

УДК 532.595+532.516

© 1994 г. И. Б. БОГОРЯД, Г. В. ХРИСТЕНКО

О ДЕМПФИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ СОСУД

Приводятся результаты численного эксперимента по определению затухания свободных осесимметричных колебаний вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей прямой круговой цилиндр. Эксперимент проводится для чисел Рейнольдса на нижней границе применимости приближения теории ламинарного пограничного слоя и для случая конечных амплитуд колебаний. На уровне количественных оценок обсуждается влияние нелинейных эффектов на величину оценок логарифмического декремента колебаний.

В исследованиях, посвященных динамике жидкости, частично заполняющей полость тела, диссипация энергии колебаний рассчитывается с использованием двух основных допущений: движения свободной поверхности малы так, что уравнения Навье — Стокса могут быть линеаризованы и вязкие свойства жидкости вполне могут быть описаны в приближении ламинарного пограничного слоя [1, 2 и др.]. Причем модель с такими допущениями применяется и для анализа динамики в условиях микрогравитации (см., например, [3, 4]).

Ниже приводятся результаты решения задачи об осесимметричных колебаниях жидкости в прямом круговом цилиндре конечно-разностным методом. При этом ограничения на порядок малости амплитуды колебаний и сил вязкого трения не налагаются. Обсуждается механизм влияния конвективных членов в уравнениях Навье — Стокса на расстояние энергии колебаний свободной поверхности.

1. Постановка задачи. Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и неразрывности и подчиняется краевым условиям на свободной Σ и смоченной S поверхностях

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (w \nabla) w - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w + \nabla \Pi = 0, \quad \Pi = p + \frac{\zeta}{\text{Fr}} \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \Phi, \quad \Phi = \left(0, \frac{v^2}{r} \right)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$\text{div } w(x, t) = 0, \quad w = (w_n, w_t) = (u, v), \quad x = (z, r) \quad (1.2)$$

$$\Pi - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w_n}{\partial n} = \frac{\zeta}{\text{Fr}}, \quad \frac{\partial w_n}{\partial \tau} + \frac{\partial w_t}{\partial n} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = w \quad (x \in \Sigma) \quad (1.3)$$

$$w_n = 0, \quad \frac{\partial w_t}{\partial n} = \beta w_t \quad (x \in S) \quad (1.4)$$

Условия для касательной составляющей w_t заданы в соответствии с [6]. Там же показано, что $\beta \sim \text{Re}^{-1/2}$.

Движение жидкости развивается из состояния покоя под действием начального импульса давления, приложенного к свободной поверхности

$$\Pi(x, 0) = L(r), \quad \zeta(r, 0) = 0 \quad (1.5)$$

Здесь Π — безразмерный аналог давления, Fr — число Фруда, $z = H + \zeta(r, t)$ — уравнение формы свободной поверхности, $z = H$ — плоскость зеркала невозмущенной поверхности, $r = 0$ — ось цилиндра; n, τ — орты нормали (внешней) и касательной к $S + \Sigma$, $L(r)$ — функция формы начального возмущения.

2. Метод квазилинеаризации и алгоритм решения. При решении краевой задачи (1.1)—(1.5) используются методы квазилинеаризации [7] и расщепления по пространственным координатам [8].

Метод [7] предполагает построение последовательности линейных приближений по особым аппроксимационным формулам. Для инерционных членов уравнений (1.1) они имеют вид

$$[(w\nabla)w]^{k+1} \sim [(w\nabla)w]^{km} + (\nabla w^{km})(w^{k+1} - w^{km}) + [\nabla(w^{k+1} - w^{km})]w^{km} + O(\Delta t^2) \quad (2.1)$$

Здесь Δt — шаг по времени при разностной аппроксимации задачи; $t^k = k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots$; m — число итераций на временном слое k ; $m = 1, 2, \dots$

В [7] показано, что построенный по (2.1) итерационный процесс обладает свойством монотонности и квадратичной сходимости

$$|w^{km+1} - w^{km}| \leq c|w^{km} - w^{k+1}|^2$$

где $c = \text{const}$, не зависящая от m .

