikU_0 w) - \rho^2 w + w'' - p' + \theta$$

$$\lambda \theta = -Gr \left( ikU_0 \theta + \frac{u}{16} + Gr Pr \tau_0' w \right) + \frac{1}{Pr} (\theta'' - \rho^2 \theta)$$

при условии

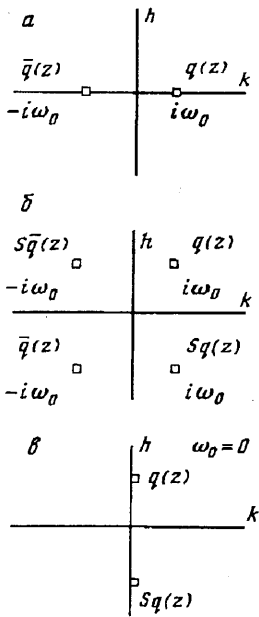
$$iku + ihv + w' = 0 \quad (2.2)$$

с краевыми условиями

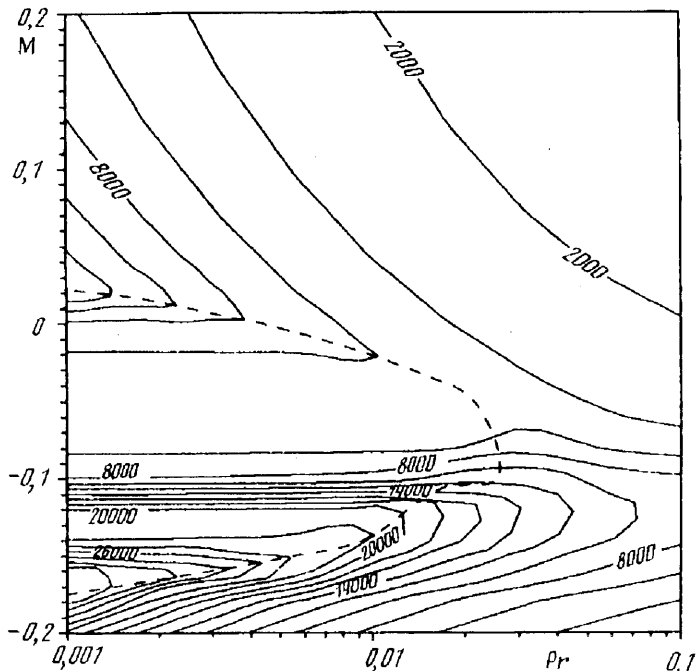
$$z = -1: \quad u = v = w = \theta' = 0 \quad (2.3)$$

$$z = 1: \quad w = \theta' = 0, \quad u' = -4ikM\theta, \quad v' = -4ihM\theta$$

Вводя обозначение  $q = (u, v, w, \theta)^T$ , сформулированную задачу можно рассматривать как задачу о нахождении собственных значений и функций оператора  $L_{kh}^0$  ( $L_{kh}^0 q = \lambda q$ ), задаваемого правыми частями уравнений системы (2.1)



Фиг. 2



Фиг. 3

(давление определяется из требования выполнения условия (2.2)), на пространстве функций, удовлетворяющих условию (2.2) и краевым условиям (2.3).

Собственное число  $\lambda$  с наибольшей действительной частью показывает, затухает возмущение с волновым вектором  $(k, h)$  (в случае  $\text{Re } \lambda < 0$ ) или растет (в случае  $\text{Re } \lambda > 0$ ). Таким образом, если найдется хотя бы один вектор  $(k, h)$ , которому соответствует растущее возмущение, то исследуемое решение неустойчиво. В пространстве параметров задачи можно определить нейтральную поверхность, в точках которой все собственные значения  $\lambda$  имеют неположительную действительную часть, причем найдется возмущение с волновым вектором  $(k^*, h^*)$ , для которого собственное число с максимальной действительной частью  $\lambda$  имеет нулевую действительную часть (нейтральное возмущение). Мнимая часть  $\omega_0 = \text{Im } \lambda^*$  собственного числа, соответствующего нейтральному возмущению, определяет частоту колебаний возможно возникающего вторичного течения, действительность собственного числа  $\lambda$  означает возможность возникновения нового стационарного течения (монотонная потеря устойчивости).

Из симметрии задачи следует, что если для волнового вектора  $(k, h)$  найдены собственное число  $\lambda$  и соответствующая ему собственная функция  $q$ , то для волнового вектора  $(-k, -h)$  найдется собственная функция  $\bar{q}$  с собственным числом  $\bar{\lambda}$  (черта сверху обозначает комплексное сопряжение), а для волнового вектора  $(k, -h)$  найдется собственная функция  $Sq$  с собственным числом  $\lambda$  (см. фиг. 2). Здесь через  $S$  обозначен оператор, переводящий вектор  $q = (u, v, w, \theta)^T$  в вектор  $Sq = (u, -v, w, \theta)^T$ .

3. Для численного решения поставленных задач используется подход, развитый в работах К. И. Бабенко (см. [9]), применение этого метода к задачам конвективной устойчивости описано в [10].

