

УДК 532.51.013.4; 536.24.01; 537.363

© 1994 г. М. Ю. ЖУКОВ, О. А. ЦЫВЕНКОВА

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ, РАСЧЕТ И АСИМПТОТИКА НЕЙТРАЛЬНЫХ КРИВЫХ МОНОТОННОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ О КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Основная цель работы — исследование влияния физических характеристик примеси, концентрируемой электрическим полем, и ее местоположения на возникновение конвективной неустойчивости. В связи с этим при построении модели конвекции основное внимание сосредоточено на учете концентрационных эффектов, джоулево тепловыделение предполагается пренебрежимо малым, а температура жидкости постоянной.

1. Постановка задачи. Плоский горизонтальный слой заполнен буферным раствором, в котором проводится процесс изоэлектрофокусирования примеси — ее выделение из раствора в заданной области слоя при помощи электрического поля. Проводимость раствора и электрофоретическая подвижность примеси считаются зависящими лишь от вертикальной координаты z . Система уравнений в приближении Обербека — Буссинеска, описывающая процесс изоэлектрофокусирования, в безразмерных переменных имеет вид [1] (в [2, 3] дано обоснование применимости рассматриваемого приближения)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\nabla p + \Delta v - Gak, \quad \operatorname{div} v = 0 \\ P \frac{da}{dt} + \operatorname{div} i &= 0, \quad i = -\nabla a - U\gamma(z) a \nabla \varphi \\ j &= -\sigma(z) \nabla \varphi, \quad \operatorname{div} j = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь v — скорость; p — давление; a — концентрация примеси; i — плотность потока примеси; j — плотность электрического тока; φ — потенциал электрического поля; $\gamma(z)$ — электрофоретическая подвижность; $\sigma(z)$ — проводимость раствора; k — орт вертикальной оси, направленной против действия силы тяжести; P, G — диффузионные аналоги чисел Прандтля и Грасгофа; $U > 0$ — параметр, пропорциональный разности потенциалов на стенках, характеризующий отношение электрических сил, собирающих примесь в узкую зону, к диффузионным силам, приводящим к размытию зоны. Параметры P, G, U, Ra (аналог числа Рэлея) связаны с характерными параметрами смеси соотношениями

$$P = \frac{\nu_*}{D_*}, \quad G = \frac{\beta_* a_* g_* L_*^3}{\nu_*^2}, \quad U = \frac{z_* e_* U_*}{k_B T_*}, \quad Ra = GP$$

где ν_* — коэффициент вязкости раствора; D_*, β_*, a_* — коэффициент диффузии, коэффициент концентрационного сжатия, средняя концентрация примеси; L_* — расстояние между плоскостями; g_* — ускорение силы тяжести; U_* — разность потенциалов на стенках; $z_* e_*$ — характерный заряд примеси; T_* — средняя температура смеси; k_B — постоянная Больцмана.

Краевые условия, отвечающие твердым стенкам, непроницаемым для примеси, разность потенциалов на них и среднее количество примеси в растворе задаются соотношениями (предполагаются отсутствующими расход жидкости, поток вещества и электрический ток вдоль слоя)

$$v \left(\mp \frac{1}{2} \right) = 0, \quad (i \cdot k) \left(\mp \frac{1}{2} \right) = 0, \quad \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) = 0, \quad \varphi \left(\frac{1}{2} \right) = 1, \quad \int_{-1/2}^{1/2} adz = 1 \quad (1.2)$$

Когда плотность примеси меньше плотности растворителя величина $\beta_* < 0$ и соответственно $G < 0$.

