

УДК 532.529.6

© 1994 г. П. К. ВОЛКОВ

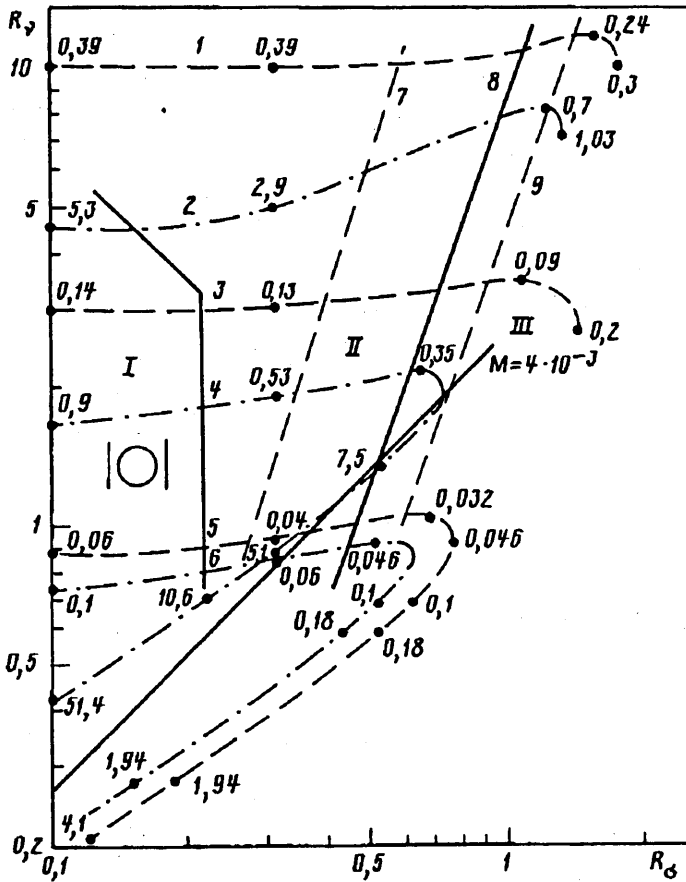
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПАРОВОГО ПУЗЫРЯ В ТРУБКЕ В ВОСХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Стационарное всплытие парового пузыря в жидкости, движущейся в вертикальной трубке, моделируется уравнениями Навье — Стокса. Форма парового пузыря (капли) и структура течения определяются численным решением уравнений внутри и вне капли. Расчеты проведены в области промежуточных значений безразмерных параметров, описывают переход к поршневому типу движения. Проведено сравнение полученных решений с имеющимися опытными и приближенными данными для ползущих течений.

При математическом моделировании движущихся в жидкости паровых или газовых пузырей, как правило, для упрощения задачи предполагают, что состояние среды внутри пузыря можно описать одной константой — термодинамическим давлением газа в пузыре p_g . Это приближение вполне оправданно, поскольку отношение плотностей и вязкостей газа и жидкости много меньше единицы, а значит, среда в пузыре легкая и трение газа о жидкость на границе пузыря мало и не оказывает существенного влияния на всплытие. Многочисленные эксперименты по всплытию одиночных пузырей в «неограниченном» объеме подтверждают справедливость данного предположения.

Однако для паровых пузырей, например, во фреонах отношение плотностей уже порядка 0,1 и движение пара может оказать существенное влияние на всплытие. С точки зрения построения алгоритма расчета наиболее просто учесть движение среды в пузыре можно, приняв ее несжимаемой и вязкой. Для маленьких пузырей, объем которых изменяется не сильно, это приближение капель может быть хорошим. В этом случае необходимо решать уравнения Навье — Стокса как внутри, так и вне пузыря с соответствующими условиями согласования на границе раздела сред [1]. Как показывают расчеты всплывающих в неограниченном объеме капель [2, 3], учет движения среды капли оказывает существенное влияние на процесс всплытия.

Решение задачи, моделирующей всплытие парового пузыря в трубке с движущейся жидкостью, увеличивает число независимых безразмерных параметров до шести. Всеобъемлющего исследования задачи дать невозможно даже численно. Поэтому ограничимся анализом гидродинамических процессов при фиксированных значениях $\rho_1/\rho_2 = 0,1$, $\lambda = 0,8$ и $W = u_n/u$. Здесь ρ_1, ρ_2 — плотности капли и внешней жидкости; λ — отношение эквивалентного радиуса капли a к радиусу трубки R_k ; u_n — скорость движения жидкости на оси трубы (предполагается, что движение вдали от капли подчиняется закону Пуазейля); u — скорость всплытия капли. Величину W , учитывая аналогичные решения для пузыря [4], примем равной 1,25. Это позволяет с учетом полученных решений с $W = 0,5$ и 1 [5] и с $W = 1,25$ [4] для пузыря получить представление о течениях жидкости около капли и внутри нее в восходящем потоке. При данном значении λ капля занимает более половины сечения трубки и особенности течения внешней жидкости (а значит, и внутри капли) определяются характером перетока ее через узкий зазор между стенками трубки и капли. При меньших λ , как показывают решения [6], влияние стенок трубки мало, при больших — усиливается.