Дискретизация дифференциальных операторов проводится методом коллокаций, при этом основными моментами являются выбор узлов для интерполирования искомого решения и выбор узлов, в которых проверяется выполнение уравнения. В описываемом методе узлы интерполяции и коллокации

выбираются одинаковыми и располагаются в нулях многочлена Чебышева первого рода. Опишем использование метода на примере дискретизации оператора  $L_{kh}^0$ .

В задаче (2.1) — (2.3) делаем замену, определяя новые горизонтальные скорости  $\eta$  и  $\chi$  соответственно вдоль и поперек направления волнового вектора

$$\eta = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad \chi = -u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

В новых переменных оператор  $L_{kh}^0$  запишется в виде

$$\eta^* = -\text{Gr} \left( ikU_0\eta + \frac{k}{\rho} U_0' w \right) - \rho^2 \eta + \eta'' - i\rho p \quad (3.1)$$

$$\chi^* = -\text{Gr} \left( ikU_0\chi - \frac{h}{\rho} U_0' w \right) - \rho^2 \chi + \chi''$$

$$w^* = -\text{Gr} (ikU_0 w) - \rho^2 w + w'' - p' + \theta$$

$$\theta^* = -\text{Gr} \left( ikU_0 \theta + \frac{1}{16\rho} (k\eta - h\chi) + \text{Gr Pr } \tau_0' w \right) + \frac{1}{\text{Pr}} (\theta'' - \rho^2 \theta)$$

с дополнительными условиями

$$i\rho\eta + w' = 0, \quad i\rho\eta^* + w^{*'} = 0 \quad (3.2)$$

и краевыми условиями

$$z = -1: \quad \eta = \chi = w = \theta' = 0 \quad (3.3)$$

$$z = 1: \quad w = \theta' = \chi' = 0, \quad \eta' = -4i\rho M\theta$$

Аппроксимируем входящие в задачу (3.1) функции многочленами, удовлетворяющими краевым условиям (3.3). Для этого на отрезке  $-1 \leq z \leq 1$  выберем  $n$  узлов

$$z_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

в нулях многочлена Чебышева первого рода  $T_n(z)$ . Построим интерполяционные многочлены Лагранжа

$$P_j(z) = \frac{T_n(z)}{(z - z_j) T_n'(z_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

характеризующиеся тем, что значение многочлена  $P_j$  в  $j$ -м узле равно единице, а в остальных — нулю. Так как граничные условия для давления не заданы, аппроксимируем давление  $p(z)$  многочленом степени  $n-1$

$$p(z) \approx \sum_{j=1}^n p(z_j) P_j(z)$$

значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями функции  $p(z)$ .

Для аппроксимации функций  $w(z)$ ,  $\chi(z)$  и  $\theta(z)$  с учетом краевых условий предлагается использовать следующий способ. Пусть надо аппроксимировать функцию  $f(z)$ , удовлетворяющую краевым условиям

$$a_1 f(-1) + b_1 f'(-1) = 0, \quad a_2 f(1) + b_2 f'(1) = 0$$

Аппроксимируем ее с использованием интерполяционных многочленов вида

$$F_j(z) = \{(z - z_j) [c_j(z + z_j) + d_j] + 1\} P_j(z), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

где числа  $c$  и  $d$  определяются из условий

$$a_1 F_j(-1) + b_1 F_j'(-1) = 0, \quad a_2 F_j(1) + b_2 F_j'(1) = 0$$

т. е. многочлены  $F_j(z)$  удовлетворяют соответствующим краевым условиям. После определения таким образом многочленов  $F_j(z)$  аппроксимируем функцию  $f(z)$  полиномом степени  $n+1$

$$f(z) \approx \sum_{j=1}^n f(z_j) F_j(z)$$

принимаящим в узлах интерполяции те же значения, что и интерполируемая функция. Полученный многочлен автоматически удовлетворяет требуемым краевым условиям. Отметим, что указанный способ интерполяции функции, заданной в выбранных узлах, позволяет аппроксимировать и ее производные, так как

$$f'(z) \approx \sum_{j=1}^n f(z_j) F_j'(z), \quad f''(z) \approx \sum_{j=1}^n f(z_j) F_j''(z)$$

Выполняя указанную процедуру, получаем аппроксимации

$$w(z) \approx \sum_{j=1}^n w(z_j) W_j(z), \quad \chi(z) \approx \sum_{j=1}^n \chi(z_j) V_j(z), \quad \theta(z) = \sum_{j=1}^n \theta(z_j) \tau_j(z)$$

$$\eta(z) \approx \sum_{j=1}^n \eta(z_j) U_j(z) - 4ipM \left( \omega(z) \sum_{j=1}^n \theta(z_j) \tau_j(1) \right)$$

где использован многочлен

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2} \right) T_n(z)$$

Для дискретизации оператора подставим в систему (3.1) вместо неизвестных функций и их производных аппроксимирующие многочлены и возьмем ее ограничение на узлы интерполяции  $\{z_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ . Отбросив погрешность аппроксимации, получаем конечномерное приближение системы (3.1). При помощи условий несжимаемости (3.2) можно исключить давление  $p$  и скорость  $\eta$ . Окончательно дискретный аналог оператора  $L_{kh}^0$  можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} w^* \\ \theta^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ww} & A_{w\theta} & 0 \\ A_{\theta w} & A_{\theta\theta} & 0 \\ A_{\chi w} & 0 & A_{\chi\chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \theta \\ \chi \end{pmatrix}$$