Задача (1.1)—(1.2) допускает решение, отвечающее механическому равновесию — финальной стадии процесса изоэлектрофокусирования [1]. В этом случае равновесная концентрация $a_0(z)$ имеет вид

$$a_0(z) = \frac{1}{m} e^{UH(z)}; \quad m = \int_{-1/2}^{1/2} e^{UH(s)} ds; \quad H(z) = \int_{z_0}^z \frac{-\gamma(s) ds}{\sigma(s)} \left[\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dy}{\sigma(y)} \right]^{-1}$$

При $U > 0$ достаточное условие фокусирования зоны в плоскости $z = z_0$ ($-1/2 < z_0 < 1/2$), т. е. сосредоточение примеси в окрестности плоскости $z = z_0$, запишется в форме [1—3]

$$H'(z_0) = 0, \quad H''(z_0) < 0 \quad (1.3)$$

Решение (1.1), (1.2) для бесконечно малых возмущений механического равновесия ищем периодическим вдоль слоя с периодами $k_1/2\pi$, $k_2/2\pi$

$$\{v_3, a, p\} = \{w, a_0(z) + G^{-1}\theta \exp(UH), q\} \exp\{\lambda t + i(k_1x_1 + k_2x_2)\}$$

где $w(z)$, $\theta(z)$, $q(z)$ — амплитуды возмущений.

Для определения критических параметров монотонной ($\lambda = 0$) потери устойчивости получим спектральную задачу [1]

$$(D^2 - k^2)^2 w + k^2 \theta e^{UH(z)} = 0, \quad D = \frac{d}{dz}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad (1.4)$$

$$UH'(z)(Rw - \theta') = \theta'' - k^2 \theta \quad (1.5)$$

$$w \left(\mp \frac{1}{2} \right) = Dw \left(\mp \frac{1}{2} \right) = D\theta \left(\mp \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (1.6)$$

где $R = Ra/m$ — нормированное концентрационное число Рэлея.

2. Построение асимптотики $R = R(k, U)$ при $U \rightarrow \infty$. Наличие δ -образного коэффициента $e^{UH(z)}$ в задаче (1.4)—(1.6) осложняет применение численных методов интегрирования уже при $U > 100$.

Приведем формальный способ построения асимптотики собственных чисел спектральной задачи (1.4)—(1.6) при $U \rightarrow \infty$.

Пусть $T(z, x)$ — функция Грина оператора $(D^2 - k^2)^2$ с соответствующими краевыми условиями. Представим уравнение (1.4) в виде

$$w(z) = -k^2 \int_{-1/2}^{1/2} e^{UH(x)} T(z, x) \theta(x) dx \quad (2.1)$$

Запишем асимптотику интеграла (см., например, [4], с. 45)

$$w(z) = 2k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(h(x) \frac{d}{dx} \right)^{2n} \times \\ \times (T(z, x) \theta(x) h(x)) \Big|_{x=z_0} U^{-n-1/2} \\ h(x) = (-H(x))^{1/2} / H'(x) < 0 \quad (2.2)$$

Ограничиваясь главными членами асимптотики и учитывая, что функция Грина $T(z, x)$ имеем разрывы третьих производных, из (2.2) получим

$$\begin{aligned}
 w(z) &\sim 2k^2 \left(\frac{\pi}{U}\right)^{1/2} h_0 T(z, z_0) \theta(z_0) \\
 w'(z) &\sim \frac{2k^2}{U} \left(\frac{\pi}{U}\right)^{1/2} h_0 ((U + h_1^2 + h_0 h_2) T_z(z, z_0) \theta(z_0) + \\
 &+ 3h_0 h_1 (T_{zx}(z, z_0) \theta(z_0) + T_z(z, z_0) \theta'(z_0)) + h_0^2 ((T_{zxx}(z, z_0 + 0) + \\
 &+ T_{zxx}(z, z_0 - 0)) \theta(z_0)/2 + 2T_{zx}(z, z_0) \theta'(z_0) + T_z(z, z_0) \theta''(z_0)) \\
 h_0 &= -(-2H''(z_0))^{-1/2}, \quad h_1 = h'(z_0), \quad h_2 = h''(z_0)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Из уравнения (1.5) методами работы [5] выводим асимптотические соотношения

$$k^2 \theta(z_0) \sim R w'(z_0); \quad \theta'(z_0) \sim R w(z_0); \quad \theta''(z_0) = k^2 \theta(z_0) \tag{2.4}$$

Заметим, что первое из них можно получить, умножая (1.5) на e^{UH} , интегрируя от $-1/2$ до $1/2$ и используя аналог формулы (2.2), а второе — дифференцируя уравнение (1.5) в точке $z = z_0$ с учетом (1.3).

