

УДК 532.516:519.63

© 1994 г. А. В. КОРОЛЬКОВ

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ СКВОЗНОГО СЧЕТА ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ЖИДКОСТЬ — ГАЗ В ПЕРЕМЕННОМ ПОЛЕ ВЕКТОРА УСКОРЕНИЯ

Представлена математическая модель и численный алгоритм решения методом сквозного счета задачи о поведении жидкости в частично заполненном сосуде в переменном поле вектора ускорения. Приведены результаты расчетов.

Пространственные эволюции вектора местного ускорения на борту космического аппарата вызывают произвольные взаимные перемещения жидкости и газа. Для изучения поведения жидкости в столь сложных условиях необходимо использовать специальные расчетные алгоритмы, способные отследить изменения положения поверхности раздела сред. Большинство работ, посвященных исследованиям поведения системы жидкость — газ, основываются на допущениях, ограничивающих возможные перемещения поверхности жидкости. При изучении поведения жидкости со свободной поверхностью границу раздела сред считают неподвижной [1, 2]. При исследовании двухслойных систем интерес, как правило, представляет форма поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей и ее колебания или деформации [3—7], при этом широко используются метод маркеров и ячеек [8] и метод фиктивных областей [9, 10]. Явное выделение границы раздела при выполнении вычислений приводит к сужению области применимости алгоритма (к необходимости адаптировать расчетную сетку в соответствии с изменяющейся формой поверхности либо к использованию преобразования координат для трансформации расчетных областей).

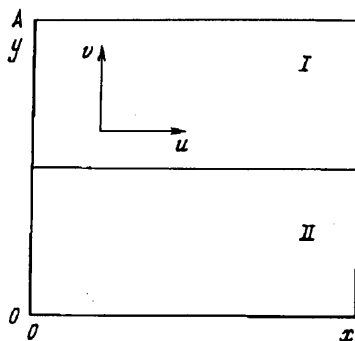
Для решения задач о произвольных перемещениях жидкости и газа наиболее естественно использовать алгоритм сквозного счета. Этот алгоритм успешно применяется для решения задач движения жидкости в объеме с подвижной границей; например, в работе [7] в вычислительном эксперименте исследовался процесс кристаллизации с учетом конвекции в расплаве.

Рассмотрим цилиндрическую емкость с прямоугольным основанием. На фиг. 1 представлена расчетная схема для построения вычислительного алгоритма расчета движения газа (I) и жидкости (II) в емкости в плоскости сечения, перпендикулярной оси цилиндра.

Задача формуруется как сопряженная, на подвижной границе раздела сред ставятся условия сопряжения по скоростям (считаем, что частицы жидкости вблизи границы движутся вместе с границей) и температуре. Стенки неподвижны и непроницаемы, жидкость и газ — несжимаемы, параметры жидкости и газа — постоянны, учитывается лишь зависимость плотности от температуры при описании сил плавучести. Для определения положения жидкости в расчетной области вводится непрерывная функция

$$C(x, y) = V_f/V \quad (1)$$

где  $V_f$  — объем жидкости в прямоугольной ячейке размером  $h_x$  по  $x$  и  $h_y$  по  $y$  с центром в точке  $x, y$ ,  $V$  — объем ячейки. Величины  $h_x$  и  $h_y$  могут быть сколь



Фиг. 1

угодно малыми в соответствии с требуемой точностью описания формы границы раздела сред.

Функция  $C$  есть физическая величина, соответствующая объемной доли жидкости в ячейке. Она подчиняется закону сохранения, который можно записать в виде уравнения переноса

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

поскольку для несжимаемых жидкости и газа  $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$ .

Будем называть область, где  $C = 1$ , областью жидкости, где  $C = 0$ , — областью газа, остальную часть расчетной области, где  $1 > C > 0$ , — областью границы раздела сред, или областью контакта.

Область границы раздела сред должна быть по возможности тонкой и обеспечить сопряжение областей жидкости и газа по скоростям. Это означает, что граница раздела сред должна перемещаться вместе с жидкостью и газом, не увеличивая своей толщины.