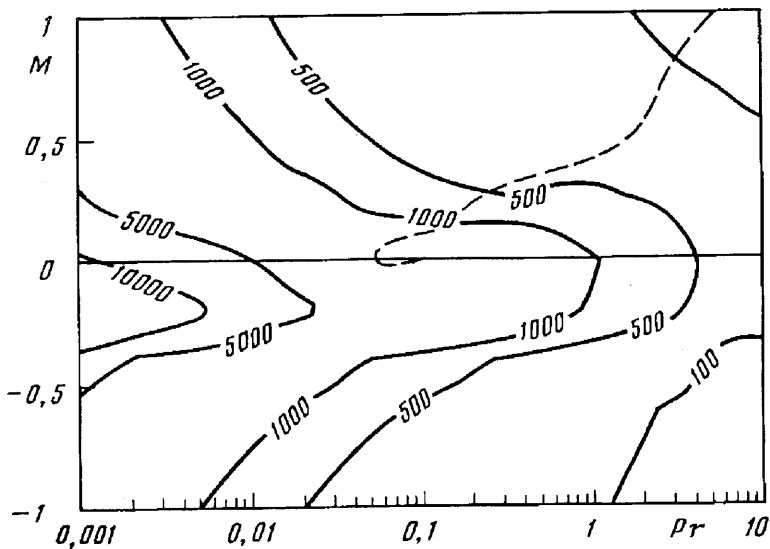
где  $w$ ,  $\theta$ , и  $\chi$  — векторы, составленные из значений соответствующих функций в узлах интерполяции, а матрицы коэффициентов определяются параметрами задачи.

Используемый метод, т. е. аппроксимация решений задачи (2.1) — (2.3) многочленами, позволяет определить невязки полученного решения не только в узлах коллокации, но и в произвольной точке отрезка  $-1 \leq z \leq 1$ , что дает возможность оценивать качество полученного решения (достаточно ли большое значение  $n$  порядка аппроксимации выбрано для решения задачи). Для получения такой оценки необходимо находить как собственные числа, так и собственные векторы алгебраической задачи. При построении нейтральных кривых и поверхностей нужны только собственные значения, что сокращает время проведения расчета. Процедура получения нейтральной кривой сводится к нахождению экстремума действительной части максимального собственного числа по волновым числам при фиксированных параметрах задачи и к определению нулей действительной части собственного числа при фиксированных волновых числах.

4. Будем интересоваться критическим значением числа Грасгофа  $Gr_0$  ( $Pr$ ,  $M$ ), которое при фиксированных параметрах  $Pr$  и  $M$  определяется как минимальное по всем волновым векторам значение  $Gr$ , при котором наибольшее значение действительной части точек спектра оператора  $L_{kh}^0$  равно нулю. Приведенные расчеты показывают, что в исследуемой задаче присутствуют различные типы критических мод. Наиболее опасными модами в зависимости от определяющих параметров могут быть (фиг. 2): а) плоская ( $h = 0$ ) колебательная ( $\omega_0 \neq 0$ ) мода, б) трехмерная ( $k \neq 0, h \neq 0$ ) колебательная ( $\omega_0 \neq 0$ ) мода, в) спиральная ( $k = 0$ ) стационарная ( $\omega_0 = 0$ ) мода.

Плоская мода наиболее опасна при малых значениях чисел Прандтля ( $Pr < 0,025$ ) и  $M$  ( $-0,018 < M < 0,025$ ). Критическое число Грасгофа при этом практически не зависит от числа Прандтля и изменяется в диапазоне от  $5,5 \cdot 10^4$  до  $3,5 \cdot 10^5$ . Изолинии критического значения числа Грасгофа приведены на фиг. 3, где штриховая линия разделяет области плоской и трехмерной мод. Критическая частота и критическая длина волны также зависят в основном только от числа  $M$  и изменяются в диапазонах от 1 до 10 и от 4 до 12 соответственно.

Для большинства значений определяющих параметров (вне областей неустойчивости плоской и спиральной мод и области абсолютной устойчивости) наиболее



Фиг. 4

опасны трехмерные возмущения, изолинии критического значения числа Грасгофа для которых приведены на фиг. 3 (малые значения числа Прандтля) и фиг. 4.

Спиральная мода наиболее опасна при значениях числа Прандтля от 0,41 до 1,2 в узкой полосе значений числа  $M$  от  $-0,004$  до  $0,002$ . Критическое значение числа Грасгофа оказывается больше  $10^6$  и стремится к бесконечности при приближении числа Прандтля к 1,2. Зависимость критического числа Грасгофа от числа  $M$  для  $Pr = 0,56$  приведена на фиг. 5 сплошной кривой. При  $Pr > 1,2$  и малых значениях числа  $M$  основное течение абсолютно устойчиво.