Соотношения (2.3), (2.4) для $\theta(z_0)$, $\theta'(z_0)$, $w(z_0)$, $w'(z_0)$ представляют собой систему однородных линейных уравнений. Значения R , при которых эта система имеет нетривиальное решение, определяют нейтральную кривую монотонной потери устойчивости при $U \rightarrow \infty$.

Для $z_0 \neq 0$ получим

$$R(k, U) \sim \frac{-1}{T_z(z_0, z_0)} \sqrt{\frac{-UH''(z_0)}{2\pi}} \tag{2.5}$$

Для $z_0 = 0$ производная функции Грина $T_z(z_0, z_0) = 0$ и

$$\begin{aligned}
 R(k, U) &\sim \frac{1}{k} \frac{-UH''(0)}{\sqrt{2\pi T_{zx}(0, 0) T(0, 0)}} = \\
 &= \left[\frac{1}{k} \operatorname{sh}^2 \frac{k}{2} - \frac{k}{4} \right]^{-1} \frac{-2UH''(0) \sqrt{\operatorname{sh}^2 k - k^2}}{\sqrt{2\pi}}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Описанный способ построения асимптотики непосредственно переносится на случай других краевых условий — для плоского слоя с одной или двумя свободными границами, а также на случай пористой среды. Для этого достаточно построить функции Грина $T(z, x)$ операторов $(D^2 - k^2)^2$ или $(D^2 - k^2)$ с соответствующими краевыми условиями. Разумеется, в случае оператора $D^2 - k^2$ формулы (2.3) записываем с учетом разрыва производных T_{zx} .

Обоснование асимптотических формул (2.5), (2.6) дано Л. И. Сазоновым [6] — спектральная задача сводится к системе интегральных уравнений, которая преобразуется к интегральному уравнению с вырожденным ядром, и доказывается возможность такой замены.

3. Результаты расчета нейтральных кривых. Расчет нейтральных кривых монотонной потери устойчивости — минимизированных по k^2 собственных значений R задачи (1.4)–(1.6) — проводился в случае, когда $H(z) = -0,5(z - z_0)^2$ для различных значений параметров z_0, U . Расчеты выполнялись для краевых условий, отвечающих твердым границам слоя $w(\mp 0,5) = Dw(\mp 0,5) = 0$ и краевым условиям, соответствующим свободным границам слоя $w(\mp 0,5) = D^2 w(\mp 0,5) = 0$. Полученные результаты сравнивались с асимптотическими формулами (2.5), (2.6).

Таблица 1

U	$R_* \cdot 10^{-4}$	$R_A \cdot 10^{-4}$	k_*^2	P_*	$R_* \cdot 10^{-4}$	$R_A \cdot 10^{-4}$	k_*^2	P_*
200	0,328	0,190	12,92	0,88	0,199	0,136	5,92	0,71
500	0,649	0,473	14,01	6,42	0,424	0,340	6,33	7,42
800	0,961	0,755	14,47	25,59	0,644	0,543	6,50	26,97
1 000	1,167	0,943	14,66	77,51	0,789	0,679	6,57	60,11
1 100	1,269	1,037	14,74	193,24	0,861	0,746	6,59	93,87
1 150	1,320	1,084	14,77	469,98	0,896	0,781	6,60	120,56
1 170	1,341	1,103	14,78	973,28	0,911	0,794	6,61	134,57
1 200	1,371	1,132	14,81	—	0,933	0,814	6,62	160,04
1 300	1,473	1,225	14,87	—	1,004	0,882	6,64	334,78
1 400	1,571	1,319	14,92	—	1,076	0,949	6,65	1980,38
1 450	1,625	1,367	14,95	—	1,112	0,983	6,66	—
1 500	1,676	1,414	14,97	—	1,147	1,017	6,67	—
2 000	2,178	1,884	15,16	—	1,503	1,356	6,74	—
5 000	5,142	4,708	15,62	—	3,611	3,391	6,89	—
10 000	10,010	9,413	15,86	—	7,083	6,781	6,97	—
20 000	19,641	18,823	16,03	—	13,981	13,561	7,03	—
$U \rightarrow \infty$	—	$9,41 \cdot U$	16,46	—	—	$6,78 \cdot U$	7,16	—