Наличие области раздела сред позволяет доопределить физические параметры, испытывающие разрывы или нарушение гладкости на границе раздела сред, в области контакта дифференцируемыми функциями. Обозначим

$$\rho = C + \rho_g / \rho_f (1 - C), \quad v = C + v_g / v_f (1 - C) \quad (3)$$

$$a = C + a_g / a_f (1 - C), \quad \beta = C + \beta_g / \beta_f (1 - C)$$

где индекс  $g$  относится к параметрам газа, индекс  $f$  — к параметрам жидкости.

На границе раздела сред следует учитывать только конвективные члены и члены, характеризующие силы плавучести и силы поверхностного натяжения. Градиент давлений, определенный капиллярными силами и неоднородностью поля плотностей на границе раздела, существенно выше градиентов динамических давлений, вызванных неравномерностью движения частичек жидкости. Отсутствие вязкости в области контакта в используемой схеме соответствует условию проскальзывания на поверхности раздела сред реальной задачи. Ненулевые вязкие силы в области контакта отвечают некоторым комбинированным условиям между проскальзыванием и прилипанием.

С целью единообразия записи системы уравнений во всей расчетной области сохраним в области контакта члены с вязкостью в уравнении переноса импульса с формальным коэффициентом  $\text{Pr } v(C)$ , а в уравнении переноса энергии — диффузионный член с формальным коэффициентом температуропроводности  $a(C)$ . При переходе к безразмерным параметрам в качестве масштабных выбирались параметры жидкости.

Поскольку область раздела сред имеет конечную толщину, поверхностные силы следует рассматривать как распределенные по толщине области раздела сред. Каждая изолиния ( $C = \text{const}$ ), проходящая через узел сетки области раздела

сред, определяет условную поверхность раздела с некоторым своим коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma \Delta C$ , где  $\Delta C$  — разность значений функции  $C(x, y)$  в соседних узлах. Каждая условная поверхность создает свой перепад давления, который выражается в силе, приложенной к единичной площадке, перпендикулярной направлению нормали. Уравнение переноса импульса в безразмерных переменных функциях тока — функция интенсивности вихря с учетом сил поверхностного натяжения в области контакта запишется так

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} Ga_x Pr^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} Ga_y Pr^2 + \quad (4)$$

$$+ \Sigma \left( \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \frac{1}{\rho} + Prv \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \Sigma = \frac{\sigma R}{\rho \nu^2}$$

Здесь  $\zeta$  — кривизна изолинии  $C = \text{const}$  в данной точке.

Уравнение переноса энергии выглядит так

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

Основная сложность численной реализации системы (2), (4), (5) заключается в решении уравнения (2) для функции относительного объема  $C$  жидкости в ячейке. Необходимо удовлетворить требование сохранения (не увеличения) толщины области контакта. С этой целью использовалась специальная схема решения уравнения (2), основанная на методе «жидкость в ячейке». Для каждой ячейки расчетной области в текущий момент записывается баланс массы жидкости на основе текущего состояния поля скоростей. При этом используется допущение о том, что жидкость в ячейке не распределена равномерно, а занимает свое устойчивое положение по отношению к текущему направлению суммарного вектора массовых тел. Суммарный вектор массовых сил складывается из вектора ускорения силы тяжести и вектора, характеризующего массовую силу, заменяющую силу поверхностного натяжения. При расчете перетока смеси из одной ячейки в другую учитывается, что в первую очередь перетекает примыкающее к границе вещество. Формально это положение выражено в формуле определения количества перетекшей жидкости и за время  $dt$  через границу размером  $\Delta x$  между ячейками при скорости перетока  $u$  и относительном объеме жидкости в ячейке-источнике  $C_i$

$$m = w C_i \cos^2 \theta + \frac{1}{8} [ |w - (1 - C_i)| + w - (1 - C_i) ] ( | \sin \theta | + \sin \theta )^2 + \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{4} \left[ C_i - \frac{1}{2} [ |C_i - w| + C_i - w ] \right] ( | \sin \theta | - \sin \theta )^2, w = \frac{u dt}{\Delta x}$$