В точках нейтральной поверхности  $Gr_0(Pr, M)$  основное течение (1.3) теряет устойчивость для возмущений с волновым вектором  $(k, h)$ . Характеристики того течения, которое получается при закритических значениях числа Грасгофа, могут быть получены только путем анализа полных нелинейных уравнений (1.2). Целью дальнейшего исследования является определение закритических режимов течения в классе функций, периодических по координатам  $x$  и  $y$  с периодами  $2\pi/k$  и  $2\pi/h$ . Вопросы об эволюции длины волны и устойчивости полученных решений в целом остаются за рамками настоящего исследования.

Определим параметр закритичности

$$\mu = Gr - Gr_0$$

тогда в классе периодических бездивергентных полей, удовлетворяющих граничным условиям (1.5), система (1.4) может быть записана в виде

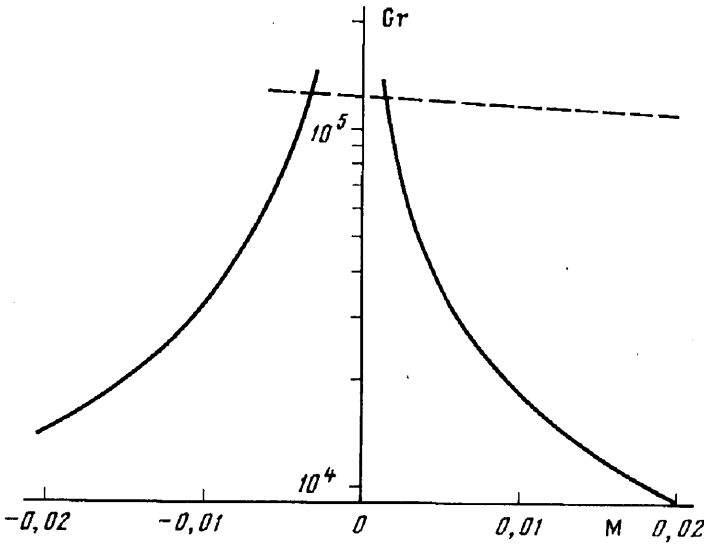
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = L^0(Q) + \mu L^1(Q) + \mu^2 L^2(Q) + M(Q, Q) + \frac{\mu}{Gr_0} M(Q, Q) \quad (4.1)$$

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \\ \theta(x, y, z) \end{pmatrix}$$

сумма  $L^0(Q) + \mu L^1(Q) + \mu^2 L^2(Q)$  представляет линейную часть системы, а  $M(Q, Q) + \mu/Gr_0 M(Q, Q)$  — нелинейную часть.

Для амплитудных функций  $q(z)$  полей  $Q(x, y, z) = q(z) \exp\{i(kx + hy)\}$ , явно продифференцировав функцию  $Q$  по  $x$  и  $y$ , получаем следующие аналоги операторов  $L^0(Q)$ ,  $L^1(Q)$  и  $M(Q, Q)$ .





Фиг. 5

Для оператора  $L^0(Q)$  имеем

$$L_{k,h}^0(q) = \begin{pmatrix} -Gr_0(ikU_0u + U_0'w) + u'' - \rho^2u - ikp \\ -Gr_0(ikU_0v) + v'' - \rho^2v - ihp \\ -Gr_0(ikU_0w) + \theta + w'' - \rho^2w - p' \\ -Gr_0\left(ikU_0\theta + \frac{u}{16} + Gr Pr \tau_0'w\right) + \frac{1}{Pr}(\theta'' - \rho^2\theta) \end{pmatrix}$$

при этом для  $k=h=0$  получается

$$L_{0,0}^0(q) = \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \\ 0 \\ -Gr_0\frac{u}{16} + \frac{1}{Pr}\theta'' \end{pmatrix} + p_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

где константы  $p_x$  и  $p_y$  определяются постоянным градиентом давления вдоль слоя. В [3] не учтена возможность наличия градиента давления, что в итоге привело автора к выводу об увеличении со временем «средней температуры» в слое.

Для оператора  $L'(Q)$  имеем

$$L_{k,h}'(q) = \begin{pmatrix} -(ikU_0u + U_0'w) - ikp \\ -(ikU_0v) - ihp \\ -(ikU_0w) - p' \\ -(ikU_0\theta + u/16 + 2Gr_0 Pr \tau_0'w) \end{pmatrix}$$

Для двух полей  $Q_1 = q_1(z) \exp\{i(kx + hy)\}$  и  $Q_2 = q_2(z) \exp\{i(lx + my)\}$  имеем  $M_{k,h,l,m}(q_1, q_2) =$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 Gr_0(ilu_1u_2 + imv_1u_2 + w_1u_2' + iku_2u_1 + ihv_2u_1 + w_2u_1') - i(k+1)p \\ -1/2 Gr_0(ilu_1v_2 + imv_1v_2 + w_1v_2' + iku_2v_1 + ihv_2v_1 + w_2v_1') - i(h+m)p \\ -1/2 Gr_0(ilu_1w_2 + imv_1w_2 + w_1w_2' + iku_2w_1 + ihv_2w_1 + w_2w_1') - p' \\ -1/2 Gr_0(ilu_1\theta_2 + imv_1\theta_2 + w_1\theta_2' + iku_2\theta_1 + ihv_2\theta_1 + w_2\theta_1') \end{pmatrix}$$

В дальнейшем анализе будем использовать идеи и факты теории бифуркаций, которые можно найти, например, в [11]. При малых закритичностях после

потери устойчивости динамическая система (4.1) имеет инвариантное устойчивое центральное многообразие, касающееся в расширенном фазовом пространстве  $(q, \mu)$  как конечномерного подпространства, порожденного собственными функциями линеаризованной задачи, соответствующими собственным значениям с нулевой действительной частью, так и оси  $\mu$ . Исследуем поведение нашей системы на центральном многообразии для плоской и трехмерной мод, которые являются определяющими для малых чисел Прандтля.