Фиг. 1

1. Постановка задачи и алгоритм решения. Пусть вязкая несжимаемая жидкость движется в вертикальной трубке снизу вверх. Внутри нее имеется капля другой вязкой несжимаемой жидкости с меньшей плотностью. Ускорение силы тяжести направлено сверху вниз, так что капля жидкости будет всплывать в восходящем потоке под действием силы Архимеда. Так как имеем каплю несжимаемой жидкости, то объем ее остается постоянным, а значит, и постоянна выталкивающая сила, действующая на каплю. Поскольку сила трения со стороны внешней жидкости противоположна архимедовой, то возможно установление стационарного режима всплытия при равенстве этих сил, когда скорость всплытия и картина течения практически не изменяются.

В системе координат, связанной с каплей, жидкость и стенки трубки движутся сверху вниз. Движение внутри и вне капли описывается уравнениями Навье — Стокса, которые с краевыми условиями на поверхности капли в терминах «функция тока ψ — вихрь ω » для осесимметричного случая выписаны в [7]. Краевые условия на внешней границе области течения будут такими же, как в [4], с учетом обозначения параметров внешней жидкости индексом 2.

Традиционное обезразмеривание по скорости всплытия u и характерному размеру $2a$ дает набор восьми безразмерных комплексов, из которых шесть являются независимыми [7]. В качестве таковых выберем отношение плотностей жидкостей ρ_1/ρ_2 , числа Рейнольдса капли $Re_1 = u2a/\nu_1$ и внешней жидкости $Re_2 = u2a/\nu_2$, число Вебера $We = \rho u^2 2a/\sigma$, λ , W . Числа $Fr = u^2/ga$ и $Pd = (\rho_2 - \rho_1)/\rho u^2$ являются определяемыми и должны быть найдены одновременно с

функциями решения. Здесь g — ускорение свободного падения, σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела сред, ν_1, ν_2 — коэффициенты кинематической вязкости капли и внешней жидкости, p_c, p_∞ — давление в «центре» капли и на внешней границе «на уровне капли».

Поскольку данная задача отличается от [4] необходимостью дополнительного расчета функций течения внутри капли, то для решения можно использовать алгоритм из [4] с учетом имеющихся отличий. Расчеты проведены при варьировании числа Вебера We для различных значений Re_1 и Re_2 .

Результаты, как и в [4], представлены на фиг. 1 в виде диаграммы с координатами $R_v = a/(\nu_2^2/g)^{1/3}$, $R_\sigma = a/(\sigma/\rho_2 g)^{1/2}$, так что данные для каждой среды всплытия располагаются на некоторой прямой линии, поскольку $R_\sigma/R_v = (g\rho_2^3\nu_2^4/\sigma^3)^{1/6} = M^{1/6}$, где M зависит только от физических констант жидкости и g . Это позволяет проводить прямые сравнения с [4]. Учитывая решения по всплытию капель в «неограниченном» объеме [3], можно ожидать, что при $Re_1 = 60$ расчеты будут близки к всплывающему пузырю [4]. Штриховые линии 1, 3, 5 соответствуют расчетам при $Re_1 = 1,4$ с Re_2 , равными 40, 4, 0,4. Штрихпунктирные 2, 4, 6 — при $Re_1 = 60$ с теми же значениями Re_2 . Точки на линиях и числа около них указывают полученные при решении задачи значения Fg , несущего здесь, поскольку R_σ, R_v не зависят от u , полную информацию о скорости всплытия u . При $We = 0$ имеем сферическую каплю, с ростом We поверхность деформируется.

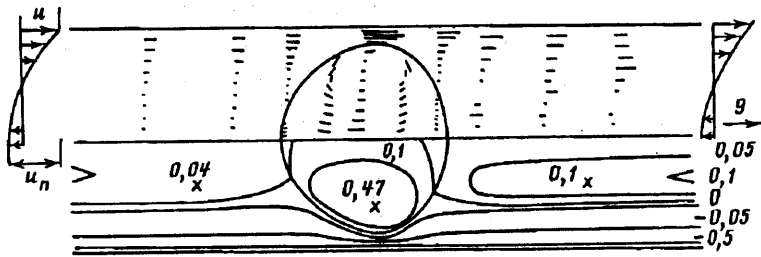
2. Гидродинамика сферических и слабдеформированных капель.

Наличие восходящего градиентного потока значительно уменьшает область сферических и малдеформированных капель (отклонение границы от сферы $< 2\%$) по сравнению с всплытием пузыря в покоящейся жидкости (область I на фиг. 1). Сплошная ломаная линия построена по данным расчетов с $Re_1 = 60$. Штриховая прямая 7 выделяет область малдеформированных капель по расчетам с $Re_1 = 0,4$. Деформация поверхности существенно зависит от жидкости капли.

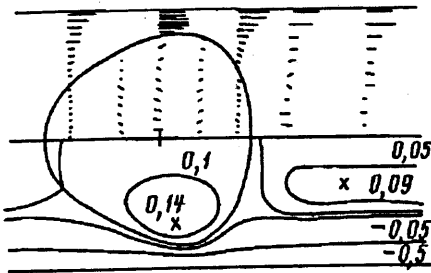
Сравнение пар кривых 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 и значений Fg на них показывает сильное влияние среды капли на скорость ее всплытия. Сопоставление с диаграммой для всплытия пузыря в восходящем потоке говорит о том, что здесь линии с $Re_1 = 60$ при одинаковых значениях чисел Рейнольдса среды всплытия идут ниже. Для больших Re_2 эти отличия малы, а для $Re_2 < 20$ являются существенными. Значения Fg на них больше, чем в случае пузыря (в 2 раза и более при $Re_2 \leq 4$, $R_\sigma < 0,7$). С уменьшением Re_1 линии постоянного значения чисел Рейнольдса располагаются выше, величины Fg на них уменьшаются и при некотором $Re_1 < 60$ линия постоянного значения Re_2 совпадает с соответствующей для пузыря.

Таким образом, движение среды в пузыре приводит к тому, что для некоторых жидкостей капли скорость ее всплытия становится больше, чем у пузыря, когда движением внутри пренебрегается. Поскольку движение внутри капли является следствием внешнего обтекания, то часть энергии внешнего течения тратится на его поддержание и, таким образом, вторичное движение за каплей становится менее интенсивным, чем в случае пузыря, и трение на стенках трубы (вследствие еще имеющегося перетока) меньше (фиг. 2): $Re_1 = 60$, $Re_2 = 40$, $We = 1,4$ ($Fg = 0,82$, $R_\sigma = 0,91$, $R_v = 7,8$, $M = 2,5 \cdot 10^{-6}$, $M_k = g\rho_1^4\nu_1/\sigma^3 = 5 \cdot 10^{-10}$). Здесь и далее на рисунках сплошные линии — изолинии функции тока, черточки — векторы скорости по сечениям трубы. Нисходящие части линий постоянного значения Re_2 для $Re_1 = 60$ на фиг. 1 совпадают с линиями $Re = Re_2$ для пузыря [4]. Значения чисел Фруда на них также одинаковы. Здесь уже практически нет перетока жидкости через зазор.

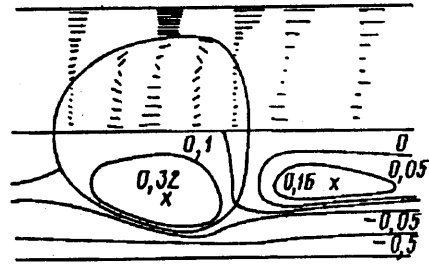
При меньших Re_1 (достаточно вязких жидкостях капли) интенсивности вторичного движения за каплей становится недостаточно, чтобы развернуть течение на границе и образовать буферный вихрь внутри капли и тогда оно располагается на некотором расстоянии от капли. Структура течения и величины экстремумов



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

функции тока для $Re_1 = 0,4$, $Re_2 = 40$, $We = 0,56$ ($Fr = 0,28$, $R_\sigma = 0,99$, $R_v = 11,2$, $M = 4,76 \cdot 10^{-7}$, $M_k = 0,0476$) при близкой к сфере поверхности капли такие же, как на фиг. 3 для деформированной. Внутри капли слабое вихревое движение с «центром», чуть сдвинутым назад относительно начала координат O . Во внешнем течении у поверхности капли происходит замедление скорости жидкости, как около твердой сферы. Скорость всплытия существенно уменьшается. При других Re_2 ($Re_1 = 0,4$) структура течения аналогичная, с разницей лишь в величине локальных экстремумов у функции тока.

При малых Re_2 значение $Re_1 = 0,4$ становится недостаточным для моделирования твердой частицы: внутри капли имеется развитое течение, максимальное значение скорости которого сравнимо со скоростью всплытия (в расчетах величина M_k меньше M).

3. Всплытие деформированных капель. Отличия от сферы более 2—3% достигаются уже для чисел $We \sim 0,01—0,14$ при изменении Re_2 от 0,4 до 40 соответственно: капля сплющивается, вытягиваясь поперек трубы (область II на фиг. 1). Сплошная линия 8 построена по результатам расчетов с $Re_1 = 60$. Штриховая линия 9 определяет область II по данным с $Re_1 = 0,4$, значения We здесь несколько выше, чем при $Re_1 = 60$. В области III деформация капли происходит с вытягиванием вперед носовой части и сплющивания кормовой. Величина зазора между стенками капли и трубы уже начинает увеличиваться с ростом We . Значения Fr при движении вдоль линий 1—6 уменьшаются, достигают наименьшего значения при переходе в область III (отмечены точками), а затем увеличиваются.

Поскольку правые границы области II, отвечающие $Re_1 = 60$ и 0,4, прямолинейны, параллельны и расстояние между ними невелико, можно сделать вывод, что переход к вытягиванию капли вдоль трубы приводит к ослаблению влияния среды капли на процесс ее деформирования. Скорости всплытия в области II для решений с разными Re_1 при фиксированном Re_2 существенно различаются. Сравнение линий постоянного значения чисел Рейнольдса на фиг. 1 с диаграммой для пузыря [4] показывает их совпадение для $Re_2 = 40$ ($Re_1 = 60$) уже при переходе из II в III, а для $Re_2 \leq 4$ — в области III.

Здесь следует уточнить определение области II и III, поскольку линии 4, 5, 6 пересекаются при движении по ним слева направо (что соответствует увеличению числа Вебера We). Область II — это те точки на диаграмме фиг. 1, которые проходим по линиям постоянного значения чисел Рейнольдса (линии 1—6) при увеличении We до некоторого значения, когда капля еще вытягивается поперек канала (примерно до точки локального минимума числа Фруда на линии). При дальнейшем увеличении We — область III — капля начинает вытягиваться вдоль трубы, соответствующая линия загибается книзу и может далее пересечь другую линию постоянного числа Рейнольдса в части II или даже I. Эти точки, как точки данной линии, уже отнесем к области III и назовем ее областью поршневого движения. Здесь появилась некоторая неоднозначность, смысл которой будет обсужден после рассмотрения структур течений около капли.

С увеличением We при заданных Re_1 , Re_2 капля сплющивается, приобретает клинообразную форму, интенсивность вихревого движения внутри нее растет, увеличивается неравномерность течения в узком зазоре. С переходом в область III интенсивность вихря в ней падает, в лобовой части появляется небольшая застойная зона. Структуры течений различаются только вблизи капли согласно с ее деформацией. На фиг. 3 показана картина течения для $Re_1 = 0,4$, $Re_2 = 40$, $We = 1,75$ ($Fr = 0,3$, $R_g = 1,7$, $R_v = 11$, $M = 1,4 \cdot 10^{-5}$, $M_k = 1,4$).

Решения с $Re_1 = 60$ имеют большую интенсивность вихря в капле, достигающую максимума в окрестности точки локального минимума Fr на линии фиг. 1. В кормовой части капли внутри имеется застойная зона, являющаяся буферной между вихрем внутри и вторичным течением снаружи (оба одного направления вращения). Форма капли для $Re_2 = 40$, $We = 3,3$ ($Fr = 0,95$, $R_g = 1,32$, $R_v = 7,5$, $M = 5 \cdot 10^{-5}$, $M_k = 6 \cdot 10^{-9}$) такая же как на фиг. 3, а структура течения подобна изображенной на фиг. 2. Величина локального максимума функции тока в капле равна 0,41. Дальнейшее увеличение We привело к колебаниям границы в кормовой части и стационарного решения не было получено для $We > 3,6$ (при $Re_1 = 0,4$ критическим в этом плане было $We = 1,75$).

Серия расчетов по We для $Re_2 = 4$ представлены линиями 3 и 4 на фиг. 1. Закономерности в деформировании при $Re_1 = 0,4$ такие же, как в случае с $Re_2 = 40$. Характерная картина течения для начала области III близка фиг. 2: внутри капли более интенсивное движение, чем при $Re_2 = 40$, $Re_1 = 0,4$, в области узкого зазора на поверхности скорость жидкости уже не является малой. Значение $Re_1 = 0,4$, недостаточно малое, чтобы моделировать твердую поверхность: структура течения ближе к решениям с $Re_1 = 60$, чем с $Re_1 = 0,4$ при $Re_2 = 40$. При $We > 0,8$ поверхность капли в кормовой части колеблется на итерациях расчета.

Течения с $Re_1 = 60$ в окрестности локального минимума Fr близки как по структуре, так и по величине локальных максимумов функции тока решениям при $Re_1 = 0,4$. На фиг. 4 показано течение для $We = 0,73$ ($Fr = 1,15$, $R_g = 0,55$, $R_v = 1,5$, $M = 0,0025$, $M_k = 5 \cdot 10^{-11}$), соответствующее убывающей части кривой 4 на фиг. 1. В узком зазоре практически прямолинеен профиль скорости (в системе координат стенки нет перетока). С дальнейшим ростом We ($We = 1,04$, $Fr = 71,7$, $R_g = 0,085$, $R_v = 0,38$, $M = 0,00012$, $M_k = 2,4 \cdot 10^{-12}$) поверхность капли и структура течения изменяются немного: вытягивается вперед носовая часть, уплощается кормовая, а величина Fr возрастает почти на два порядка. Далее увеличение We приводит к еще более сильному росту Fr при практически неизменной форме, а затем движение становится нестационарным: на участках, где имеется возвратное течение, трение о каплю дает составляющую, направленную вверх, которая может быть большой.

Для $Re_2 = 0,4$ картины течений с $Re_1 = 0,4$, $We = 0,049$ ($Fr = 0,044$, $R_g = 0,74$, $R_v = 0,96$, $M = 0,2$, $M_k = 0,0002$) и $Re_1 = 60$, $We = 0,053$ ($Fr = 0,085$, $R_g = 0,55$, $R_v = 0,77$, $M = 0,13$, $M_k = 2,6 \cdot 10^{-3}$), отвечающие данным в окрестности вершины кривых 5 и 6 на фиг. 1, близки фиг. 4. А течения, соответствующие

нижней части линий 5 и 6: $We = 0,124$ ($Fr = 3,35$, $R_g = 0,14$, $R_v = 0,23$, $M = -0,044$, $M_k = 0,000044$) и $We = 0,13$ ($Fr = 5,7$, $R_g = 0,088$, $R_v = 0,2$, $M = 0,0094$, $M_k = 1,8 \cdot 10^{-14}$), практически совпадают с рисунками для этой же области кривой 4. При значениях $We > 0,14$ сила трения капли и сила тяжести действуют в одном направлении — всплытие будет нестационарным. При этом форма капли — как при $Re_2 = 4$ (фиг. 4), с той разницей, что кормовая часть более плоская. Величина зазора осталась прежней, но профиль скорости изменился: максимум находится на стенке трубки, минимум — на поверхности капли, как на фиг. 1 в [4] для пузыря.

4. Поршневой режим движения. Решения в области III за точкой локального минимума Fr на кривых 1—6 (фиг. 1) можно определить как поршневой режим движения жидкости с каплей. Основанием для этого служит то, что в узком зазоре между стенками капли и трубы практически равномерный профиль скорости. В системе координат трубы это означает отсутствие перетока из области перед каплей в пространство за ней. При этом у капель, всплывающих в жидкостях с $M > 0,001$ (см. расчеты для $Re_2 \leq 4$), структура течений и форма капли практически одинаковы и слабо зависят от Re_1 , Re_2 , т. е. от сред всплытия и капли. При фиксированном Re_2 значение Fr не зависит от R_g для заданного R_v ; на нисходящих участках кривых 5 и 6 значения Fr одинаковы на прямых, параллельных оси R_g . Величины M_k при этом различаются более чем на 8 порядков.

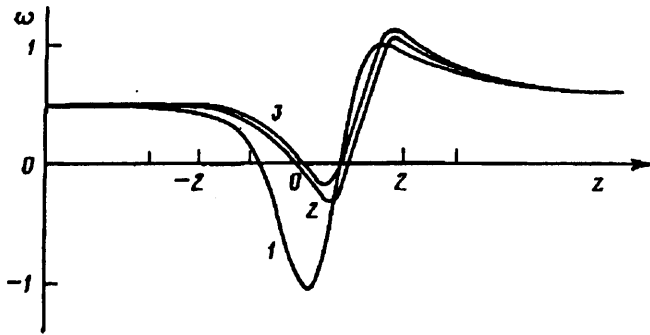
В точках пересечения кривой 4 с линиями 5 и 6 на фиг. 1 имеем одинаковые среды всплытия, размеры капель. Причем пересечению 4 и 5 ($R_g = 0,33$, $R_v = 0,98$) соответствует жидкость с $M = 1,48 \cdot 10^{-3}$, а параметры капли будут: $M_k = 2,9 \cdot 10^{-11}$ ($Re_1 = 60$, $Re_2 = 4$, $We = 0,93$, $Fr = 4,5$) и $M_k = 1,47 \cdot 10^{-6}$ ($Re_1 = 0,4$, $Re_2 = 0,4$, $We = 0,0092$, $Fr = 0,041$). При этом скорость всплытия $u = (g\alpha Fr)^{1/2}$ для среды на линии 4 равна $(4,2ga)^{1/2}$, а на линии 5 $\sim (0,041ga)^{1/2}$, т. е. скорости различаются в ~ 10 раз. Соответственно так же изменяются и величины расходов прокачиваемой жидкости, поскольку $u_n = 1,25 u$.

В пересечении линий 4 и 6 имеем $M = 1,1 \cdot 10^{-3}$, $R_g = 0,28$, $R_v \approx 0,85$ и параметры среды капли соответственно $M_k \approx 2,5 \cdot 10^{-15}$ ($Re_1 = 60$, $Re_2 = 0,4$, $We = 0,01$, $Fr \approx 0,062$) и $M_k \approx 2 \cdot 10^{-11}$ ($Re_1 = 60$, $Re = 4$, $We = 0,95$, $Fr \approx 6,4$). Таким образом, и здесь скорости всплытия и величины прокачиваемых расходов различаются в ~ 10 раз. Это служит доказательством правильности расчета Fr , поскольку в точках пересечений Re_2 различаются в 10 раз, а значит, для капель одного размера, всплывающих в данной среде, следует, что отношение скоростей всплытия равно отношению чисел Re_2 .

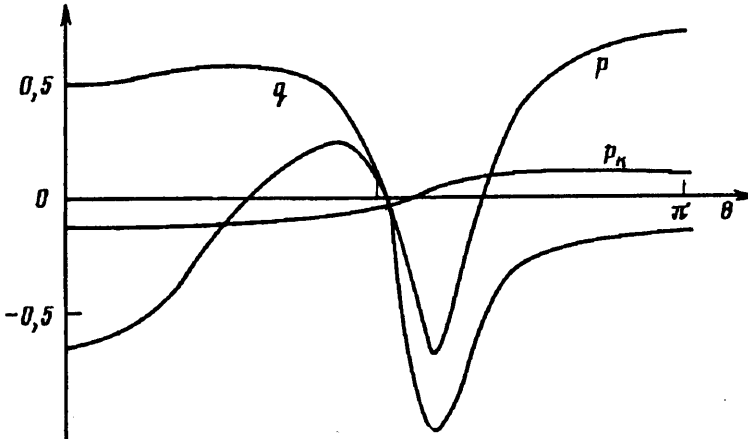
Кривые, построенные при варьировании We для некоторого Re ($0,4 < Re_1 < 60$) и $Re_2 = 0,4$ будут иметь точку пересечения с линией 4, в которой значения M_k будут одинаковыми (близкими $2,5 \cdot 10^{-11}$). В этой точке будут различными только скорости всплытия и форма капли, а значит, можно сделать вывод о структуре течения предельного стационарного режима прокачивания — поршневого для капиллярных трубок, радиус которых меньше капиллярной постоянной жидкости $\delta_g = (\sigma/\rho_2 g)^{1/2}$.

В жидкостях с малыми M (верхняя половина области III) переход к поршневому режиму сопровождается нестационарными волнообразными колебаниями на поверхности капли.

5. Трение на стенках трубы и давление на поверхности капли. Функция вихря ω (а значит, и трения τ , так как $\tau = -2\omega/Re_2$) на стенке трубы весьма чувствительна к изменениям поверхности капли, вдали от нее выходит на положительную константу, отвечающую завихренности течения Пуазейля. В створе капли, в конфузорной части, где происходит ускорение жидкости, она отрицательная, имеет минимум. В диффузорной части зазора — растет, образует



Фиг. 5

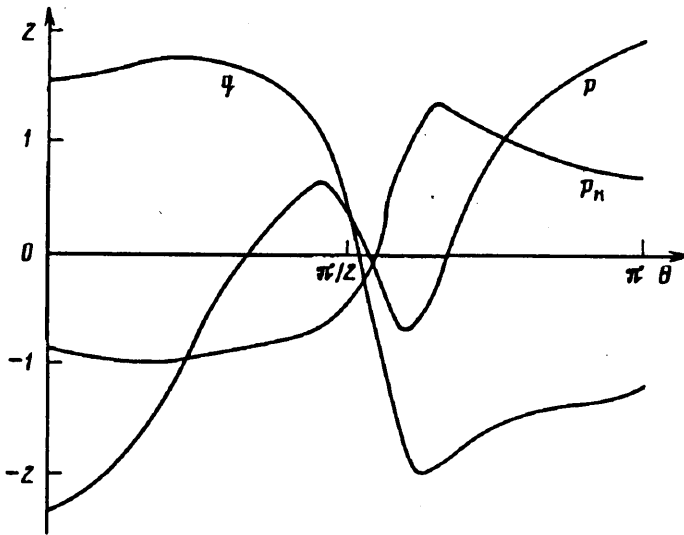


Фиг. 6

локальный максимум (положительный) на уровне нижнего среза капли. Величина минимума примерно в 2 раза больше по абсолютной величине, так что площадь под кривой ω меньше, чем для течения Пуазейля, когда капли нет. На фиг. 5 представлены распределения ω на стенке трубки. В области I на фиг. 1 графики ω мало различаются с изменением Re_1 при фиксированном Re_2 , We . Характерный вид графика подобен кривой 1 на фиг. 6 с величиной минимума порядка -2 . С переходом в область II величины отрицательных пиков начинают уменьшаться — кривая 1 на фиг. 6 ($Re_1 = 0,4$, $Re_2 = 4$, $We = 0,21$) ($R_o = 1,08$, $R_v = 3,54$, $M = 0,0008$, $M_k = 0,008$). В области поршневого режима течения еще более убывает величина отрицательного пика и несколько растет положительный максимум — кривая 2 на фиг. 5 соответствует данным $We = 0,8$, $R_o = 1,44$, $R_v = 2,74$, $M = 0,002$, $M_k = 0,2$. Изменение Re_1 мало влияет на ω : графики ω близки кривой 3 (отвечает данным фиг. 4). При дальнейшем увеличении We область отрицательных значений ω совсем исчезает. Изменяется направление выпуклости у профиля скорости в зазоре, равнодействующая силы вязкого трения капли имеет то же направление, что и сила тяжести: движение становится нестационарным.

Таким образом, переход к поршневому режиму приводит к распределению ω , имеющему локальные минимум и максимум в створе капли такие, что площадь под кривой ω примерно соответствует площади под прямой $\omega = \text{const}$, отвечающей чисто пуазейлевскому течению жидкости в трубе.

Другой важной гидродинамической характеристикой всплываия является функция давления. Определение перепада давлений на капле позволяет оценить



Фиг. 7

величину сил, действующих на каплю, и выявить вклады от вязкости и деформаций на процесс всплытия. В работе используются функции давления в жидкости вне капли p , внутри p_k и обобщенное давление q ($q = p - R(\theta) \cos \theta / Fr$), отнесенные к величине $\rho_2 u^2$. Расчеты с $Re_1 = 60$ при больших Re_2 близки случаю пузыря. Величина p_k мала, практически постоянна, кроме окрестности $\theta = \pi/2$, где она меняет знак с минуса на плюс: трение внутренней жидкости на поверхности капли мало. Деформирование капли с уменьшением зазора между поверхностью капли и трубой приводит к появлению здесь острых пиков у p и q . Существенно изменились по величине и по структуре p и q в лобовой области и кормовой части (фиг. 7) ($Re_1 = 60$, $Re_2 = 40$, $We = 3,3$, $M = 5 \cdot 10^{-5}$, $M_k = 6 \cdot 10^{-9}$, $R_0 = 1,32$, $R_v = 7,5$, картина течения близка фиг. 2). Уменьшение Re_1 приводит к сильному торможению жидкости около капли и росту значений p . Величина p_k уже не является малой. Деформация поверхности увеличивает амплитуды у графиков давлений.

Характер графиков давлений для $Re_2 = 4$ тот же самый, что и при $Re_2 = 40$, но с увеличением масштаба значений примерно в 4 раза. При $Re_2 = 0,4$ функции p и q для $Re_1 = 0,4$, $Re_1 = 60$ (сфера) повторяют друг друга с некоторым сдвигом. Значения давлений возросли примерно в 4 раза по сравнению с $Re_2 = 4$. В области поршневого режима они практически совпадают как при $Re_1 = 0,4$, так и при $Re_1 = 60$.

Течение в узком сужающемся-расходящемся зазоре формирует у функции давления p характерную волнообразную структуру в створе этого зазора, которая перемещается в зависимости от формы капли. Амплитуда ее растет с уменьшением Re_2 . Причем графики давлений по характеру похожи и близки «случаю пузыря», если $M_k < M$.

6. Обсуждение результатов. Численные решения были выполнены для параметра $W = 1,25$, полученного из предположения о поршневом режиме движения пузыря [4], когда нет перетока жидкости через узкий зазор между стенками трубы и капли. Представленные картины течений демонстрируют именно такие структуры либо близкие к ним. Таким образом, учет движения среды капли не влияет на оценку параметра, отвечающего за поршневой режим.

Прослежены закономерности деформирования капель при изменении гидродинамических параметров. Как и в случае пузыря, деформация капли проходит

в несколько этапов: сплющивание с уменьшением зазора между стенками трубы и каплей; вытягивание вперед носовой части при продолжающемся сплющивании кормовой; вытягивание капли вдоль оси трубы с увеличением узкого зазора. В конечном итоге получаются формы капель и течения, которые можно совместить наложением рисунков для разных значений безразмерных параметров. Однако сами размеры областей характерных типов течений существенно зависят от среды капли, если имеется переток жидкости через зазор. Скорость всплытия капель сильно зависит от среды капли.

Переход к поршневому режиму при $Re_2 > 4$ сопровождается колебаниями ее поверхности и стационарных решений получить не удается. Это происходит в средах с $M < 10^{-2}$. Подобное поведение наблюдалось и при движении пузыря в спутном потоке и, видимо, связано с тем, что в этих жидкостях (как правило, маловязких) при некоторых значениях гидродинамических параметров на границе достаточно крупных пузырей и капель (с эквивалентным радиусом более капиллярной постоянной) возникают автоколебания (либо область неустойчивости), обусловленные упругими свойствами границы раздела сред. Движение среды в капле служит дополнительным спусковым механизмом, поскольку вторичное течение за каплей имеет то же направление вращения, что и внутри, а значит, на части границы имеем встречные движения жидкостей, которое является неустойчивым [1]. Только с появлением внутри капли «буферного» вихря исчезает явный источник возмущений на поверхности. Учитывая решения [4] по всплытию пузырей в восходящем потоке, можно сделать вывод, что движение среды в капле не является определяющим для возникновения колебаний поверхности.

При $Re_2 < 4$ (в средах с большими M , как правило, достаточно вязких) переход к поршневому режиму сопровождается резким уменьшением вязкого сопротивления капли. Это объясняется тем, что появление вторичных течений у оси трубы создает на поверхности носовой и кормовой частей капли возвратные течения, так что суммарное трение жидкости о каплю может стать близким к нулю или даже отрицательным, как это и получалось в расчетах. Именно эти вторичные течения могут быть источником колебаний поверхности пузыря, капли.

Интересен вопрос о количестве поршневых режимов. Имеется в виду следующее: возьмем трубку некоторого радиуса с жидкостью и каплей другой жидкости в ней и будем смотреть всплытие капли при увеличении прокачиваемого расхода. При малых расходах капля всплывает, имеется переток жидкости через зазор. Начиная с некоторой величины u_n перетока уже не будет — наступает поршневой режим, который описан выше. Что будет, если еще увеличить u_n ? Как показывают расчеты по всплытию пузыря и капли, при некоторых значениях гидродинамических параметров возникает течение, при котором сила сопротивления капли (пузыря) направлена по спутному потоку прокачиваемой жидкости. Всплытие в средах становится нестационарным. Поскольку это происходит в трубе с вязкой жидкостью под действием только одной выталкивающей силы всплытие пузыря капли в конечном итоге должно затормозиться и либо выйти на некоторый новый стационарный режим, либо в течении будут происходить автоколебания. При этом форма капли может меняться, а скорость ее всплытия, очевидно, будет больше предыдущей (а значит, будет большим число Рейнольдса Re_2). Параметр W может и не измениться. Пересечение кривых для разных Re_2 (линий 4, 5, 6 на фиг. 1) в случае всплытия капли и аналогичных линий для всплывающего пузыря говорит о том, что возможно установление стационарных режимов в средах с большим M при разных расходах прокачиваемой жидкости. В средах с малыми M в кормовой части на поверхности пузыря, капли наблюдаются колебания.

В заключение проведем сопоставление результатов расчетов с данными [8], полученными для ползущих течений. В качестве безразмерных параметров там используются $Ca = We/Re_2$ и $\lambda = \rho_1 Re_2 / \rho_2 Re_1$ ($\mu_1 = \lambda \mu_2$, $\mu_1 = \rho_1 \nu_1$, $\mu_2 = \rho_2 \nu_2$), а результаты приведены для $0,05 \leq Ca \leq 1$, $0,1 \leq \lambda \leq 50$ и разных значений $2u/u_n =$

| N | Re ₁ | Re ₂ | We | | | Ca | | | λ |
|---|-----------------|-----------------|-----------|------------------------|----------|-----------|------------------------|----------|---------|
| | | | Начальное | Соответствующее min Fr | Конечное | Начальное | Соответствующее min Fr | Конечное | |
| 1 | 0,4 | 40 | 0,01 | 0,9 | 1,74 | 0,00025 | 0,022 | 0,43 | 10 |
| 2 | 60 | 40 | 0,01 | 1,8 | 3,6 | 0,00025 | 0,045 | 0,1 | 0,067 |
| 3 | 0,4 | 4 | 0,004 | 0,22 | 0,8 | 0,001 | 0,055 | 0,2 | 1 |
| 4 | 60 | 4 | 0,004 | 0,26 | 1,04 | 0,001 | — | 0,26 | 0,0067 |
| 5 | 0,4 | 0,4 | 0,0004 | 0,025 | 0,125 | 0,0001 | 0,06 | 0,31 | 0,1 |
| 6 | 60 | 0,4 | 0,0004 | 0,025 | 0,088 | 0,0001 | — | 0,22 | 0,00067 |

$= 2/W$, a/R_k . Данные расчеты по параметру We при фиксированных Re₁, Re₂ соответствуют значениям Ca и λ, представленным в таблице. Здесь значения $2/W = 1,6$, $a/R_k = 0,8$ — заданы. В область пересечения результатов попадают расчеты для линий 3 и 5, соответствующие малым значениям Re₁ и Re₂. Близкими по величине λ и попадающими в разряд ползущих течений (по Ca) являются расчеты для линий 2, 4, 6 на фиг. 1, начиная со значения We, соответствующего минимуму Fr, до We конечного, отвечающего принятому в данной работе поршневому типу течения. Чтобы получить решения для больших λ, надо либо увеличивать ρ_1/ρ_2 , либо уменьшать Re₁. Увеличение ρ_1/ρ_2 означает всплытие более тяжелой капли (что было в экспериментах [9]), значит, скорость всплытия u (а также We) будет меньше при прочих равных условиях. Уменьшение Re₁ также приводит к снижению u (расчетам при меньших We).

С учетом этого замечания, а также того факта, что при поршневом режиме для фиксированного Re₂ значения Fr при заданном R₀ не зависят от R₀ при изменении Re₁ — имеется специфическая «автомодельность» скорости всплытия капли u относительно ее среды (смотри кривые 5, 6 на фиг. 1), сравнение по величине $2u/u_k$ на рис. 7 и 13 из [8] с величиной 1,6 для линий 3, 5 (λ = 1, 0,1) можно признать удовлетворительным. Эксперименты [9] и расчеты [8] проведены для Re₂ < 0,2.

Способ расчета по We позволяет сопоставить формы капель для рис. 9 из [8], отвечающего изменению по Ca при фиксированных других параметрах. Для рис. 9, в характерно образование удлиненной капли с прямолинейным участком боковой поверхности. Рисунок 9, а в [8] соответствует расчетам при малых Re₁, Re₂, когда форма боковой поверхности капли выпуклая (как на фиг. 4). Эти сравнения, конечно же качественные, поскольку опытные и расчетные значения λ не полностью совпадают. Вычисленные значения λ — отношение динамических вязкостей капли и среды всплытия — показывают, что данные для линии 1 на фиг. 1 действительно соответствуют случаю деформированной частицы: вязкость капли в 10 раз больше, чем у внешней жидкости. Данные линии 3 отвечают средам с равными динамическими вязкостями. На остальных линиях это отношение меньше единицы, а значит, решения должны быть близки «случаю пузыря», что и было отмечено. Полученные здесь структуры течений вполне согласуются с экспериментами [9].

Таким образом, настоящие расчеты описывают процесс движения жидкости с каплей в области промежуточных значений гидродинамических параметров (вплоть до перехода к поршневому режиму), дополняют и расширяют имеющиеся данные по ползущим типам течений в капиллярных трубках. По данным фиг. 1 с помощью интерполяции нетрудно получить оценки на скорость всплытия некоторых паровых пузырей, определив значение M для жидкости и M_k для среды пузыря.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. *Ривкинд В. Я.* Стационарное движение вязкой капли с учетом ее деформации // Зап. науч. семинара Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. 1979. Т. 84. С. 220—242.
3. *Волков П. К.* Стационарное всплытие капель в вязкой жидкости // ПМТФ. 1992. № 1. С. 78—88.
4. *Волков П. К.* Моделирование движения пузыря в «затопленном» канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 138—144.
5. *Волков П. К.* Всплывание пузыря в восходящем потоке жидкости в вертикальной трубе // ПМТФ. 1991. № 4. С. 35—42.
6. *Волков П. К.* Всплывание газового пузыря в трубе, заполненной вязкой жидкостью // ПМТФ. 1989. № 6. С. 98—105.
7. *Волков П. К.* Всплытие капель жидкости в вертикальных трубах с другой жидкостью // Моделирование в механике. Новосибирск, 1990. Т. 4 (21). № 5. С. 48—74.
8. *Martinez M. J., Udell K. S.* Axisymmetric creeping motion of drops through circular tubes // J. Fluid Mech. 1990. V. 210. P. 565—591.
9. *Ho В. P., Leal L. C.* The creeping motion of liquid drops through a circular tube of comparable diameter // J. Fluid Mech. 1985. V. 71. № 2. P. 361—384.

Новосибирск

Поступила в редакцию
14.IX.1992