Эти свойства обеспечивают более быструю сходимость последовательности $\{w^{km}\}$ к w^{k+1} , сконструированной по схеме (2.1), чем по другим схемам [9]. Более того, если разностную аппроксимацию (1.1) по времени проводить с точностью $O(\Delta t^2)$ и учесть, что суммарная погрешность схемы расщепления будет также порядка $O(\Delta t^2)$, то окажется, что с ошибкой того же порядка в (2.1) можно ограничиться $m = 1$. Численный эксперимент подтвердил в дальнейшем эти оценки.

В результате нелинейная краевая задача (1.1)—(1.4) заменяется при прежних начальных условиях (1.5) эквивалентной с точностью до $O(\Delta t^2)$ последовательностью линейных на каждом шаге задач

$$\frac{1}{3} \frac{\partial w^{k+1/3}}{\partial t} + u^{k+1/3} \frac{\partial w^k}{\partial z} + u^k \frac{\partial w^{k+1/3}}{\partial z} - u^k \frac{\partial w^k}{\partial z} - v^k \frac{\partial w^k}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w^{k+1/3}}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

$$\Pi^k - \frac{\zeta^{k+1/3}}{Fr} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w_n^{k+1/3}}{\partial n}, \quad \frac{\partial w_n^{k+1/3}}{\partial \tau} + \frac{\partial w_\tau^{k+1/3}}{\partial n} = 0 \quad (x \in \Sigma)$$

$$u^{k+1/3} = 0, \quad \frac{\partial v^{k+1/3}}{\partial z} = \beta v^{k+1/3} \quad (z = 0)$$

$$\zeta^{k+1/3} = \zeta^k + \frac{\Delta t}{3} u^k$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial w^{k+2/3}}{\partial t} + v^{k+2/3} \frac{\partial w^{k+1/3}}{\partial r} + v^{k+1/3} \frac{\partial w^{k+2/3}}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w^{k+2/3}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^{k+2/3}}{\partial r} - \Phi^{k+2/3} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u^{k+2/3}}{\partial r} = \beta u^{k+2/3}, \quad v^{k+2/3} = 0 \quad (r = R)$$

$$\frac{\partial u^{k+2/3}}{\partial r} = 0, \quad v^{k+2/3} = 0 \quad (r = 0)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial w^{k+1}}{\partial t} = -\nabla \Pi^{k+1}, \quad \text{div } w^{k+1} = 0$$

$$\Pi^{k+1} - \frac{\zeta^{k+1}}{Fr} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w_n^{k+1}}{\partial n}, \quad \frac{\partial w_n^{k+1}}{\partial \tau} + \frac{\partial w_\tau^{k+1}}{\partial n} = 0$$

$$\zeta^{k+1} = \zeta^k + \Delta t u^{k+1} \quad (x \in \Sigma) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial w_\tau^{k+1}}{\partial n} = \beta w_\tau^{k+1}, \quad w_n^{k+1} = 0 \quad (x \in S)$$

Наряду с уравнениями (2.4) на последнем дробном шаге используются эквивалентные им соотношения

$$\nabla^2 \Pi^{k+1} = \frac{1}{3\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{w}^{k+2\Delta t}, \operatorname{div} \mathbf{w}^{k+1} = 0 \quad (2.5)$$

Аппроксимация на регулярной сетке в каждом из уравнений (2.2)—(2.5) диффузионных членов центральными разностями и конвективных членов разностями против потока обеспечивает суммарную аппроксимацию с первым порядком точности. Разностные аналоги граничных условий удовлетворяются, как это видно из (2.2)—(2.4), через один дробный шаг, что не влияет на порядок аппроксимации и устойчивость схемы [8]. Область параметров сетки, обеспечивающих устойчивость, отыскивается численным экспериментом.

Для удовлетворения естественным краевым условиям на свободной поверхности используется модифицированный метод геометрического репера [8, 10].