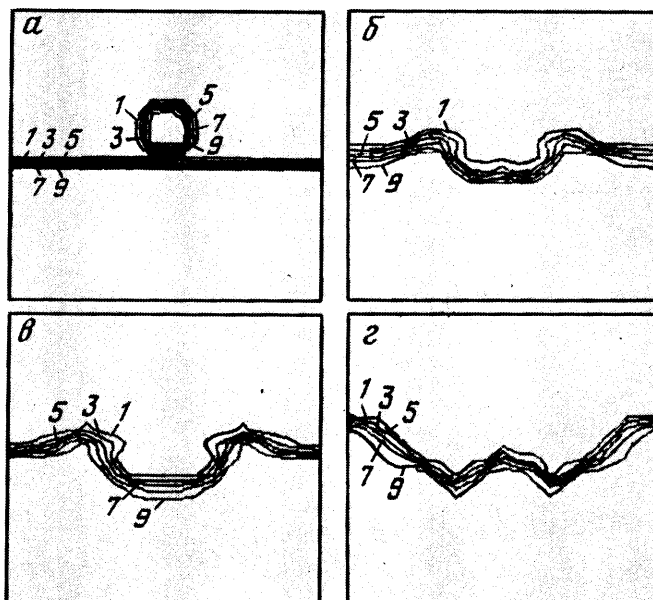
где  $\theta$  — угол между направлением суммарного вектора массовых сил и направлением против оси координат, параллельной границе между ячейками.

При конечно-разностной аппроксимации уравнения переноса импульса (4) для получения значения кривизны  $\zeta$  в узле расчетной области строилась аппроксимационная зависимость

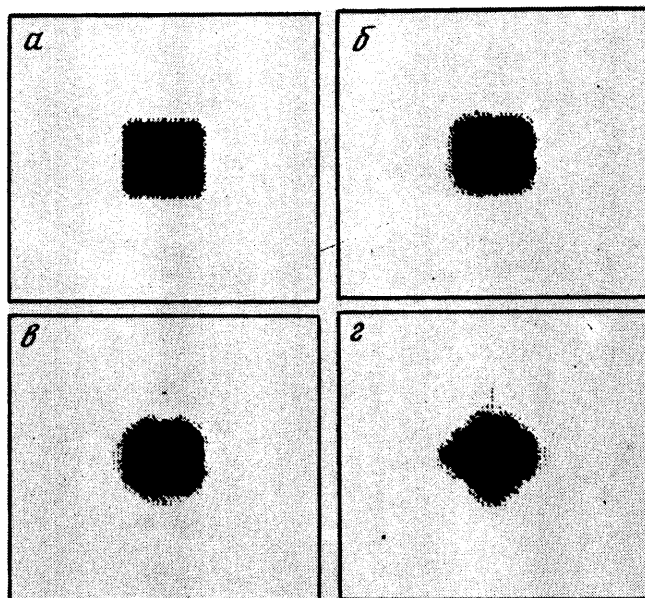
$$C(x, y) = A_2 x^2 + B_2 y^2 + A_1 x + B_1 y + E x y + D$$

на девятиточечном фрагменте расчетной сетки около узла.

На фиг. 2 показаны результаты расчета падения капли на поверхность жидкости в постоянном поле вектора ускорения ( $Ga = 10^6$ ,  $\Sigma = 0$ ). Хорошо видны три фазы развития процесса (фрагмент  $a$  соответствует  $t = 0$ ): рождение волны при контакте капли с поверхностью ( $b$ ), образование воронки ( $c$ ) и ответного всплеска ( $d$ ). Этот расчет иллюстрирует возможность описанного метода давать качественно правильные результаты на сложных течениях с подвижной границей