Таблица 2

z_0	$R_* \cdot 10^{-4}$	k_*^2	P_*	$R_* \cdot 10^{-4}$	k_*^2	P_*
0,055	0,183	0,543	—	0,064	0,0	—
0,05	0,197	1,86	0,19	0,071	0,0	—
0,045	0,212	3,16	0,087	0,078	0,0	—
0,042	0,220	3,91	0,014	0,084	0,0	—
0,04	0,226	4,41	—	0,088	0,0	—
0,03	0,253	6,78	13,49	0,117	0,0	—
0,02	0,279	8,98	2,33	0,154	2,23	16,04
0,01	0,304	11,01	1,32	0,179	4,28	1,25
0,00	0,328	12,92	0,88	0,199	5,92	0,70
-0,01	0,351	14,72	0,62	0,218	7,34	0,42
-0,02	0,374	16,44	0,43	0,234	8,64	0,19
-0,03	0,397	18,10	0,28	0,250	9,83	—
-0,04	0,419	19,71	0,14	0,265	10,96	—
-0,05	0,442	21,29	—	0,280	12,04	—
-0,07	0,491	24,39	—	0,310	14,12	—
-0,10	0,572	29,06	—	0,358	17,17	—
-0,20	1,055	48,34	—	0,607	29,28	—
-0,25	1,654	64,49	—	0,886	38,71	—
-0,30	3,162	87,47	—	1,538	53,66	—

В табл. 1 приведены критические значения $R_* = R_*(z_0, U)$, $k_*^2 = k_*^2(z_0, U)$ и асимптотические значения R_A, k_A^2 при $z_0 = 0$ в зависимости от U . Удовлетворительное совпадение численных и асимптотических результатов (расхождения не превышают 5%) начинается со значений $U > 10^4$. Нижняя строка табл. 1 — асимптотика значений R_A, k_A^2 . Колонки 2—5 отвечают твердым, а 5—9 — свободным границам слоя. В реальных условиях процесса изоэлектрофокусирования параметр U обычно лежит в интервале $(10^4, 10^6)$.

U	$R_* \cdot 10^{-4}$	k_*^2	P_*	L_{11}	L_{30}^*	L_{50}
50	0,265	16,25	—	—	—	—
100	0,307	18,53	—	—	—	—
500	0,877	25,88	1,36	$-1,97 \cdot 10^{-3}$	$2,98 \cdot 10^{-1}$	$1,50 \cdot 10^{-2}$
800	1,315	28,71	3,46	$8,97 \cdot 10^{-4}$	$7,58 \cdot 10^{-2}$	$1,61 \cdot 10^{-3}$
1000	1,609	30,19	5,40	$-5,74 \cdot 10^{-4}$	$3,62 \cdot 10^{-2}$	$9,36 \cdot 10^{-5}$
1200	1,903	31,45	7,86	$-3,81 \cdot 10^{-4}$	$1,90 \cdot 10^{-2}$	$-2,92 \cdot 10^{-4}$
1500	2,347	33,08	12,75	$-2,21 \cdot 10^{-4}$	$8,14 \cdot 10^{-3}$	$-2,51 \cdot 10^{-4}$
2000	3,092	35,32	25,64	$-9,67 \cdot 10^{-5}$	$2,45 \cdot 10^{-3}$	$3,76 \cdot 10^{-4}$
2500	3,843	37,15	49,50	$-4,43 \cdot 10^{-5}$	$8,38 \cdot 10^{-4}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$
3000	4,599	38,72	100,89	$-1,95 \cdot 10^{-5}$	$2,93 \cdot 10^{-3}$	$8,18 \cdot 10^{-5}$
3500	5,360	40,10	265,36	$-6,70 \cdot 10^{-6}$	$8,25 \cdot 10^{-5}$	$7,24 \cdot 10^{-2}$
3600	5,513	40,35	351,55	$-4,96 \cdot 10^{-6}$	$5,88 \cdot 10^{-5}$	$1,46 \cdot 10^{-1}$
3800	5,819	40,85	809,09	$-2,07 \cdot 10^{-6}$	$2,30 \cdot 10^{-5}$	$1,35 \cdot 10^0$
3900	5,973	41,09	1892,15	$-8,73 \cdot 10^{-7}$	$9,39 \cdot 10^{-6}$	$1,51 \cdot 10^1$
4000	6,126	41,33	—	—	—	—
$U \rightarrow \infty$	$38,7U^{1/2}$	—	—	—	—	—