3. Результаты расчетов. Численный эксперимент ставился с целью выявить влияние некоторых нелинейных эффектов на затухание колебаний вязкой жидкости со свободной поверхностью. Для количественной оценки затухания использовался логарифмический декремент колебаний

$$\delta = \ln \frac{s_i}{s_{i+1}} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E} \quad (3.1)$$

Здесь s_i — амплитуда i -го цикла колебаний; ΔE — изменение энергии колебаний E за один период $T = 2\pi\omega^{-1}$; ω — частота колебаний.

Характеристика демпфирования (3.1) является интегральной для отрезка времени, равного T . Она информативна для линейных систем со слабым в смысле [2] демпфированием. Более того, для уменьшения погрешности в расчете δ учитываются несколько периодов. При анализе нелинейных систем актуально вычисление, наоборот, локальных значений δ , отнесенных к текущему значению s . Поэтому наряду с ΔE в рассмотрение вводится скорость рассеяния энергии так, что

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \quad \delta = \frac{F}{\omega E}$$

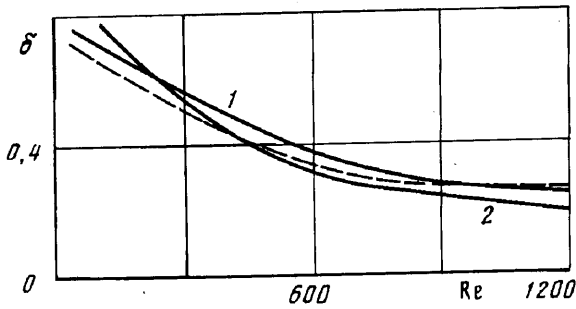
Диссипативная функция F находится по ее плотности f внутри потока и на смоченной поверхности (приближение пограничного слоя)

$$f = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{w})^2 \right], \quad f = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial w_t}{\partial n} \right)^2$$

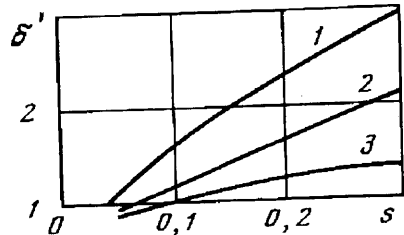
Массовые расчеты проводились на сетке 25×25 (тестовые, кроме того, — на сетках 10×10 и 40×40) при $\Delta t = 10^{-3}$.

Все расчеты выполнены для сосуда в форме прямого кругового цилиндра с относительной глубиной заполнения жидкостью $H/R = 1$ (R — радиус цилиндра) и для чисел Рейнольдса $\operatorname{Re} = 10^2 \dots 10^3$ ($\operatorname{Re} = \omega R^2 \nu^{-1}$, ν — кинематический коэффициент вязкости). Этот диапазон чисел Re интересен тем, что он примыкает к нижней границе, на которой еще работает теория ламинарного пограничного слоя. Эта теория эффективно используется в задачах, подобных рассматриваемой [1—4] при $\operatorname{Re} > 10^3$. Числа $\operatorname{Re} < 10^3$ реализуются для маловязких в обычных условиях жидкостей, но в слабых силовых полях при $g/g_0 < 10^{-6}$ (g_0 — ускорение земного тяготения).

В связи с тем что не известны опытные или расчетные данные по исследованию нелинейных колебаний вязкой жидкости, достоверность полученных результатов обосновывается сравнением с результатами расчетов линеаризованной задачи. На фиг 1 построены кривые $\delta(\operatorname{Re})$ для малых амплитуд ($s/R < 0,1$), рассчитанные по методу квазилинеаризации (штриховая линия), по приближению пограничного слоя с учетом эмпирической поправки $\sqrt{2}$ (кривая 1) и по данным [11] решения



Фиг. 1



Фиг. 2

линеаризованной задачи (кривая 2). Наблюдаемое расхождение в 5—10% соответствует априорной оценке погрешности расчетов.