5. В двумерном случае ( $h=0$ ) два собственных числа  $\pm i\omega_0$  оператора  $L^0$  проходят через мнимую ось, им соответствуют две комплексно-сопряженные собственные функции

$$Q = q(z) \exp \dot{u} ikxA \quad \text{и} \quad \bar{Q} = \bar{q}(z) \exp \ddot{u} - ikxA \quad (5.1)$$

Вводя на центральном многообразии координаты  $(\gamma, \bar{\gamma})$ , решение можно искать в виде

$$W = \Gamma + Y \quad (5.2)$$

$$\Gamma = \gamma Q + \bar{\gamma} \bar{Q}, \quad Y = \sum_{p+r+s \geq 2} \mu^p \Phi_{prs} \gamma^r \bar{\gamma}^s$$

При этом уравнение (4.1) в проекции на собственное подпространство записывается в виде

$$\frac{d\Gamma}{dt} = f(\mu, \gamma, \bar{\gamma}) Q + \overline{f(\mu, \gamma, \bar{\gamma})} \bar{Q}$$

Из инвариантности задачи относительно сдвигов вдоль оси  $x$  следует, что  $f(\mu, e^{iks}\gamma, e^{-iks}\bar{\gamma}) = e^{iks} f(\mu, \gamma, \bar{\gamma})$

Поэтому окончательно приходим к следующему уравнению в разложении по степеням  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$ :

$$\frac{d\gamma}{dt} = i\omega_0 \gamma + a\mu\gamma + b\gamma^2\bar{\gamma} + \dots \quad (5.3)$$

Для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  подставим решение в форме (5.2) в уравнение (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} Q + \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \bar{Q} + \sum_{p+r+s \geq 2} \mu^p \Phi_{prs} \frac{d}{dt} (\gamma^r \bar{\gamma}^s) = \\ = L^0 (\Gamma + Y) + \mu L^1 (\Gamma + Y) + \mu^2 L^2 (\Gamma + Y) + \\ + M (\Gamma + Y, \Gamma + Y) + \frac{\mu}{G\Gamma_0} M (\Gamma + Y, \Gamma + Y) \end{aligned}$$

воспользуемся видом  $d\gamma/dt$  из (5.3) и приравняем члены одного порядка. В порядке  $\mu\gamma$  получаем

$$a\mu\gamma Q + i\omega_0 \mu \Phi_{110} \gamma = \mu\gamma L_0 (\Phi_{110}) + \mu\gamma L_1 (Q)$$

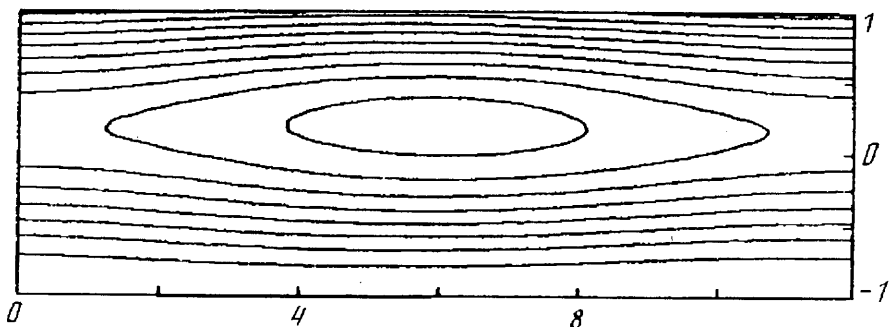
Учитывая (5.1), получаем

$$\Phi_{110} = \varphi_{110}(z) \exp \dot{u} ikxA$$

$$[L_{k,0}^0 - i\omega_0] \varphi_{110} = -L_{k,0}^1 q + aq \quad (5.4)$$

Отметим, что оператор в левой части полученного уравнения (5.4) вырожден, поэтому константа  $a$  находится из условия разрешимости этого уравнения.

Во втором порядке по  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$  получаем



Фиг. 6

$$\sum_{r+s=2} \Phi_{0rs} \frac{d}{dt} (\gamma^r \bar{\gamma}^s) = \sum_{r+s=2} \gamma^r \bar{\gamma}^s L^0 (\Phi_{0rs}) + M (\Gamma, \Gamma)$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt} (\gamma^i \bar{\gamma}^j) = i\omega_0 (i - j) \gamma^i \bar{\gamma}^j + \ddot{u}RA$$

где  $R$  — члены более высокого порядка, получаем

$$\Phi_{011} = \varphi_{011}(z), \quad \Phi_{020} = \varphi_{020}(z) \exp \ddot{u}2ikxA$$

$$L_{0,0}^0 \Phi_{011} = -2M_{k,0,-k,0}(q, \bar{q}) \quad (5.5)$$

$$[L_{2k,0}^0 - 2i\omega_0] \varphi_{020} = -M_{k,0,k,0}(q, q)$$

Оператор  $L_{0,0}^0$  в (4.2) определен с точностью до констант  $p_x$  и  $p_y$ . Константа  $p_x$  выбирается из условия разрешимости уравнения (5.5), при этом легко показать, что, так как течение  $q(z) \exp \{ikx\}$  имеет нулевой расход через любое поперечное сечение, константу  $p_y$  можно выбрать так, чтобы  $\varphi_{011}$  также имело нулевой расход через поперечные сечения.