Фиг. 2

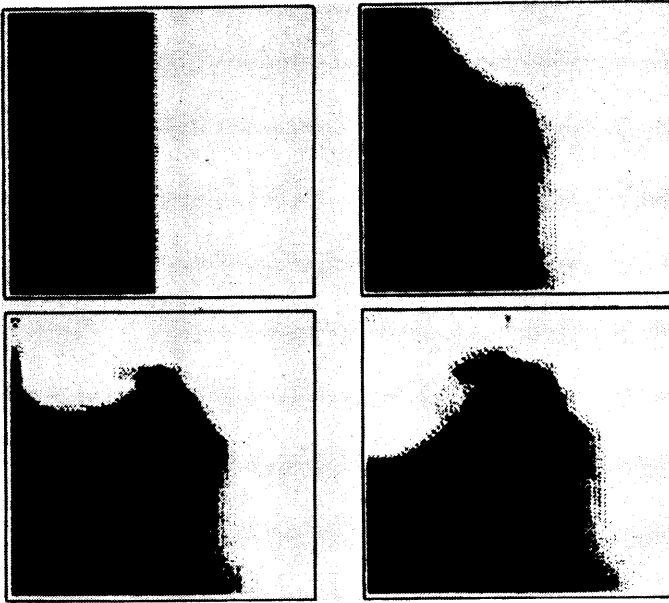


Фиг. 3

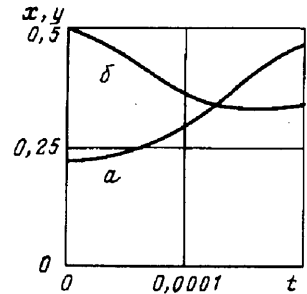
раздела сред. Результаты решения задачи падения капли на неподвижную поверхность, полученного методом маркеров и ячеек, приведены, например, в [11].

На фиг. 3 показано изменение формы квадратной капли под действием капиллярных сил ( $\Sigma = 100$ ) в полной невесомости ( $Ga = 0$ ). При большом числе Прандтля ( $Pr = 100$ ) колебательный процесс подавляется и поверхность капли со временем приобретает устойчивую форму.

На фиг. 4 показан процесс обрушения столба жидкости в постоянном поле вектора ускорения ( $Ga = 10^6$ ,  $Pr = 1$ , отношение плотностей газа и жидкости



Фиг. 4



Фиг. 5

равно 0,001). Трение на стенках отсутствует, силы поверхностного натяжения не учитываются. Изменение координат центра масс жидкости во времени изображено на фиг. 5. По изменению положения центра масс во времени можно судить о значениях нормальных сил, действующих со стороны жидкости на стенки емкости.

Во всех приведенных расчетах ширина области контакта остается практически неизменной. Это свидетельствует о выполнении условия сопряжения областей по скоростям. Таким образом, описанный алгоритм позволяет рассчитать сложные течения с изменением положения поверхности раздела сред системы жидкость — газ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васенин И. М., Нефедов А. П., Шрагер Г. Р. Метод расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью//Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. Т. 16. № 6. С. 28—43.
2. Вальциферов Ю. В., Полежаев В. И. Конвективный теплообмен в замкнутом осесимметричном сосуде с криволинейной образующей при наличии поверхности раздела фаз и фазовых переходов//Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 6. С. 126—134.
3. Хабахнашев Г. А. Влияние вязкости на эволюцию возмущений свободной поверхности и границы раздела двухслойной жидкости//Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1985. С. 127—146.
4. Копачевский Н. Д., Радякин Н. К. Свободные колебания двух капиллярных жидкостей, вращающихся в цилиндрическом сосуде//Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 97—104.
5. Joseph D. D., Preziosi L. Stability of rigid motions and coating films in bicomponent flows of immiscible liquids//J. Fluid. Mech. 1987. V. 185. P. 323—351.
6. Joseph D. D., Renardy Y., Renardy M., Nguyen K. Stability of rigid motion and rollers in bicomponent flows of immiscible liquids//J. Fluid Mech. 1985. V. 153. P. 151—165.
7. Вабищевич П. Н., Илиев О. П. Численные методы сквозного счета для двумерных задач кристаллизации с учетом конвекции расплава//Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1993. № 2. С. 8—18.

8. *Симановский И. Б.* Применение метода маркеров и ячеек к задаче о конвекции в двухжидкостной системе//Конвективные течения. Пермь, 1979. Вып. 1. С. 45—51.
9. *Бугров А. Н., Смагулов Ш.* Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнений Навье — Стокса//Математические модели течений жидкости: Тр. 6-го Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1978. С. 79—90.
10. *Мызникова Б. И., Тарунин Е. Л.* Применение метода фиктивных областей для решения уравнений Навье — Стокса в переменных функции тока и вихря скорости//Исследование тепловой конвекции и теплопередачи. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 45—57.
11. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 2. 552 с.

Москва

Поступила в редакцию  
24.XII.1993