В табл. 2 приведена зависимость критических значений $R_* = R_*(z_0, U)$, $k_*^2 = k_*^2(z_0, U)$ при $U = 200$ (колонки 2—4 отвечают твердым, а 5—7 свободным границам). В табл. 3 приведены аналогичные зависимости от параметра U при $z_0 = -0,05$ (для твердых границ). В задаче со свободными границами при $z_0 \geq 0,03$ наблюдается длинноволновая неустойчивость $k_*^2 = 0$ (см. табл. 2).

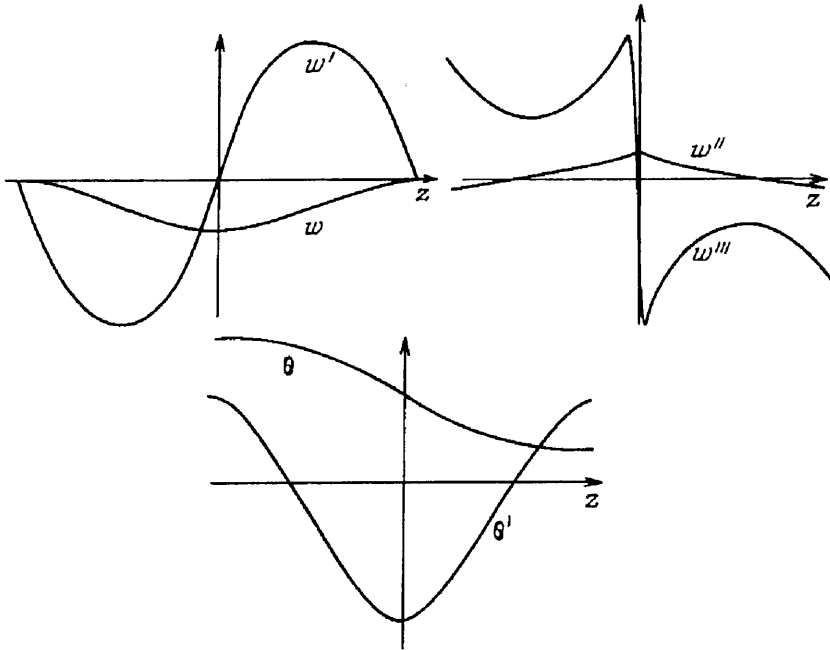
На фиг. 1 изображены собственные функции спектральной задачи (1.4)—(1.6) для значений параметра $U = 10^4$, $z_0 = 0$, $R_* = 1,001 \cdot 10^5$, $k_*^2 = 15,86$. Зависимость w''' от z близка к функции, разрывной в окрестности $z = z_0 = 0$, что связано с наличием δ -образного коэффициента e^{UH} в спектральной задаче. Фактически это разрыв третьей производной функции Грина $T(z, x)$. Очевидно, что именно такое поведение функции w''' затрудняет численные расчеты для больших значений параметра U .

Полученные результаты, в частности, позволяют определить количество примеси $a_* L_*^3$, которое может концентрироваться электрическим полем в окрестности $z = z_0$ без опасности искажения процесса фокусирования конвективным перемешиванием.

При $z_0 \neq 0$ из формулы (2.5) следует $Ra_* = mR_* = O(1)$, а при $z_0 = 0$ из (2.6) — $Ra_* = mR_* = O(\sqrt{U})$. Результаты, приведенные в табл. 1—3, показывают, что для достижения лучшей устойчивости процесса изоэлектрофокусирования относительно конвективного перемешивания предпочтительно производить фокусирование примеси в нижней части электрофоретической камеры.

Авторы пользуются случаем указать на досадную опечатку в тексте работы [1], где рекомендовалось производить фокусирование в верхней части камеры, хотя из рис. 2 работы [1] с очевидностью следует обратное. (На эту опечатку внимание авторов обратил рецензент работы.) Не подтвердилась также гипотеза, высказанная в работе [1], о зависимости Ra_* от U .

4. Расчет вторичных стационарных конвективных течений. Для построения решений, отвечающих от равновесия в окрестности критических значений



Фиг. 1

параметра, используем метод Ляпунова — Шмидта. Исходную задачу (1.1)—(1.2) представим в операторной форме (обозначения см. в [7])

$$Cx = F_{20}x^2 + F_{11}x\lambda + \xi z, \quad C = B + (\cdot, \gamma) z, \quad \xi = (x, \gamma), \quad \lambda = R - R_*, \quad x = (p, v, \theta)$$

$$Bx = \begin{pmatrix} \operatorname{div} v \\ -\nabla p + \Delta v - k\theta e^{UH} \\ \operatorname{div} (e^{UH} (\nabla\theta - R_*v)) \end{pmatrix}, \quad F_{20}x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \cdot \nabla v \\ P \operatorname{div} (e^{UH}\theta v) \end{pmatrix}, \quad F_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{div} (e^{UH}v) \end{pmatrix}$$

Считаем, что v, θ удовлетворяют краевым условиям (1.2), и при записи третьей строки операторов учитываем, что $\operatorname{div} v = 0$. Решение ищем в виде

$$x = \sum_{i=1} \xi^i x_{i0} + \sum_{i=0} \xi^i \sum_{k=1} x_{ik} \lambda^k$$

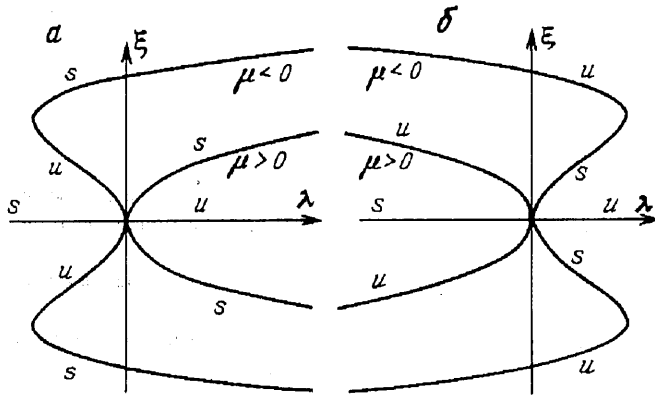
Метод Ляпунова — Шмидта подробно изложен в [7], поэтому ограничимся лишь сообщением фактов, характерных для данной задачи. При вычислении коэффициентов уравнения разветвления L_{ik} при $\xi^i \lambda^k$ установлено, что в некоторой области изменения параметров U, z_0, P коэффициенты при младших степенях ξ, λ обращаются в ноль. Аналитически показано, что зависимость L_{30} от числа Прандтля P квадратична: $L_{30} = L_{30}^{(2)} P^2 + L_{30}^{(1)} P + L_{30}^{(0)}$.

Численными расчетами установлено, что для некоторых U, z_0 существуют значения $P = P_* > 0$, при которых $L_{30}(P_*) = 0$. Доказано, что из равенства $L_{30} = 0$ вытекает равенство $L_{40} = 0$. Значения P_* , если они существуют, приведены в табл. 1—3.

Пусть $\mu = P - P_*$. Тогда при $\mu, \lambda \rightarrow 0$ для определения старших членов зависимости $x = x(\mu, \lambda)$ достаточно ограничиться исследованием уравнения разветвления

$$L_{50} \xi^5 + \mu L_{30}^* \xi^3 + L_{11} \xi \lambda = 0, \quad L_{30}(\mu) = \mu L_{30}^*(\mu), \quad L_{30}^* = L_{30}^*(0) \neq 0$$

Некоторые рассчитанные коэффициенты L_{ik} приведены в табл. 3.



Фиг. 2

Пара дискриминантных кривых

$$\mu L_{30}^*/L_{50} = -\sqrt{4L_{11}\lambda/L_{50}} \quad (L_{11}\lambda/L_{50} \geq 0); \quad \lambda = 0$$

делит плоскость параметров (μ, λ) в окрестности $\mu = 0, \lambda = 0$ на три области. Значениям параметров μ, λ в этих областях отвечают 0, 2, 4 решения, отвечающих от механического равновесия.

Разумеется, когда $L_{30} \neq 0$, т. е. для $|\mu| \gg 0$, имеем обычную ситуацию, когда $L_{30}\xi^3 + L_{11}\xi\lambda = 0$, что соответствует двум ответвляющимся решениям при переходе через $\lambda = 0$.

Получено также нестационарное уравнение разветвления (см., например, [8])

$$\frac{d\xi}{dt} = L_{50}\xi^5 + \mu L_{30}^*\xi^3 + L_{11}\xi\lambda$$

которое позволяет исследовать устойчивость ответвляющихся решений.

Расчет для различных комбинаций параметров z_0, U показал, что в случае краевых условий $w(\mp 0,5) = Dw(\mp 0,5) = 0$ встречаются лишь три варианта нестационарных уравнений разветвления. При $z_0 = 0, 100 \leq U \leq 1170$; при $U = 200, -0,04 \leq z_0 \leq 0,03, z_0 = 0,05$; при $z_0 = -0,05, 500 \leq U \leq 1000, 2000 \leq U \leq 3900$ нормированное уравнение разветвления имеет вид $\xi' = -\xi\lambda + \mu\xi^3 + \xi^5$. В этом случае зависимость амплитуды ξ от параметра λ показана на фиг. 2, а, буквами s, u отмечены устойчивые и неустойчивые ветви решения.

При $U = 200, z_0 = 0,042; 0,045$ и при $U = 1200; 1500, z_0 = -0,05$ нормированное уравнение разветвления имеет вид $\xi' = -\xi\lambda \pm \mu\xi^3 - \xi^5$. В этом случае зависимость амплитуды ξ от параметра λ показана на фиг. 2, б.

Напомним, что диффузионное число Прандтля P характеризует коэффициент диффузии примеси, по существу — ее сорт. Полученные результаты означают, что в зависимости от сорта примеси при потере устойчивости механического равновесия могут возникать как два, так и четыре новых решения, отвечающих вторичным стационарным конвективным режимам. При этом ветвление решений может наступать как при $R > R_*$, так и при $R < R_*$ (см. фиг. 2). Заметим, что для водных растворов, как правило, $P > 100$ и ветвление решения типа, показанного на фиг. 2, б, неосуществимо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуков М. Ю., Цывенкова О. А. Численное исследование влияния зоны вещества на концентрационную конвекцию при изоэлектрофокусировании//Космич. наука и техника. 1989. Вып. 4. С. 30—34.
2. Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Юдович В. И. Математическая теория электрофореза. Киев: Наук. думка, 1983. 202 с.
3. Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Жуков М. Ю. и др. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наук. думка, 1992. 590 с.
4. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 268 с.
5. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. Жуков М. Ю., Сазонов Л. И. Асимптотика собственных чисел для краевой задачи с δ -образными коэффициентами. 1993. 29 с. — Деп. в ВИНТИ № 1231—В93.
7. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
8. Белолипецкий А. А., Стронгина Н. Р., Тер-Крикоров А. М. Некоторые вопросы эволюции диссипативных структур с точки зрения теории бифуркаций//Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989. С. 7—36.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
7.V.1993