В третьем порядке по  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$  получаем

$$b\gamma^2 \bar{\gamma} Q + \overline{b\gamma^2 \bar{\gamma} Q} + \sum_{r+s=3} \Phi_{0rs} \frac{d}{dt} (\gamma^r \bar{\gamma}^s) = \sum_{r+s=3} \gamma^r \bar{\gamma}^s L^0 (\Phi_{0rs}) + 2M \left( \Gamma, \sum_{r+s=3} \gamma^r \bar{\gamma}^s \Phi_{0rs} \right)$$

Откуда имеем

$$\Phi_{0rs} = \varphi_{0rs}(z) \exp \{i(r-s)kx\}$$

$$[L_{k,0}^0 - i\omega_0] \varphi_{021} = bq - 2M_{k,0,0,0}(q, \varphi_{011}) - 2M_{-k,0,2k,0}(\bar{q}, \varphi_{020}) \quad (5.6)$$

Константа  $b$  опять находится из условия разрешимости уравнения (5.6).

Окончательно получаем первые два члена разложения вторичного течения

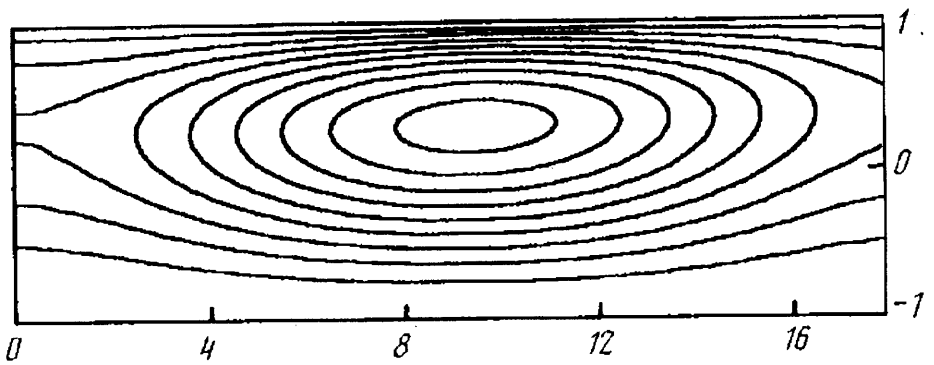
$$W = \varepsilon (A_1 + \bar{A}_1) + \varepsilon^2 (A_2 + \bar{A}_2) + \dots \quad (5.7)$$

$$A_1 = q \exp \ddot{u}i(kx + \omega t)A, \quad A_2 = \varphi_{020} \exp \ddot{u}2i(kx + \omega t)A + 1/2 \varphi_{011}$$

$$\varepsilon^2 = -\frac{\text{Re}(a)}{\text{Re}(b)} \mu + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \frac{\text{Im}(b) \text{Re}(a) - \text{Im}(a) \text{Re}(b)}{\text{Re}(a)} \varepsilon^2 + \dots$$

Вторичное течение существует при  $\varepsilon^2 > 0$  и устойчиво в рассматриваемом классе периодических течений при  $\text{Re}(b) < 0$ .

Проведенные расчеты показали, что во всей области существования плоской моды вторичное течение, задаваемое формулой (5.7) существует и устойчиво. Это течение двумерно и представляет из себя стационарные валы, движущиеся



Фиг. 7

вдоль или против направления градиента температуры (оси  $x$ ). На фиг. 6 изображены изолинии функции тока такого течения при  $Pr = 0,001$ ,  $M = 0,02$ ,  $Gr = 14000$  (бифуркационные значения  $Gr_0 = 12906$ ,  $k = 0,527$ ,  $\omega_0 = 25,4$ ).

6. В трехмерном случае два двукратных собственных числа  $\pm i\omega_0$  оператора  $L^0$  проходят через мнимую ось, им соответствуют четыре комплексно-сопряженные собственные функции

$$Q = q(z) \exp\{i(kx + hy)\}, \quad \bar{Q} = \bar{q}(z) \exp\{-i(kx + hy)\}$$

$$SQ = S q(z) \exp\{i(kx - hy)\}, \quad \bar{SQ} = S \bar{q}(z) \exp\{-i(kx - hy)\}$$

Вводя на центральном многообразии координаты  $(\gamma, \mu)$ , решение можно искать в виде

$$W = \Gamma + Y \tag{6.1}$$

$$\Gamma = \gamma_1 Q + \bar{\gamma}_1 \bar{Q} + \gamma_2 SQ + \bar{\gamma}_2 \bar{SQ}, \quad Y = \sum_{p+r+s+m+n \geq 2} \mu^p \Phi_{prsmn} \gamma_1^r \bar{\gamma}_1^s \gamma_2^m \bar{\gamma}_2^n$$

При этом уравнение (4.1) в проекции на собственное подпространство записывается в виде

$$\frac{d\Gamma}{dt} = f_1(\mu, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2) Q + f_2(\mu, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2) SQ + \text{с.с.}$$

где с.с. — комплексно-сопряженные члены.

Из инвариантности задачи относительно сдвигов в плоскости  $xu$  и отражений по  $y$  следует, что

$$f_1(\mu, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2) = f_2(\mu, \gamma_2, \bar{\gamma}_2, \gamma_1, \bar{\gamma}_1)$$

$$f_1(\mu, e^{iks} \gamma_1, e^{-iks} \bar{\gamma}_1, e^{-iks} \gamma_2, e^{-iks} \bar{\gamma}_2) = e^{iks} f_1(\mu, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2)$$

$$f_1(\mu, e^{ihs} \gamma_1, e^{-ihs} \bar{\gamma}_1, e^{-ihs} \gamma_2, e^{ihs} \bar{\gamma}_2) = e^{ihs} f_1(\mu, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2)$$

Поэтому окончательно приходим к следующему уравнению в разложении по степеням  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$ :

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = i\omega_0 \gamma_1 + a\mu \gamma_1 + b\gamma_1^2 \bar{\gamma}_1 + c\gamma_1 \gamma_2 \bar{\gamma}_2 + \dots \tag{6.2}$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = i\omega_0 \gamma_2 + a\mu \gamma_2 + b\gamma_2^2 \bar{\gamma}_2 + c\gamma_2 \gamma_1 \bar{\gamma}_1 + \dots$$

Аналогично предыдущему для определения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  подставим решение в форме (6.1) в уравнение (4.1) и, воспользовавшись видом  $d\gamma_i/dt$  из (6.2), приравняем члены одного порядка. Окончательно получаем

$$\Phi_{11000} = \varphi_{11000} \exp \ddot{u}i (kx + hy)A, \quad [L_{k,h}^0 - i\omega_0] \varphi_{11000} = -L_{k,h}^1 q + aq$$

$$\Phi_{0rsmn} = \varphi_{0rsmn} (z) \exp \ddot{u}i [(r - s + m - n)kx + (r - s - m + n)hy]A$$

$$L_{0,0}^0 \varphi_{01100} = -2M_{k,h,-k,-h}(q, \bar{q}), \quad [L_{2k,2h}^0 - 2i\omega_0] \varphi_{02000} = -M_{k,h,k,h}(q, q)$$

$$[L_{2k,0}^0 - 2i\omega_0] \varphi_{01010} = -2M_{k,h,k,-h}(q, Sq),$$

$$[L_{0,2h}^0 - 2i\omega_0] \varphi_{01001} = -2M_{k,h,-k,h}(q, \bar{Sq})$$

$$[L_{k,h}^0 - i\omega_0] \varphi_{02100} = bq - 2M_{k,h,0,0}(q, \varphi_{01100}) - 2M_{-k,-h,2k,2h}(\bar{q}, \varphi_{02000})$$

$$[L_{k,h}^0 - i\omega_0] \varphi_{01011} = cq - 2M_{k,h,0,0}(q, S\varphi_{01100}) -$$

$$- 2M_{-k,h,2k,0}(\bar{Sq}, \varphi_{01010}) - 2M_{k,-h,0,2h}(Sq, \varphi_{01001})$$

Константы  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а также компоненты постоянного давления вдоль слоя и в этом случае определяются из условий разрешимости соответствующих уравнений.

Система (6.2) может иметь несколько типов инвариантных траекторий: циклы  $|\gamma_1| = 0$  или  $|\gamma_2| = 0$  и некоторая обмотка тора  $|\gamma_1| = |\gamma_2|$ . В первом случае ( $|\gamma_1| = 0$ ) два члена разложения вторичного течения дают

$$W = \varepsilon (A_1 + \bar{A}_1) + \varepsilon^2 (A_2 + \bar{A}_2) + \dots$$

$$A_1 = q \exp \ddot{u}i (kx + hy + \omega t)A, \quad A_2 = \varphi_{02000} \exp \ddot{u}2i (kx + hy + \omega t)A + 1/2 \varphi_{01100}$$

$$\varepsilon^2 = - \frac{\operatorname{Re}(a)}{\operatorname{Re}(b)} \mu + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \frac{\operatorname{Im}(b) \operatorname{Re}(a) - \operatorname{Im}(a) \operatorname{Re}(b)}{\operatorname{Re}(a)} \varepsilon^2 + \dots$$

Вторичное течение существует при  $\varepsilon^2 > 0$  и устойчиво в рассматриваемом классе периодических течений при  $\operatorname{Re}(b) < 0$  и  $\operatorname{Re}(b - c) > 0$ .

Это течение представляет собой плоские волны, движущиеся под некоторым углом к градиенту температуры (оси  $x$ ). На фиг. 7 изображены проекции траекторий частиц такого течения на плоскость, перпендикулярную фронту и движущуюся вместе с волной, рассчитанные по формуле (6.2) при  $\operatorname{Pr} = 0,1$ ,  $M = 1$ ,  $\operatorname{Gr} = 205$  (бифуркационные значения  $\operatorname{Gr}_0 = 204$ ,  $k = 0,10$ ,  $h = 0,32$ ,  $\omega_0 = -2,73$ ).

Во втором случае ( $|\gamma_1| = |\gamma_2|$ ) два члена разложения вторичного течения дают

$$W = \varepsilon (A_1 + \operatorname{conj}) + \varepsilon^2 (A_2 + \operatorname{conj}) + \dots \quad (6.3)$$

$$A_1 = (q \exp \ddot{u}i (kx + hy + \omega t)A + Sq \exp \ddot{u}i (kx - hy + \omega t)A)$$

$$A_2 = \varphi_{02000} \exp \ddot{u}2i (kx + hy + \omega t)A + S\varphi_{00020} \exp \ddot{u}2i (kx - hy + \omega t)A +$$

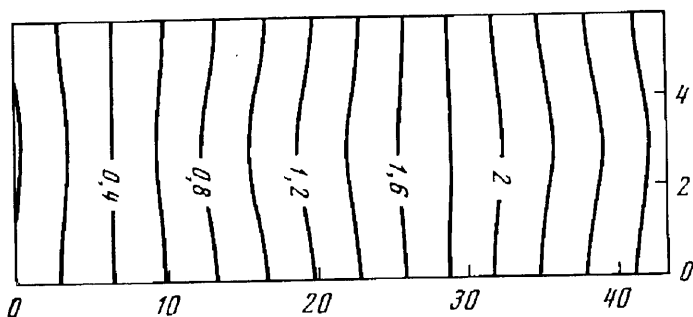
$$+ \varphi_{01001} \exp \ddot{u}2ihyA + \varphi_{01010} \exp \ddot{u}2i (kx + \omega t)A + 1/2 (\varphi_{01100} + S\varphi_{01100})$$

$$\varepsilon^2 = - \frac{\operatorname{Re}(a)}{\operatorname{Re}(b) + \operatorname{Re}(c)} \mu + \dots,$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{\operatorname{Im}(b + c) \operatorname{Re}(a) - \operatorname{Im}(a) \operatorname{Re}(b + c)}{\operatorname{Re}(a)} \varepsilon^2 + \dots$$

Вторичное течение существует при  $\varepsilon^2 > 0$  и устойчиво в рассматриваемом классе периодических течений при  $\operatorname{Re}(b + c) < 0$  и  $\operatorname{Re}(b - c) < 0$ .

Это течение представляет собой стоячие вдоль оси  $y$  волны, движущиеся вдоль или против градиента температуры (оси  $x$ ). На фиг. 8 изображены изотермы на поверхности жидкости при таком течении, рассчитанные по формуле (6.3)



Фиг. 8

при  $Pr = 10$ ,  $M = 0,8$ ,  $Gr = 69$  (бифуркационные значения  $Gr_0 = 68,5$ ,  $k = 0,15$ ,  $h = 1,1$ ,  $\omega_0 = 8,08$ ).

Результаты расчетов показали, что в зависимости от значений определяющих параметров реализуется (устойчив) тот или иной тип вторичного течения. В области малых чисел Прандтля и больших по модулю значений параметра  $M$  устойчивы решения первого типа, задаваемые формулой (6.2). Для остальных значений параметров устойчивы решения второго типа (формула (6.3)). На фиг. 4 области устойчивости вторичных течений разных типов разделены штриховой линией. Полученные результаты согласуются с [7], где найдено, что в случае полной невесомости ( $M \rightarrow \infty$ ) реализуются вторичные течения первого типа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
2. Laure P., Roux B. Linear and non linear analysis of the Hadley circulation//Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr fluids: A GAMM-Workshop/Ed. Roux B. Vieweg, 1989. P. 307—318. (Notes on Numer. Fluid Dynamics. V. 27).
3. Laure P. Étude des mouvements de convection dans une cavité rectangulaire soumise à un gradient de température horizontal//J. Mec. Theor. et Appl. 1987. V. 6. № 3. P. 351—382.
4. Pavlovsky D. S. Stability of flows with interaction between different convective mechanisms in microgravity//Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity, Reviewed: Proc. 1st Intern. Symp. on Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity. Gordon and Breach Sci. Pub., 1992. P. 37—42.
5. Kuo H. P., Korpela S. A. Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side//Phys. Fluids. 1988. V. 31. № 1. P. 33—42.
6. Smith M. K., Davis S. H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Pt 1. Convective instabilities//J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 119—144.
7. Smith M. K. The nonlinear stability of dynamic thermocapillary liquid layers//J. Fluid Mech. 1988. V. 194. P. 391—415.
8. Бирх П. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости//ПМТФ. 1966. № 3. С. 69—72.
9. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 743 с.
10. Павловский Д. С. Решение задач конвективной устойчивости многокомпонентных жидкостей: Препринт № 416. М.: Ин-т пробл. механ. АН СССР, 1989. 37 с.
11. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию  
19.I.1994