Влияние амплитуды колебаний $s = \zeta(0, t)$ на $\delta' = \delta/\delta_0$ показано на фиг. 2, где δ_0 — логарифмический декремент колебаний с бесконечно малой амплитудой (линейное приближение). Кривые 1—3 соответствуют $Re = 10^3; 5 \cdot 10^2; 10^2$. Для выяснения причины столь сильной (по сравнению, например, с оценками [6]) зависимости δ от s нужно обратить внимание на обнаруженный в численном эксперименте вихревой характер течения непосредственно под свободной поверхностью.

В момент времени, соответствующий пучности ($s = s_{\max}$), вблизи оси симметрии сосуда под свободной поверхностью имеет место ярко выраженный вихрь, где локализуется завихренность Ω наибольшей величины ($|\Omega| \sim 1$). При уменьшении амплитуды Σ в момент, когда поверхность близка к невозмущенному состоянию, вихрь распадается. Далее, при $s = s_{\min}$ вблизи стенки сосуда под Σ вновь формируется вихрь, но другого направления и меньшей интенсивности ($|\Omega| \sim 10^{-1}$).

Этот вихрь под свободной поверхностью является одним из факторов рассеяния энергии колебаний жидкости. Следует отметить, что пренебрежение в уравнениях Навье — Стокса членами, ответственными за конвективный перенос, так же как и линеаризация краевых условий на Σ , делают невозможным обнаружение расчетным путем этого механизма демпфирования колебаний. В то же время данные на фиг. 2 показывают, что при $Re < 10^3$ и $s \approx 0,1$ нелинейные эффекты (кривизна Σ и конвекция) существенны для количественной оценки δ .

N	t				
	1/4T	1/2T	3/4T	5/4T	9/4T
1	0,0014	0,0013	0,00008	0,00011	0,00003
2	0,00003	0,0021	0,00006	0,00024	0,00005

В таблице приведены оценки скорости диссипации единицы объема жидкости в вихре под свободной поверхностью $(dE/dt)_*^{\Omega}$ ($N = 1$) и скорости диссипации единицы объема у смоченной поверхности $(dE/dt)_*^{\Sigma}$ ($N = 2$) в разные моменты времени колебаний $s(t)$.

Анализ на уровне оценок показывает неоднозначное влияние двух факторов демпфирования: вязкого трения на твердых границах сосуда и расхода энергии колебаний на вихреобразование под свободной поверхностью. Видно, что при $s \approx s_{\max}$, когда кинетическая энергия жидкости минимальна, вязкое трение на стенке $\sigma_s \rightarrow 0$ и рассеяние энергии идет преимущественно в объеме вихря под Σ . При $s \approx 0$ ($t \approx 1/2T$) кинетическая энергия максимальна, поэтому $(dE/dt)_*^{\Sigma} \rightarrow [(dE/dt)_*^{\Sigma}]_{\max}$. По мере затухания колебаний и перераспределения завихренности вклад вихревой составляющей под Σ уменьшается и при $s < 0,1$ становится несущественным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
2. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
3. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
4. Роговой В. М., Черемных С. В. Динамическая устойчивость космических аппаратов с жидкостными ракетными двигателями. М.: Машиностроение, 1975. 152 с.
5. Рабинович Б. И., Лебедев В. Г., Мытарев А. И. Вихревые процессы и динамика твердого тела. М.: Наука, 1992. 296 с.
6. Bogoryad J. V. A mathematical model of oscillations energy dissipation of viscous liquid in a tank//Int. Ser. Numer. Math. 1992. V. 106. P. 91—96.
7. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 183 с.
8. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 195 с.
9. Galpin P., Raithby G. Treatment of non-linearities in the numerical solution of the incompressible Navier — Stokes equations//Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1986. V. 6. № 7. P. 409—426.
10. Васенин И. М., Сидонский О. Б., Шрагер Г. Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью//Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 2. С. 295—298.
11. Богоряд И. Б., Лаврова Н. П., Христенко Г. В. К исследованию колебаний вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд//Динам. упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью: Тр. 3-го семинара, Томск, 1977. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978. С. 5—11.

Томск

Поступила в редакцию
20.IV.1993