

УДК 532.517.4

© 1994 г. Н. И. АКАТНОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛИНОМОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАСШТАБА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Представлена $k - kl$ -модель турбулентности, основанная на уравнении вторых двухточечных моментов (точки A и B) поля пульсационных скоростей. Вторые и третьи двухточечные моменты, входящие в уравнение, выражены с помощью полиномов, члены которых являются произведениями компонент тензоров, характеризующих данное турбулентное движение, на скалярные функции от расстояния AB . Получившееся уравнение при $AB = 0$ дает уравнение баланса энергии турбулентности k , а будучи проинтегрировано по AB от 0 до ∞ , дает уравнение переноса величины kl (l — интегральный масштаб турбулентности). Построенная модель применена для расчетов слоя смещения, плоской и круглой струй, следа за цилиндром, течений в трубе и в канале, а также пограничного слоя на пластине. Получено хорошее согласие результатов всех расчетов с опытными данными при едином наборе значений эмпирических коэффициентов.

Для расчетов турбулентных течений широко используют двухпараметрические модели, которые кроме основных уравнений осредненного движения содержат еще уравнение баланса энергии турбулентности k , где $k = \langle u_i' u_i' \rangle / 2$ — среднекинетическая энергия пульсационного движения единицы массы жидкости, u_i' — проекция пульсационной скорости на ось x_i , и уравнение, позволяющее найти масштаб турбулентности l . Имея величины k и l , находят коэффициент турбулентной вязкости $\nu_t = l \sqrt{k}$, который используют в обобщенном законе Буссинеска для вычисления напряжений турбулентного трения и описания диффузии различных характеристик турбулентности.

Дифференциальные уравнения, служащие для определения l , составляют относительно величин, имеющих в общем случае вид $z = k^p l^q$, где p и q — известные числа. Решив уравнения для k и z , можно найти l . Известны разные варианты уравнений переноса z : диссипации $z = \epsilon_t = c_d k^{3/2} / l$ [1—4]; величины $z = kl$ [5—11]; коэффициента турбулентной вязкости $z = \nu_t = l \sqrt{k}$ [12, 13]; частоты пульсаций $z = c \sqrt{k} / l$ или ее квадрата [14—19].

Наиболее распространенной является $k - \epsilon$ -модель, содержащая уравнение переноса ϵ_t — скорости диссипации энергии пульсаций в тепло за счет молекулярной вязкости. Эта модель наиболее универсальна в том смысле, что значения эмпирических коэффициентов, входящих в эту модель, имеют одинаковые значения для пристеночных и плоских свободных турбулентных течений (струи, следы, слой смещения). При расчете осесимметричной затопленной струи стандартный набор значений эмпирических коэффициентов требует модификации. Известны различные варианты модификаций, например [1, 3, 4]. Разработана, в частности, многомасштабная модель [20, 21], к достоинствам которой авторы относят возможность на ее основе рассчитывать круглую струю со стандартным набором значений эмпирических коэффициентов.

Уравнение переноса величины $\epsilon_t = \nu \langle \partial u_i' / \partial x_j \partial u_i' / \partial x_j \rangle$, где ν — кинематический коэффициент молекулярной вязкости, строго выводится из уравнений Навье —

Стокса. При больших значениях числа Re , которые характерны для задач инженерной практики, члены уравнения велики в интервале диссипации и малы в интервале энергии энергетического спектра. Однако неизвестные члены уравнения выражают через величины, характерные для интервала энергии. Данное обстоятельство обуславливает значительный произвол при моделировании членов уравнения для ϵ , и затрудняет модификации этого уравнения.

С этой точки зрения более последовательны методы получения уравнения переноса величины $m = kl$, поскольку и исходное уравнение и величины k и l , с помощью которых моделируются неизвестные члены уравнения, соответствуют интервалу энергии энергетического спектра или, иначе, энергонесущим вихрям турбулентности. Имеющиеся $k - kl$ -модели менее универсальны, чем $k - \epsilon$ -модели, однако потенциальные достоинства $k - kl$ -моделей значительны, поэтому их совершенствование представляется полезным. В данной работе изложен новый метод вывода уравнения переноса величины m , которое отличается рядом дополнительных членов от уже известных уравнений, а также приведены результаты некоторых расчетов с его помощью. Первоначальный вариант метода был представлен в докладе на VI съезде по механике [22].

1. Представление вторых и третьих двухточечных моментов в виде тензорных полиномов. Уравнение переноса следа тензора вторых двухточечных моментов

$$\langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle = \langle u'_{1A} u'_{1B} \rangle + \langle u'_{2A} u'_{2B} \rangle + \langle u'_{3A} u'_{3B} \rangle$$

имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle}{\partial t} + u_{nA} \frac{\partial}{\partial x_{nA}} \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle + u_{nB} \frac{\partial}{\partial x_{nB}} \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle + \frac{\partial u_{iA}}{\partial x_{nA}} \langle u'_{nA} u'_{iB} \rangle + \\ & + \frac{\partial u_{iB}}{\partial x_{nB}} \langle u'_{nB} u'_{iA} \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{nA}} \langle u'_{nA} u'_{iA} u'_{iB} \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{nB}} \langle u'_{nB} u'_{iA} u'_{iB} \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{iA}} \langle \frac{p'_A}{\rho} u'_{iB} \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{iB}} \times \\ & \times \langle \frac{p'_B}{\rho} u'_{iA} \rangle = \nu \left[\frac{\partial^2}{(\partial x_n \partial x_n)_A} + \frac{\partial^2}{(\partial x_n \partial x_n)_B} \right] \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x_{nA} , x_{nB} — декартовы координаты точек A и B , в которых берутся проекции осредненных u_{nA} , u_{nB} и пульсационных u'_{iA} , u'_{iB} скоростей, а также пульсации давления p'_A , p'_B ; ρ — постоянная плотность среды; угловые скобки означают осреднение. Вводим новые переменные

$$z_n = (x_{nA} + x_{nB})/2, \quad \xi_n = x_{nB} - x_{nA} \quad (1.2)$$

Делаем предположение, что второй двухточечный момент может быть аппроксимирован следующим тензорным полиномом:

$$\begin{aligned} - \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle = & - q^2 (A_1 \alpha_i \alpha_j + A_2 \delta_{ij}) + A_3 q l \left(\frac{\partial u_j}{\partial z_i} + \frac{\partial u_i}{\partial z_j} \right) + \\ & + \left(A_4 l \frac{\partial q}{\partial z_m} + A_5 q \frac{\partial l}{\partial z_m} \right) \xi_m (\xi_i \Delta u_j + \xi_j \Delta u_i) - \frac{1}{2} \left[\xi_i \frac{\partial (A_6 q^2)}{\partial z_j} - \xi_j \frac{\partial (A_6 q^2)}{\partial z_i} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \xi_i \left[\frac{\partial (A_7 q l)}{\partial z_m} \left(\frac{\partial u_j}{\partial z_m} + \frac{\partial u_m}{\partial z_j} \right) \right] - \xi_j \left[\frac{\partial (A_7 q l)}{\partial z_m} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_m} + \frac{\partial u_m}{\partial z_i} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2} A_8 q l \left[\frac{\partial}{\partial z_m} \left(\frac{\partial u_l}{\partial z_i} - \frac{\partial u_i}{\partial z_j} \right) \right] \xi_m \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь

$$q^2 = \frac{\langle u_i' u_i' \rangle}{3} = \frac{2k}{3}, \quad r = (\xi_i \xi_i)^{1/2}, \quad \alpha_i = \frac{\xi_i}{r}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$$

$$v_i' = lq, \quad v_i = l\sqrt{k} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_i', \quad A_n = A_n(z, r), \quad l = l(z)$$

Предполагаем, что коэффициенты самоподобны во всех точках потока, т. е. $A_n = A_n(r/l) = A_n(\xi)$.

Качественный характер зависимости A_n от ξ предполагаем таким, что при $\xi = 0$ A_n имеют конечные значения, возможно, нулевые, а при больших ξ монотонно убывают с увеличением ξ , стремясь к нулю. Тем самым принимаем, что турбулентное движение носит хаотический характер и моменты $\langle u_i' u_j' \rangle \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Первые два члена в (1.3) справа, заключенные в круглую скобку, аппроксимируют второй двухточечный момент в однородной изотропной турбулентности [23, 24]. Член с коэффициентом A_3 обеспечивает переход (1.3) в обобщенный закон Буссинеска при совпадении точек A и B , который используется при расчетах сложных турбулентных течений

$$-\langle u_i' u_j' \rangle_{A=B} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + v_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_j} + \frac{\partial u_j}{\partial z_i} \right) \quad (1.4)$$

Полином (1.3) совпадает с (1.4) при $A_1(0) = 0$, $A_2(0) = 1$ и $A_3(0) = \sqrt{3/2}$. Члены с коэффициентами $A_1 - A_3$ образуют симметричную, а члены с коэффициентами $A_6 - A_8$ — антисимметричную части тензора $\langle u_i' u_j' \rangle$. Члены с коэффициентами $A_6 - A_8$ позволяют удовлетворить соотношениям, которые выводятся из уравнения неразрывности. Члены с коэффициентами A_4 и A_5 вносят некоторое желательное изменение в окончательное уравнение переноса m .

Полином (1.3) удовлетворяет трем соотношениям, полученным из уравнения неразрывности и имеющим вид

$$\frac{\partial}{\partial x_{iA}} \langle u_i' u_{jB}' \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{iB}} \langle u_i' u_{jA}' \rangle = 0 \quad (1.5)$$

В соотношении (1.5) переходим к переменным (1.2), подставляем в получившееся соотношение (1.3) и осредняем результат по сферической поверхности единичного радиуса $S = 4\pi$. Для осреднения по поверхности S переходим к сферической системе координат ($r = 1$) с помощью формул

$$\alpha_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \alpha_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \alpha_3 = \cos \theta \quad (1.6)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Для осреднения по S используем интеграл

$$\langle \alpha_i^n \alpha_j^k \alpha_r^p \dots \rangle = (4\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\alpha_i^n \alpha_j^k \alpha_r^p \dots) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.7)$$

При подстановке (1.3) в (1.1) и (1.5) и осреднении по S образуются следующие осредненные произведения косинусов:

$$\langle \alpha_i \rangle = 0, \quad \langle \alpha_i \alpha_j \rangle = \delta_{ij}/3, \quad \langle \alpha_i \alpha_j \alpha_k \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha_i \alpha_j \alpha_r \alpha_k \rangle = \delta_{ij} \delta_{rk} (1 + 2\delta_{ir})/15 \quad (1.8)$$

В уравнениях, которые получаются после осреднения по S , отбрасываем члены с производными третьего и выше порядков от проекций осредненной скорости по z_n и t , считая их равными нулю. Считаем равными нулю третьи и выше производные от q по z_n и t , а также вторые и выше производные от l по

z_n и t . Первые производные от q и l по z_n и t считаем малыми величинами и их квадратами и произведениями пренебрегаем.

Полином (1.3) после подстановки в (1.5), осреднения получившегося соотношения по S и указанных выше упрощений удовлетворяет окончательному виду (1.5) при выполнении условий

$$2 \left(\frac{\zeta}{3} \frac{dA_6}{d\zeta} + A_6 \right) = - \left(\frac{1}{3} A_1 + A_2 \right) \quad (1.9)$$

$$2 \left(\frac{\zeta}{3} \frac{dA_7}{d\zeta} + A_7 \right) = A_3, \quad \left(\frac{\zeta}{3} \frac{dA_8}{d\zeta} + A_8 \right) = A_3$$

Третьи двухточечные моменты можно аппроксимировать полиномом

$$\begin{aligned} \langle u_{k\lambda}' u_{l\lambda}' u_{jB}' \rangle &= q_1^3 [B_1 \alpha_k \alpha_l \alpha_j + B_2 (\alpha_l \delta_{jk} + \alpha_k \delta_{lj}) + B_3 \alpha_j \delta_{kl}] - \\ &- B_4 q l \left(\frac{\partial q^2}{\partial z_l} \delta_{jk} + \frac{\partial q^2}{\partial z_k} \delta_{lj} + \frac{\partial q^2}{\partial z_j} \delta_{kl} \right) - B_5 q \left[\frac{\partial (q^2 l)}{\partial z_l} \delta_{jk} + \right. \\ &+ \frac{\partial (q^2 l)}{\partial z_k} \delta_{lj} + \left. \frac{\partial (q^2 l)}{\partial z_j} \delta_{kl} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial z_l} \left(B_6 q l \frac{\partial q^2}{\partial z_m} \xi_m \right) \delta_{jk} + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial z_k} \left(B_6 q l \frac{\partial q^2}{\partial z_m} \xi_m \right) \delta_{lj} + \frac{\partial}{\partial z_j} \left(B_6 q l \frac{\partial q^2}{\partial z_m} \xi_m \right) \delta_{kl} \left. \right] + \left\{ \frac{\partial}{\partial z_l} \left[B_7 q \frac{\partial (q^2 l)}{\partial z_m} \xi_m \right] \delta_{jk} + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial z_k} \left[B_7 q \frac{\partial (q^2 l)}{\partial z_m} \xi_m \right] \delta_{lj} + \left. \frac{\partial}{\partial z_j} \left[B_7 q \frac{\partial (q^2 l)}{\partial z_m} \xi_m \right] \delta_{kl} \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь также принято, что $B_n = B_n(\zeta)$. Первые три слагаемых в квадратной скобке соответствуют третьим моментам в однородной изотропной турбулентности. Величина $q_1^3 = q^3 F(z)$, где $F(z)$ — некоторая безразмерная вспомогательная функция. Слагаемые с коэффициентами B_4 и B_5 выражают третьи моменты общепринятыми градиентными формулами в случае, когда точки A и B совпадают. Слагаемые с коэффициентами B_6 и B_7 добавлены, чтобы полином (1.10) удовлетворял шести соотношениям, вытекающим из уравнения неразрывности и имеющим вид

$$\frac{\partial}{\partial x_{l\lambda}} \langle u_{l\lambda}' u_{jB}' u_{kB}' \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{jB}} \langle u_{jB}' u_{l\lambda}' u_{k\lambda}' \rangle = 0 \quad (1.11)$$

В соотношениях (1.11) переходим к переменным (1.2), подставляем (1.10), осредняем по S . Получающимся после осреднения соотношениям можно удовлетворить, положив

$$2 \left(\frac{\zeta}{3} \frac{\partial B_6}{\partial \zeta} + B_6 \right) = B_4, \quad 2 \left(\frac{\zeta}{3} \frac{\partial B_7}{\partial \zeta} + B_7 \right) = B_5 \quad (1.12)$$

Соотношения (1.9), (1.12) можно рассматривать как дифференциальные уравнения относительно коэффициентов A_6, A_7, A_8, B_6, B_7 . Пусть функции правых сторон уравнений при больших ζ убывают $\sim \zeta^{-n}$. Если $n > 3$, то решения уравнений (1.9), (1.12) при больших ζ убывают $\sim \zeta^{-3}$. Если $n < 3$, то решения убывают $\sim \zeta^{-n}$. Далее примем, что A_6, A_7, A_8, B_6, B_7 при больших ζ убывают $\sim \zeta^{-3}$, а остальные коэффициенты быстрее, чем ζ^{-3} .

Имея полином (1.3), можно найти приближенные формулы для моментов $\langle u_{l\lambda}' u_{jB}' \rangle$ и $\langle u_{jB}' u_{l\lambda}' \rangle$. Для этого $p'(z)$ определяем как решение уравнения Пуассона в виде полусуммы двух интегралов по неограниченной области, причем в одном из них подынтегральная функция относится к точке A , а в другом к точке B .

Решение умножаем на $u_j'(z)$ и осредняем. Под знаком интеграла вторые моменты, образованные пульсациями в точке z и в точках A и B , приближенно заменяем моментами, вычисленными в точках, расстояние между которыми $AB/2$. Третьими моментами пренебрегаем. В результате после несущественных упрощений получим

$$P_j = \langle p'u_j' \rangle = \rho \left[\left(\frac{a_1^*}{3} + a_2^* \right) \frac{\partial u_m}{\partial z_j} \frac{\partial (q^2 l^2)}{\partial z_m} \right] - \rho a_3^* \frac{\partial}{\partial z_m} \left[q l^2 \frac{\partial u_m}{\partial z_k} \left(\frac{\partial u_j}{\partial z_k} + \frac{\partial u_k}{\partial z_j} \right) \right] \quad (1.13)$$

$$a_n^* = \int_0^\infty A_n^*(\zeta^*) \zeta^* d\zeta^*, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{2}$$

Двухточечные моменты $\langle p'_A u'_{jB} \rangle$ и $\langle p'_B u'_{jA} \rangle$ должны удовлетворять соотношению, вытекающему из уравнения неразрывности и имеющему вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_j} [\langle p'_A u'_{jB} \rangle + \langle p'_B u'_{jA} \rangle] + \frac{\partial}{\partial \xi_j} [\langle p'_A u'_{jB} \rangle - \langle p'_B u'_{jA} \rangle] = 0 \quad (1.14)$$

Соотношению (1.14) удовлетворяют выражения

$$\langle p'_A u'_{jB} \rangle = B_8(\zeta) P_j + \frac{\partial}{\partial z_m} [B_9(\zeta) P_j] \xi_m \quad (1.15)$$

$$\langle p'_B u'_{jA} \rangle = B_8(\zeta) P_j - \frac{\partial}{\partial z_m} [B_9(\zeta) P_j] \xi_m$$

Подставляя (1.15) в (1.14) и осредняя результат по S , находим, что получающемуся в итоге соотношению можно удовлетворить при условии

$$2 \left(\frac{\zeta}{3} \frac{dB_9}{d\zeta} + B_9 \right) = -B_8 \quad (1.16)$$

2. Уравнение полиномиальных коэффициентов. Преобразуем вязкие члены уравнения (1.1) с помощью переменных (1.2) к виду

$$\begin{aligned} & \nu \left[\frac{\partial^2}{(\partial x_n \partial x_n)_A} + \frac{\partial^2}{(\partial x_n \partial x_n)_B} \right] \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle = \\ & = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle}{\partial z_n \partial z_n} + 2\nu \frac{\partial^2 \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle}{\partial \xi_n \partial \xi_n} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Кроме того, используем вспомогательное соотношение

$$\begin{aligned} f_\epsilon &= \nu \left\langle \frac{\partial u'_{iA}}{\partial x_{nA}} \frac{\partial u'_{iB}}{\partial x_{nB}} \right\rangle = \nu \frac{\partial^2 \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle}{\partial x_{nA} \partial x_{nB}} = \\ &= \frac{\nu}{4} \frac{\partial^2 \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle}{\partial z_n \partial z_n} - \nu \frac{\partial^2 \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle}{\partial \xi_n \partial \xi_n} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Исключая в (2.1) справа последний член с помощью (2.2), получим

$$\begin{aligned} & \nu \left[\frac{\partial^2}{(\partial x_n \partial x_n)_A} + \frac{\partial^2}{(\partial x_n \partial x_n)_B} \right] \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle = \\ &= \nu \frac{\partial^2 \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle}{\partial z_n \partial z_n} - 2f_\epsilon(x_A, x_B) \end{aligned} \quad (2.3)$$

При $x_A = x_B$ функция f_ε обращается в скорость диссипации, а именно

$$f_\varepsilon(x_A = x_B) = \varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \right\rangle \quad (2.4)$$

При взаимном удалении A и B функция f_ε быстро убывает, стремясь к нулю. Значения проекций осредненной скорости в точках A и B представим разложениями

$$u_{kA} = u_k(z) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial z_m} \right) \xi_m + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial z_m \partial z_l} \right) \xi_m \xi_l \quad (2.5)$$

$$u_{kB} = u_k(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial z_m} \right) \xi_m + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial z_m \partial z_l} \right) \xi_m \xi_l$$

Подставим (1.2), (1.3), (1.10), (1.13), (1.15), (2.3), (2.5) в уравнение (1.1) и осредним получившееся соотношение по S . После некоторых упрощений на основе указанных выше допущений получим уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (q^2 D) + u_n \frac{\partial}{\partial z_n} (q^2 D) + \frac{\Delta u_n}{24} \frac{\partial}{\partial z_n} (q^2 l^2 D \zeta^2) &= 2A_3 q l \frac{\partial u_i}{\partial z_m} \left(\frac{\partial u_m}{\partial z_l} + \frac{\partial u_l}{\partial z_m} \right) + \\ + \frac{\Delta u_k}{6} \frac{\partial (A_6 \zeta^2 q^2 l^2)}{\partial z_k} - \frac{A_7^{(0)} \zeta^2}{6} l^2 \frac{\partial q}{\partial z_m} \left(\frac{\partial u_l}{\partial z_m} + \frac{\partial u_m}{\partial z_l} \right) \Delta u_l - \\ - \frac{A_8 \zeta^2}{12} q l^2 \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial z_p} \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial z_p} + 10 \frac{\partial}{\partial z_k} \left(B_4 q l \frac{\partial q^2}{\partial z_k} \right) + \\ + 10 \frac{\partial}{\partial z_k} \left[B_5 q \frac{\partial (q^2 l)}{\partial z_k} \right] - 6q_1^2 \frac{B_1 + 4B_2 + B_3}{l \zeta} - \\ - 2q_1^2 \frac{B_1' + 4B_2' + B_3'}{l} - 2 \frac{\partial}{\partial z_j} \left\{ B_8 \left(\frac{a_1^*}{3} + a_2^* \right) \frac{\partial u_m}{\partial z_j} \frac{\partial (q^2 l^2)}{\partial z_m} - \right. \\ \left. - B_8 a_3^* \frac{\partial}{\partial z_m} \left[q l^2 \frac{\partial u_m}{\partial z_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial z_k} + \frac{\partial u_k}{\partial z_l} \right) \right] \right\} + \nu \frac{\partial^2}{\partial z_m \partial z_m} (q^2 D) - 2f_\varepsilon \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$D = A_1 + 3A_2, \quad B_n' = \frac{dB_n}{d\zeta}, \quad \omega_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial z_i} - \frac{\partial u_i}{\partial z_j}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_k}$$

Слагаемые полинома (1.3) с коэффициентами A_4, A_5, A_7 в (2.6) объединены в один член с коэффициентом $A_7^{(0)}$. Уравнение (2.6), которое можно назвать уравнением полиномиальных коэффициентов, является приближенным, поскольку при его выводе использованы приближенные выражения (1.3), (1.10), (1.15). С другой стороны, эти выражения подчинены связям, налагаемым соотношениями (1.4), (1.5), (1.11), (1.14), которые таким образом оказываются учтенными в уравнении (2.6) посредством нескольких дополнительных слагаемых с коэффициентами A_i и B_r .

При составлении (2.6) использовано 17 коэффициентов A_i и B_r , которые подчинены 6 уравнениям (1.9), (1.12), (1.16), так что 11 коэффициентов можно задавать произвольно.

Разделим (2.6) на 2 и положим в этом уравнении $\zeta = 0$. В соответствии с теорией однородной изотропной турбулентности при $\zeta = 0$ имеем

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_1' = B_2' = B_3' = 0. \text{ Положим } B_4(0) = \frac{3}{10} \sqrt{\frac{3}{2}} (\sigma_k)^{-1}, B_5(0) = B_8(0) = 0$$

Здесь σ_k — эмпирический коэффициент. В результате получим уравнение баланса энергии турбулентности в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + u_n \frac{\partial k}{\partial z_n} &= v_i \frac{\partial u_i}{\partial z_p} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_p} + \frac{\partial u_p}{\partial z_i} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z_p} \left(\frac{v_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z_p} \right) + v \frac{\partial^2 k}{\partial z_p \partial z_p} - \varepsilon_s \end{aligned} \quad (2.7)$$

Величину ε_s можно выразить формулой Колмогорова, справедливой при больших числах Re, а именно

$$\varepsilon_s = c_d \frac{k \sqrt{k}}{l} \quad (2.8)$$

или комбинированной формулой, пригодной и при малых числах Re в области вязкого подслоя, как, например, принято в [25].

Примем обозначение

$$2a_L kl = \int_0^\infty q^2 D dr = q^2 l \int_0^\infty D(\zeta) d\zeta \quad (2.9)$$

Величину $2a_L kl$ можно назвать энергией коррелированных пульсаций. Произведение kl является среднекинетической энергией пульсаций жидкого отрезка длиной l , у которого единица длины имеет единичную массу.

Укажем вспомогательное преобразование

$$\begin{aligned} \int_0^{r_L} \frac{\partial}{\partial z_n} (q^2 D) dr &= \frac{\partial}{\partial z_n} \left(\int_0^{r_L} q^2 D dr \right) - \\ &- \left[\frac{\partial r_L}{\partial z_n} (q^2 D) \right]_{r=r_L} = 2a_L \frac{\partial (kl)}{\partial z_n} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь и далее принимаем $A_i(r_L) \cong 0$, $B_i(r_L) \cong 0$, $D(r_L) \cong 0$.

Чтобы получить уравнение для масштаба l , проинтегрируем (2.6) по r от 0 до r_L и разделим получившееся уравнение на $2a_L$. Обозначив интегралы от функций $A_i(\zeta)$, $B_i(\zeta)$ (с их числовыми коэффициентами), умноженных на соответствующие степени ζ и поделенных на $2a_L$, через a_i , b_i и c_{mi} , получим уравнение переноса величины $m = kl$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} + u_n \frac{\partial m}{\partial z_n} + \frac{a_0}{24} \Delta u_p \frac{\partial (ml^2)}{\partial z_p} &= a_3 v_i l l + a_6 \Delta u_p \frac{\partial (ml^2)}{\partial z_p} - \\ &- a_1 l^4 \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial z_p} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_p} + \frac{\partial u_p}{\partial z_i} \right) \Delta u_i - \frac{1}{2} a_8 v_i l^3 \left(\frac{\partial \omega_{i,j}}{\partial z_p} \frac{\partial \omega_{i,j}}{\partial z_p} \right) + b_4 \frac{\partial}{\partial z_p} \left(v_i l \frac{\partial k}{\partial z_p} \right) + \\ &+ b_5 \frac{\partial}{\partial z_p} \left(v_i \frac{\partial m}{\partial z_p} \right) - c_{m1} F k \sqrt{k} - \frac{\partial}{\partial z_j} \left\{ b_c l \frac{\partial u_p}{\partial z_j} \frac{\partial (ml)}{\partial z_p} - b_d l \frac{\partial}{\partial z_p} \left[v_i l^2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial z_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_i} + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{\partial u_i}{\partial z_j} \right) \right] \right\} + v \frac{\partial^2 m}{\partial z_p \partial z_p} - \beta \int_0^{r_L} f_i dr \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$I = \frac{\partial u_i}{\partial z_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_j} + \frac{\partial m_j}{\partial z_i} \right), \quad F = 1 + f_2 + c_{m2} l \sqrt{I} (c_{m1} \sqrt{k})^{-1}$$

$$f_2 = f_2 \left(\frac{l}{\kappa_1 s} \right), \quad \kappa_1 = \kappa c_d^{1/4}, \quad \kappa = 0,4$$

Функция f_2 введена для учета влияния близости стенки на характеристики турбулентности; координата s отсчитывается от поверхности стенки по нормали к ней. Последнее слагаемое в функции F — малая добавка, введенная для улучшения качества уравнения (2.11) с точки зрения его решения численными методами. Коэффициенты σ_k , c_d в (2.7), (2.8) и a_0 , a_3 , a_6 , a_7 , a_8 , b_4 , b_5 , b_c , b_a , c_{m1} , c_{m2} , β в (2.11) считаем постоянными, имеющими универсальные числовые значения для различных турбулентных течений, которые следует найти путем сравнения результатов расчетов с опытными данными.

Роль последнего слагаемого в правой стороне (2.11) велика при малых Re , а при больших числах Re им можно пренебречь.

Расчеты, о которых речь идет ниже, проведены для течений с развитой турбулентностью при больших числах Re , в которых влиянием вязкости, т. е. последним членом в (2.11) справа, можно пренебречь.

3. Турбулентные течения с преимущественным направлением движения жидкости. Построенная модель применена для расчетов течений с преимущественным направлением движения жидкости плоским и осесимметричным (течения типа пограничного слоя). Полная система уравнений, включая (2.7), (2.11), в этом случае имеет вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j v_t \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} (y^j u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^j v) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + v_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{c_d k \sqrt{k}}{l}$$

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} = & \frac{b_5}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j v_t \frac{\partial m}{\partial y} \right) + \frac{b_4}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j v_t l \frac{\partial k}{\partial y} \right) + a_3 v_t l \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \\ & - a_7 l^4 \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{j}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - a_8 v_t l^3 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{j}{y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \\ & - c_{m1} \left[1 + 0,8 \left(\frac{l}{\kappa_1 s} \right)^4 \right] k \sqrt{k} - c_{m2} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| m \end{aligned}$$

При $j = 0$ течение плоское, при $j = 1$ — осесимметричное.

Выполненные расчеты ряда автомодельных течений и сравнения их результатов с экспериментальными данными позволили установить числовые значения эмпирических коэффициентов, входящих в (3.1)

$$a_0 = 0, \quad \sigma_k = 1, \quad c_d = 0,075, \quad a_3 = 0,965, \quad a_7 = 4, \quad (3.2)$$

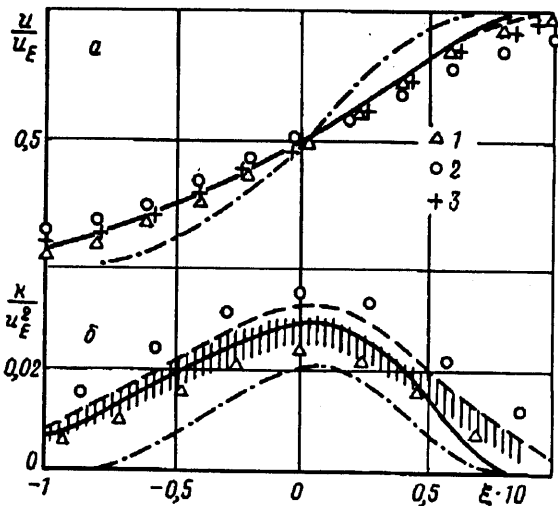
$$c_{m1} = c_d/2, \quad a_8 = 8, \quad b_4 = b_5 = 0,5, \quad c_{m2} = 0,015$$

Поправочная функция f_2 , входящая в F и учитывающая влияние близости твердой стенки на скорость передачи энергии m в область диссипации, взята из [9], но с иным числовым коэффициентом, и имеет вид

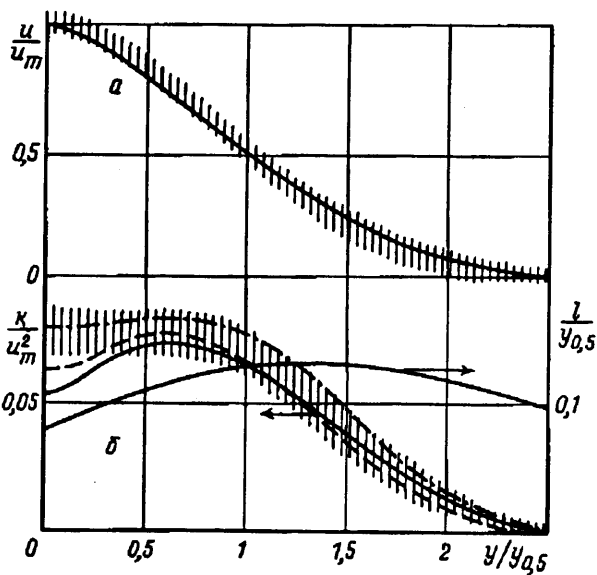
$$f_2 = 0,8 (l/\kappa_1 s)^4 \quad (3.3)$$

Координата s , отсчитываемая от стенки по нормали к ней, в свободных струях и следах имеет значение $s = \infty$.

Численное моделирование решений системы (3.1) осуществлялось с помощью



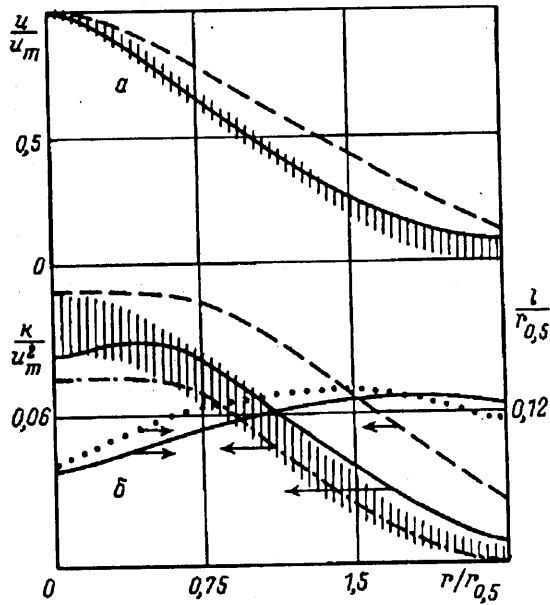
Фиг. 1



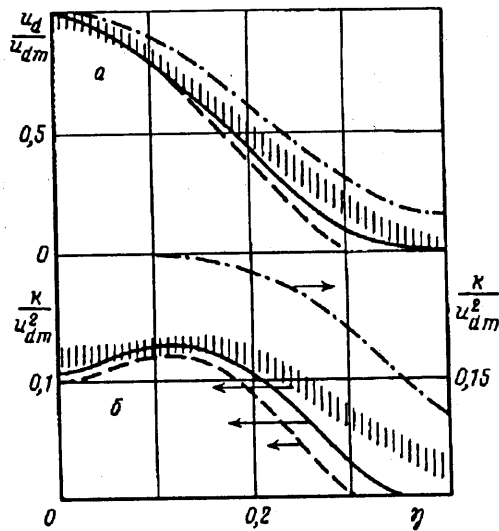
Фиг. 2

следующего алгоритма. В нулевом приближении задавалось v_i и находилось соответствующее распределение скоростей интегрированием первых двух уравнений системы (3.1). С теми же распределениями v_i и скоростей находились k и l путем интегрирования двух последних уравнений системы. Затем находилось новое распределение v_i , которое сравнивалось с предыдущим. Если относительная разность превышала заданную погрешность, функция v_i уточнялась и делалось следующее приближение и т. д. Результаты расчетов при фиксированных значениях эмпирических коэффициентов (3.2) (сплошные кривые) в сравнении с опытными данными, а также с расчетами по $k - \epsilon$ -модели (штриховые кривые) и по $k - kl$ -модели [10] (штрихпунктирные кривые) представлены на фиг. 1—7.

На фиг. 1 приведены профили скоростей u/u_E (a) и энергии турбулентности



Фиг. 3

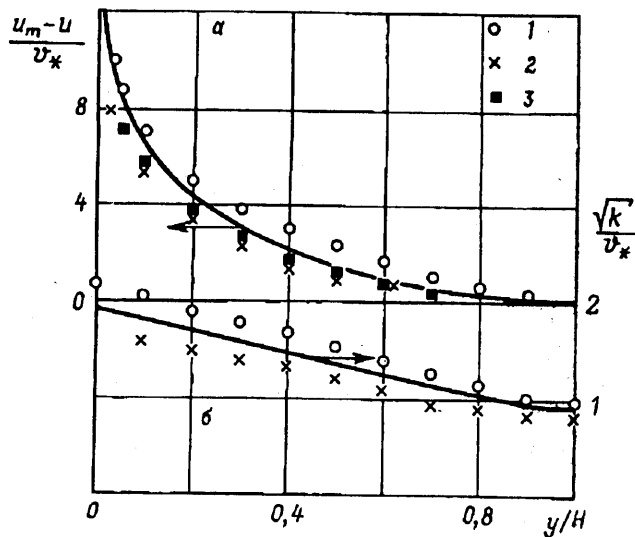


Фиг. 4

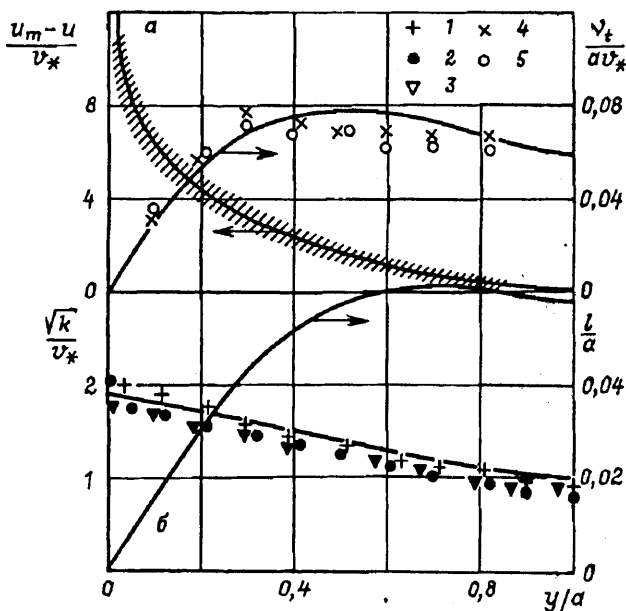
k/u_E^2 (б) для слоя смешения. Здесь u_E — скорость на внешней границе слоя, $\xi = (y - y_{0,5})/x$, $y_{0,5}$ — координата точки, в которой $u = 0,5u_E$. Точки соответствуют работам: 1 — [26], 2 — [27], 3 — [28]. Заштрихованная область соответствует разбросу опытных данных из [28].

На фиг. 2 представлены опытные данные, относящиеся к плоской струе. Здесь u_m — скорость на оси струи, $y_{0,5}$ — координата точки, в которой $u = 0,5u_m$, l — масштаб турбулентности. Штриховкой показаны области разброса опытных данных [29—31].

Профили осевой скорости (а) и энергии турбулентности и ее масштаба (б) в круглой струе показаны на фиг. 3. Штриховкой обозначены области разброса



Фиг. 5

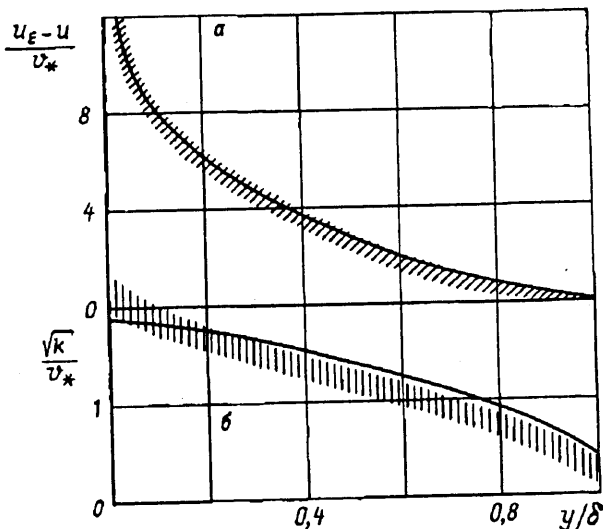


Фиг. 6

опытных данных [32], $r_{0,5}$ — радиальная координата точки, в которой $u = 0,5u_m$. Для сравнения на фиг. 3, б пунктирной кривой показано распределение масштаба турбулентности в плоской струе $l/y_{0,5}$.

На фиг. 4 приведены данные для дальнего плоского следа за круглым цилиндром. Здесь $u_d = u_E - u$ — дефект скорости, а u_{dm} — его максимальная величина, u_E — скорость набегающего потока, $\eta = y/\sqrt{dx}$, d — диаметр цилиндра. Штриховкой показан разброс опытных данных [33].

Распределение дефекта скорости $(u_m - u)/v_*$ (а) и энергии турбулентности \sqrt{k}/v_* (б) по высоте плоского канала показано на фиг. 5. Здесь H — полувысота



Фиг. 7

канала, $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — динамическая скорость, u_m — скорость на оси канала. Точки соответствуют экспериментальным работам: 1 — [34], 2 — [35], 3 — [36].

На фиг. 6 построены профили дефекта скорости и величины \sqrt{k}/v_* , а также v_i/av_* и l/a в зависимости от координаты $y = a - r$ круглой трубы (a — радиус трубы). Штриховкой показаны пределы разброса опытных данных разных авторов при числах Re в пределах $4 \cdot 10^4 - 3,2 \cdot 10^6$ [37]. Точки соответствуют работам: 1 — [38], 2 — [39], 3 — [40]. Точки 4 и 5 получены в [23] путем обработки опытных данных.

На фиг. 7 приведены результаты, относящиеся к пограничному слою на пластине. Здесь u_e — скорость внешнего потока, δ — толщина пограничного слоя. Косой штриховкой показаны пределы разброса опытных данных для дефекта скорости [41, 42] (a), а вертикальной штриховкой — разброс измеренных величин \sqrt{k}/v_* в [41].

Как видно из фиг. 1—7, результаты расчетов по предлагаемой модели удовлетворительно согласуются с опытными данными. Согласие с опытами лучше, чем по модели $k - kl$ [10], и в среднем такое же, как по модели $k - \epsilon$, за исключением круглой струи (фиг. 3), для которой предлагаемая модель дает лучшие результаты, чем $k - \epsilon$. На фиг. 3 профили скорости и энергии турбулентности, вычисленные по $k - \epsilon$ -модели при стандартном наборе значений эмпирических коэффициентов (штриховые линии), построены в зависимости от координаты r , отнесенной к $r_{0,5}$, найденной по опытному данным. Видно, что в этом случае кривые профиля скорости и энергии турбулентности идут существенно выше области разброса экспериментальных данных. Расчетная (по $k - \epsilon$) полутолщина струи в этом случае $r_{0,5} \cong 0,12x$, где x — расстояние от источника струи до данного сечения. По многим экспериментальным данным, полутолщина круглой струи $r_{0,5} \cong 0,09x$, а плоской $y_{0,5} \cong 0,1x$. Расчеты по предлагаемой модели дают для круглой и плоской струй $r_{0,5} = y_{0,5} \cong 0,1x$.

Расчеты пристеночных течений (фиг. 5—7) проведены только для областей развитой турбулентности без учета влияния сил молекулярной вязкости. Граничные условия у стенок задавались с помощью пристеночных функций.

Связи (1.5) и (1.11) определяют появление в уравнениях переноса m (2.11) и (3.1) новых слагаемых по сравнению с соответствующими уравнениями моделей

[7—11]. Благодаря наличию этих слагаемых модель дает хорошее согласие расчетов с опытами для известного набора турбулентных течений (фиг. 1—7) при единых числовых значениях эмпирических коэффициентов. Модель $k - \epsilon$ требует модификации числовых значений коэффициентов при расчетах круглой струи [3, 4, 20], так же как и модель $k - kl$ в работе [8]. Результаты расчетов в [10] имеют плохое согласие с опытами для течений в слое смешения, в следе за цилиндром и в трубе. В остальных работах, посвященных $k - kl$ -моделям, которые упомянуты в списке литературы, результаты расчетов приведены только для отдельных течений из тех, которые представлены на фиг. 1—7.

Можно предполагать, что новые члены в уравнении переноса m (2.11) должны играть существенную роль и в других турбулентных течениях, особенно в трехмерных. Метод вывода уравнения (2.11), использованный в настоящей работе, допускает модификации этого уравнения с целью улучшения его свойств или учета новых эффектов. Для этого нужно модифицировать члены полиномов (1.3) и (1.10) или добавлять новые, подчиняя полиномы соотношениям (1.4), (1.5), (1.11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Launder B. E., Spalding D. B.* The numerical computation of turbulent flows//Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1974. V. 3. № 2. P. 269—289.
2. *Jones W. P., Launder B. E.* The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a 2-equation model of turbulence//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1973. V. 16. № 6. P. 1119—1130.
3. *Ханьялич К., Лаундер Б. Е.* Учет безвихревых напряжений в уравнении диссипации турбулентной энергии//Теорет. основы инж. расчетов. 1980. Т. 102. № 1. С. 149—157.
4. *Поуп С. Б.* Объяснение аномальной разницы в распространении осесимметричной и плоской турбулентных струй//Ракетная техника и космонавтика. 1978. Т. 16. № 3. С. 109—111.
5. *Rotta J.* Statistische theorie nichthomogener turbulenz//Z. Phys. 1951. V. 131. № 1. S. 51—77.
6. *Глушко Г. С.* Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине//Турбулентные течения. М.: Наука, 1970. С. 37—44.
7. *Иевлев В. М.* Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
8. *Rodi W., Spalding D. B.* A two-parameter model of turbulence and its application to free jets//Wärme-und Stoffübertragung. 1970. V. 3. № 2. S. 85—95.
9. *Ng K. H., Spalding D. B.* Predictions of 2-dimensional boundary layers on smooth walls with a 2-equation model of turbulence//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1976. V. 19. № 10. P. 1161—1172.
10. *Воллмерс, Ротта.* Автомодельные решения уравнений для средней скорости, энергии турбулентности и ее масштаба//Ракетная техника и космонавтика. 1977. Т. 15. № 5. С. 130—137.
11. *Jeandel D., Brison J., Mathieu J.* Modeling methods in physical and spectral space//Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 2. P. 169—182.
12. *Nee V. W., Kovaznay L. S. G.* Simple phenomenological theory of turbulent shear flows//Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 3. P. 473—484.
13. *Секундов А. Н.* Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтомодельных течений//Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 114—127.
14. *Колмогоров А. Н.* Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. № 1—2. С. 56—58.
15. *Saffman P. G.* A model for inhomogeneous turbulent flow//Proc. Roy. Soc. A. 1970. V. 317. № 1530. P. 417—433.
16. *Spalding D. B.* Concentration fluctuations in a round turbulent free jet//Chem. Eng. Sci. 1971. V. 26. № 1. P. 95—107.
17. *Сэффмен, Уилкокс.* Модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя//Ракетная техника и космонавтика. 1974. Т. 12. № 4. С. 160—167.
18. *Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е.* Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13—25.

19. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40—52.
20. Shistel R. Sur le concept d'échelles multiples en modelisation des écoulement turbulents//J. Mech. Theor. Appl. 1983. Т. 2. № 3. Р. 417—499.
21. Ханьялич К., Лаундер Б. Е., Шистель Р. Концепция многих временных масштабов в моделировании турбулентного переноса//Турбулентные сдвиговые течения. Т. 2. М.: Машиностроение, 1983. С. 42—57.
22. Акатнов Н. И. Уравнение для масштаба турбулентности в случае произвольного трехмерного осредненного движения жидкости//Аннот. докл. 6-й Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент, 24—30 сентября 1986. Ташкент, 1986. С. 22.
23. Хинце И. С. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. С. 175.
24. Бэтчелор Д. Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С. 46.
25. Акатнов Н. И. Двухмасштабная полуэмпирическая теория турбулентных пограничных слоев и струй//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 17—25.
26. Liepmann H. W., Laufer J. Investigations of free turbulent mixing//NACA. Tech. Notes. 1947. № 1257. Р. 1—61.
27. Wygnanski I., Fiedler H. E. The two-dimensional mixing region//J. Fluid Mech. 1970. V. 41. Pt. 2. