

УДК 532.51.013.4:536.25

© 1994 г. С. Г. ЧЕРКАСОВ

ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ И ТЕМПЕРАТУРНАЯ СТРАТИФИКАЦИЯ В КРИОГЕННОМ ТОПЛИВНОМ БАКЕ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ

Предложена модель расчета температурной стратификации криогенного топлива в баке космического аппарата, основанная на представлении уравнений свободноконвективного пограничного слоя в интегральной форме. Результаты расчетов сравниваются с численными решениями уравнений Навье — Стокса и с экспериментальными данными.

Важной для практики областью приложения гидромеханики в условиях микрогравитации являются процессы, протекающие в топливных баках космических аппаратов различного назначения. Примером такого процесса является естественная конвекция в криогенных топливных баках, возникающая под влиянием теплопритоков в бак через теплоизоляцию. По величине суммарного теплопритока к жидкости можно легко вычислить ее среднемассовую температуру. Однако давление в баке, заполненном криогенной жидкостью и ее парами, определяется температурой поверхности раздела фаз, которая в силу различных причин может существенно превышать среднемассовую температуру жидкости. Поэтому скорость увеличения давления в баке при одном и том же суммарном теплоподводе может быть различной в зависимости от неравномерности распределения температуры в жидкой фазе топлива. Одним из факторов, определяющих температурную стратификацию криогенного топлива, является естественная конвекция, причем, как показано ниже, в условиях микрогравитации конвекция может быть весьма интенсивной.

Рассматривается цилиндрический бак и предполагается, что микроускорение, вызванное, например, вращением аппарата вокруг центра масс, направлено вдоль оси бака. Основным источником нагрева криогенного топлива в космическом полете является солнечное излучение. Будем рассматривать наиболее типичный случай, когда бак окружен многослойной экранно-вакуумной теплоизоляцией. Поскольку в такой теплоизоляции за счет многократных отражений лучистая энергия намного легче переносится вдоль экранов, чем поперек, то, несмотря на симметричный характер падающего на космический аппарат излучения, непосредственно к стенке бака тепло будет подводиться практически равномерно по угловой координате. Поэтому, учитывая направления микроускорения, поля течения и температуры в баке будут осесимметричными.

Рассмотрим вопрос о форме поверхности раздела фаз. Равновесная конфигурация свободной поверхности жидкости в условиях микрогравитации определяется числом Бонда $Bo = \rho g R^2 / \sigma$, где ρ — плотность жидкости, g — ускорение массовых сил, R — радиус бака, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. При $Bo \geq 10^2$ свободную поверхность можно в целом считать плоской [1]. Примем, что $R = 1$ м, тогда приведенное выше граничное число Бонда $Bo = 10^2$ будет соответствовать для жидких водорода и кислорода уровню микроускорения приблизительно $10^{-4}g_0$, где g_0 — ускорение свободного падения в земных условиях. Данная величина микроускорения, видимо, достаточно типична для условий

космического полета крупномасштабных объектов. Поэтому в дальнейшем свободную поверхность жидкости будем считать плоской.

Оценим теперь величину числа Рэля $Ra = g\beta qR^4/\nu a\lambda$, определяющего интенсивность естественной конвекции в баке (β , a , λ — соответственно коэффициенты теплового расширения, температуропроводности и теплопроводности жидкости, q — плотность подводимого к жидкости теплового потока, ν — кинематический коэффициент вязкости). Примем, что $g = 10^{-4}g_0$, а тепловой поток, поступающий к жидкости через теплоизоляцию бака, находится на уровне 1 Вт/м^2 . Тогда для кислорода и водорода $Ra = 10^9$. Данное число Рэля приблизительно соответствует верхней границе ламинарного режима конвекции в баке [2]. Учитывая, что реальные значения микроускорения и теплового потока, а также размер бака могут отличаться в ту или иную сторону от значений, принятых выше для оценки, можно сделать вывод, что в баке следует ожидать как развитый ламинарный, так и турбулентный режим конвекции.

Нестационарная ламинарная конвекция в вертикальных (относительно направления массовой силы) баках при постоянных тепловых потоках на границах достаточно подробно исследовалась в работах [2—5] методами математического моделирования на основе численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска. В этих работах выявлены основные качественные особенности полей течения и температуры в различных нестационарных режимах и получены критериальные соотношения, обобщающие характеристики конвекции на квазистационарном режиме, когда скорости и пространственные разности температуры перестают зависеть от времени.

Время установления квазистационарного режима весьма велико и близко к времени кондуктивного прогрева жидкости сверху вниз [3—5]. Для крупных криогенных баков это время составит ~ 1 мес. При обычном уровне тепловых потоков, 1 Вт/м^2 задолго до истечения этого срока давление в баке вырастет до недопустимой величины, требующей либо дренировать бак, либо каким-нибудь другим способом понизить давление.

Квазистационарному режиму непосредственно предшествует режим, названный переходным [3—5]. В этом режиме имеются четко выраженные свободноконвективный пограничный слой на стенке бака и центральное ядро, причем в ядре температура и вертикальная составляющая скорости практически постоянны по горизонтали. При $Ra \geq 10^9$ практически все время до установления квазистационарного режима приходится на переходный режим конвекции. Из изложенного ясно, что для задач, связанных с бездренажным хранением криогенного топлива в космосе, именно переходный режим представляет наибольший интерес.

В отличие от квазистационарного режима, в котором рост температуры во всех точках одинаков и легко вычисляется по величине суммарного теплопритока к жидкости, характеристики конвекции в переходном режиме трудно поддаются обобщению из-за существенной нестационарности процесса. Поэтому для математического моделирования конвекции и температурной стратификации в криогенных баках космических аппаратов необходимы методы расчета, позволяющие с небольшими затратами машинного времени воспроизводить рассматриваемые длительно протекающие нестационарные процессы при каждом конкретном наборе определяющих параметров. С этой точки зрения расчеты, основанные на численном решении двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска, слишком трудоемки. Кроме того, применение этих уравнений для расчета турбулентного свободноконвективного пограничного слоя требует по меньшей мере специального обоснования.

Перечисленным выше требованиям удовлетворяет метод расчета, основанный на решении сопряженной задачи для пограничного слоя и ядра при использовании интегральной формы уравнений свободноконвективного пограничного слоя. Предварительно введем безразмерные переменные, принимая в качестве масштаба длины радиус бака R , в качестве масштаба скорости — комплекс a/R и в качестве

масштаба времени — комплекс R^2/a . Введем также безразмерную температуру $\theta = (T - T_0) \lambda / qR$, где T — температура жидкости, T_0 — начальная температура жидкости. Обозначим через z вертикальную безразмерную координату, направленную вверх и отсчитываемую от днища бака ($0 \leq z \leq H$, где H — безразмерная координата свободной поверхности жидкости). В принятых обозначениях интегральные уравнения свободноконвективного пограничного слоя на стенке бака можно представить в безразмерном виде

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\delta v^2 dx = Ra \int_0^\delta \theta' dx - \tau_w \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta_\infty}{\partial z} \int_0^\delta v dx + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\delta v \theta' dx = 1 \quad (2)$$

Здесь δ — толщина пограничного слоя; v — вертикальная составляющая скорости; x — поперечная к стенке координата; τ_w — напряжение трения на стенке; $Pr = \nu/a$ — число Прандтля; θ_∞ — температура в центральном ядре; $\theta' = \theta - \theta_\infty$ — избыточная относительно температуры ядра в данном горизонтальном сечении температура в пограничном слое. В уравнениях (1), (2) учтено, что в переходном режиме конвекции температура ядра постоянна по горизонтали. Единица в правой части уравнения (2) представляет собой безразмерный тепловой поток на стенке в принятых безразмерных переменных. В уравнениях (1), (2) отсутствуют нестационарные члены. В рассматриваемой задаче это оправдано, поскольку в переходном режиме конвекции характеристики пограничного слоя медленно меняются во времени, отслеживая медленные изменения температурной стратификации в ядре.

Примем, что профили скорости и избыточной температуры в различных сечениях пограничного слоя подобны

$$v = v_1 f \left(\frac{x}{\delta} \right), \quad \theta' = \theta_1 \varphi \left(\frac{x}{\delta} \right) \quad (3)$$

Здесь v_1 и θ_1 — параметры, зависящие от вертикальной координаты и времени, f и φ — функции, определяющие форму профилей скорости и температуры в пограничном слое. Подставляя выражения (3) в уравнения (1), (2), получим

$$\frac{1}{Pr} A_w \frac{\partial}{\partial z} (v_1^2 \delta) = A_0 Ra \theta_1 \delta - \tau_w \quad (4)$$

$$A_w v_1 \delta \frac{\partial \theta_\infty}{\partial z} + A_{w0} \frac{\partial}{\partial z} (v_1 \theta_1 \delta) = 1 \quad (5)$$

$$A_w = \int_0^1 f^2 d\eta, \quad A_0 = \int_0^1 \varphi d\eta, \quad A_v = \int_0^1 f d\eta$$

$$A_{w0} = \int_0^1 f \varphi d\eta, \quad \eta = \frac{x}{\delta}$$

Параметры A_w , A_0 , A_v и A_{w0} являются постоянными коэффициентами, зависящими только от формы профилей скорости и температуры в пограничном слое. При наличии стратифицированного по температуре ядра профили скорости и температуры в ламинарном свободноконвективном пограничном слое имеют вид [6]

$$f = e^{-\pi \eta} \sin \pi \eta, \quad \varphi = e^{-\pi \eta} \cos \pi \eta \quad (6)$$

Формулы (6) хорошо согласуются с результатами численного решения уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска для рассматриваемого

класса задач. Для турбулентного свободноконвективного пограничного слоя примем традиционные формулы [7]

$$f = \eta^{1/7} (1 - \eta)^4, \quad \varphi = 1 - \eta^{1/7} \quad (7)$$

Формулы (6), (7) однозначно определяют значения коэффициентов A_w , A_θ , A_v и A_δ для ламинарного и турбулентного пограничных слоев соответственно. Поскольку температура ядра является для параметров пограничного слоя внешним задаваемым фактором, то уравнения (4), (5) содержат четыре неизвестных функции: v_1 , θ_1 , δ и τ_w . Поэтому уравнения (4), (5) необходимо дополнить соотношениями для напряжения трения и теплового потока на стенке, которые для принятых безразмерных переменных имеют вид

$$\tau_w = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 1 = - \frac{\partial \theta'}{\partial x} \quad (x = 0) \quad (8)$$

Подставляя формулы (3), (6) в соотношения (8), получим следующие дополнительные уравнения для ламинарного пограничного слоя:

$$\tau_w = \pi v_1 / \delta, \quad 1 = \pi \theta_1 / \delta \quad (9)$$

Как легко убедиться, подстановка профилей вида (7) в соотношения (8) приводит к бесконечно большим величинам. Это связано с тем известным обстоятельством, что формулы (7), описывая профили скорости и температуры в интегральном смысле, имеют большую локальную погрешность по производным в непосредственной близости от стенки. Поэтому будем использовать традиционные для турбулентного свободноконвективного пограничного слоя выражения для напряжения трения и теплового потока на стенке [7], которые в принятых безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\tau_w = 0,0228 v_1^2 (\nu_1 \delta)^{-1/4} \text{Pr}^{-3/4}, \quad 1 = 0,0228 \nu_1 \theta_1 (\nu_1 \delta)^{-1/4} \text{Pr}^{-5/2} \quad (10)$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5) необходимо также дополнить начальными условиями

$$v_1 = \delta = 0 \quad (z = 0)$$

Приведенные выше соотношения позволяют вычислить характеристики пограничного слоя в любой момент времени, если известна температурная стратификация ядра в этот момент времени. Как отмечалось выше, в переходном режиме конвекции температура и вертикальная составляющая скорости в ядре постоянны по горизонтали. Поэтому уравнение энергии для ядра можно представить в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial \theta_\infty}{\partial \text{Fo}} + v_\infty \frac{\partial \theta_\infty}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta_\infty}{\partial z^2} \quad (11)$$

Здесь v_∞ — вертикальная составляющая скорости в ядре, $\text{Fo} = \frac{at}{R^2}$ — число Фурье (безразмерное время). Будем считать, что пограничный слой тонок по сравнению с радиусом бака, что соответствует условиям рассматриваемого класса задач. Тогда в силу замкнутости течения скорость в ядре легко выражается через расход жидкости в пограничном слое

$$v_\infty = - 2 \int_0^\delta v dx = - 2 A_v v_1 \delta \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), представим уравнение энергии для ядра в виде

$$\frac{\partial \theta_\infty}{\partial \text{Fo}} - 2 A_v v_1 \delta \frac{\partial \theta_\infty}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta_\infty}{\partial z^2} \quad (13)$$

Уравнение (13) позволяет вычислить температуру в ядре, если известны характеристики пограничного слоя. В целом полученных выше уравнений достаточно для расчета параметров как ядра, так и пограничного слоя. Численное решение этих уравнений также не представляет трудностей.

Однако в рассматриваемой постановке задачи существует принципиальная сложность, связанная с тем, что представления о пространственной структуре полей течения и температуры, положенные в основу математической модели, не выполняются в узкой зоне под свободной поверхностью, где жидкость, вытекающая из пограничного слоя, разворачивается и движется далее к оси симметрии, образуя интенсивное течение в радиальном направлении. Таким образом, указанная зона разделяет свободную поверхность, на которой известно граничное условие для температуры ядра, и лежащую ниже область, в которой справедливы уравнения для расчета температуры ядра. Для устранения этой принципиальной в рамках рассматриваемого подхода сложности обычно вводятся некоторые дополнительные предположения относительно полей течения и температуры в данной зоне и относительно толщины зоны [8, 9]. Ниже предлагается новый подход, не требующий дополнительного усложнения математической модели.

Как показывают результаты численного решения уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска, толщина приповерхностной зоны приблизительно равна толщине пограничного слоя, что при рассматриваемых достаточно больших числах Рэлея существенно меньше полного вертикального размера столба жидкости в баке. Кроме того, вертикальные профили температуры в ядре являются достаточно гладкими, в том числе и в приповерхностной зоне. Поэтому приближенно будем считать, что зона около поверхности бесконечно тонкая, и распространим тем самым область действия рассмотренной выше математической модели на весь объем, занимаемый жидкостью. Далее, вместо задания прямого граничного условия на верхней границе расчетной области будем использовать уравнение интегрального теплового баланса. Будем для определенности поверхность жидкости и днище бака считать теплоизолированными. Тогда, пренебрегая избыточной температурой в тонком пограничном слое, запишем граничные условия для уравнения энергии (13) в виде

$$\frac{\partial \theta_{\infty}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{d}{dFo} \int_0^H \theta_{\infty} dz = 2\pi H \quad (14)$$

Для численной реализации второго граничного условия (14) будем использовать следующий специальный алгоритм. Естественным способом численного решения уравнения энергии (13) является аппроксимация этого уравнения неявной разностной схемой с решением получающихся разностных уравнений методом прогонки [10]. При этом на каждом шаге по времени, используя первое граничное условие (14), можно обычным образом вычислить прогоночные коэффициенты α_i и β_i , по которым затем определить значения температуры ядра в новый момент времени по формуле

$$\theta_{\infty, i} = \alpha_i \theta_{\infty, i+1} + \beta_i \quad (15)$$

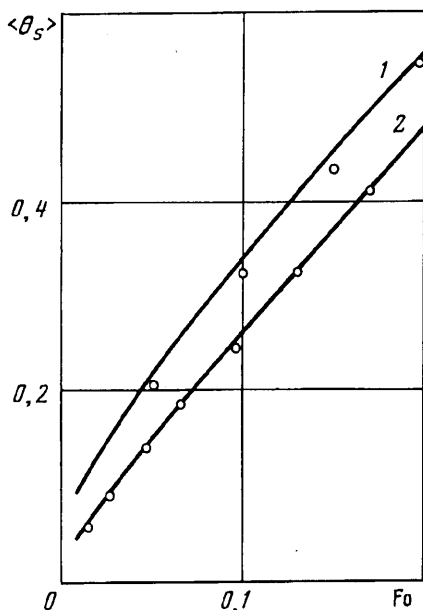
Здесь индекс i соответствует номеру узла сетки по координате z . Формулы (15) можно преобразовать к виду

$$\theta_{\infty, i} = \alpha'_i \theta_{\infty, N} + \beta'_i \quad (16)$$

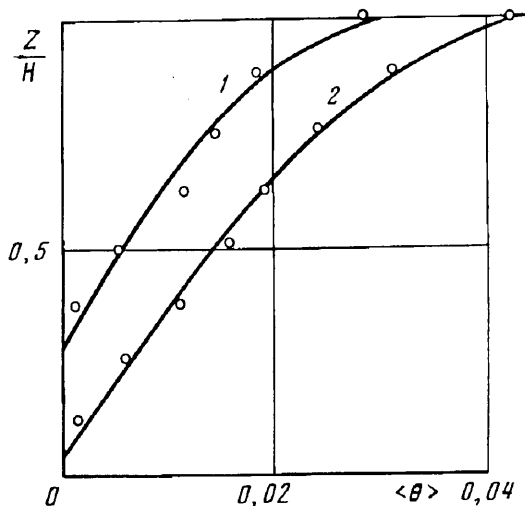
α'_i и β'_i — коэффициенты, однозначно определяемые прогоночными коэффициентами α_i и β_i , $\theta_{\infty, N}$ — температура в крайнем (верхнем) узле сетки, которую определим, используя разностный аналог интегрального условия (14)

$$\sum A_i \theta_{\infty, i} = B \quad (17)$$

Здесь A_i — коэффициенты, зависящие от выбора способа численного интегрирования, B — известное на каждом шаге по времени число.



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставляя теперь (16) и (17), получим следующую формулу:

$$\theta_{\infty, N} \sum A_i \alpha_i' + \sum A_i \beta_i' = B$$

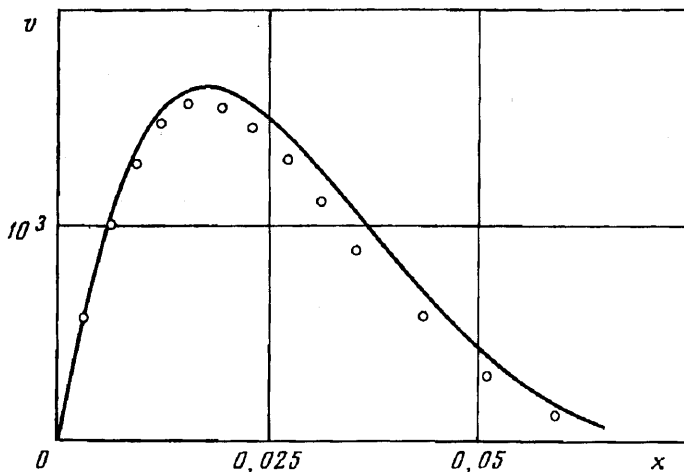
Определив из этой формулы $\theta_{\infty, N}$, можно воспользоваться формулами (15) или (16) для вычисления температуры во всех остальных узлах сетки.

Поскольку остальные детали численной реализации рассматриваемой математической модели не представляют трудностей, перейдем к результатам апробации изложенного выше метода расчета температурной стратификации. Рассмотрим сначала ламинарный режим конвекции. В качестве основы для сравнения будем в этом случае использовать результаты численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска по методике [11] при подводе тепла к жидкости сбоку. Расчеты проведены при постоянных значениях числа Прандтля и степени заполнения бака: $Pr = 1$, $H = 2$.

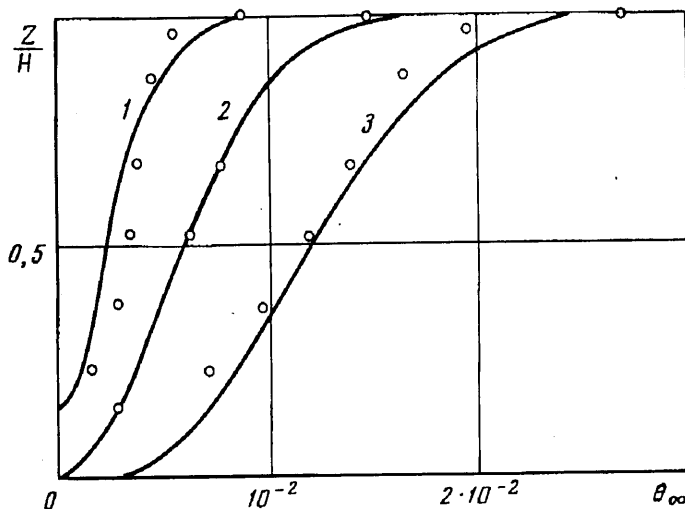
На фиг. 1 показано изменение во времени средней температуры свободной поверхности жидкости при $Ra = 10^6$, 10^9 (кривые 1, 2). Точки соответствуют решению уравнений Навье — Стокса, сплошные линии — изложенному выше методу. Видно, что предложенный выше метод расчета обладает достаточно высокой точностью. Точность метода возрастает с увеличением числа Рэлея. Это объясняется тем, что при построении математической модели неоднократно использовалось предположение о малости толщины пограничного слоя, которая уменьшается с ростом числа Рэлея.

На фиг. 2 показаны вертикальные профили средней по горизонтали температуры при числе Рэлея $Ra = 10^9$ для двух моментов времени в начальной стадии переходного режима: $Fo = 4 \cdot 10^{-3}$, $8 \cdot 10^{-3}$ (кривые 1, 2). Обозначения здесь те же, что и на фиг. 1. Видно, что предложенный метод обладает хорошей точностью и при расчете вертикальных профилей температуры.

Как отмечалось выше, поперечные профили скорости и температуры в пограничном слое вида (6) хорошо описывают реальную форму соответствующих профилей при наличии стратификации жидкости вне пограничного слоя. На фиг. 3 показаны поперечные профили вертикальной составляющей скорости около



Фиг. 3



Фиг. 4

стенки бака в центральном горизонтальном сечении в момент времени $Fo = 8 \cdot 10^{-3}$ при $Ra = 10^9$ (обозначения те же, что и на фиг. 1). Видно, что предложенный метод достаточно точно описывает не только форму профиля, но и величину скорости в пограничном слое.

Рассмотрим теперь турбулентный режим конвекции. На фиг. 4 показаны вертикальные профили температуры в ядре в различные моменты времени: $Fo = 1,56 \cdot 10^{-3}$; $3,12 \cdot 10^{-3}$; $6,24 \cdot 10^{-3}$ (кривые 1—3). Сплошными линиями показаны результаты расчета, точками — экспериментальные данные, полученные В. С. Войтешонком. Эксперимент проводился на модельном баке диаметром 0,25 м, частично заполненном жидким азотом. С помощью электронагревателя к боковой поверхности бака подводился постоянный тепловой поток. При этом $Ra = 1,5 \cdot 10^{12}$. Как видно, и для турбулентного режима конвекции предложенный метод позволяет вычислять температурную стратификацию жидкости с удовлетворительной точностью.

В рассмотренном диапазоне чисел Рэлея изложенный выше метод расчета температурной стратификации обладает вполне удовлетворительной точностью. При этом затраты машинного времени по сравнению с численным решением

двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска сокращаются в несколько сотен раз. Такая большая экономия обусловлена двумя факторами. Во-первых, предложенный метод позволяет перейти от двумерной сетки к одномерной и, во-вторых, шаг по времени может быть существенно увеличен, поскольку из-за ограничений по вычислительной устойчивости максимально допустимый шаг по времени при численном решении уравнений Навье — Стокса пропорционален при больших числах Рэлея квадрату минимального шага сетки, а минимальным является шаг сетки поперек пограничного слоя, который должен быть существенно меньше, чем шаг сетки вдоль пограничного слоя. Поэтому переход от двумерной к одномерной задаче позволяет использовать в расчетах гораздо больший шаг по времени, ограниченный только физической постановкой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гидромеханика невесомости/Под ред. Мышкиса А. Д. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. Полежаев В. И., Черкасов С. Г. Нестационарная тепловая конвекция в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла//Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 148—157.
3. Полежаев В. И., Бунэ А. В., Везуб Н. А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье — Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
4. Черкасов С. Г. Естественная конвекция в вертикальном цилиндрическом сосуде при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 51—56.
5. Черкасов С. Г. Квазистационарный режим естественной конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 146—152.
6. Протопопов М. В., Черкасов С. Г. Особенности свободно-конвективного пограничного слоя в стратифицированной по температуре среде//Изв. РАН МЖГ. 1983. № 1. С. 27—34.
7. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. 680 с.
8. Evans L. B., Reid R. C., Drake E. M. Transient natural convection in a vertical cylinder//AIChE Journal. 1968. V. 14. № 2. P. 251—259.
9. Хлыбов В. Ф. Метод расчета температурного расслоения жидкостей в вертикальных цилиндрических сосудах при турбулентной свободной конвекции//Химическое и нефтяное машиностроение. 1978. № 5. С. 16—17.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
11. Черкасов С. Г. Модифицированный численный метод для расчета тепловой конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде//Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. Т. 15. № 5. С. 144—153.

Москва

Поступила в редакцию
12.I.1994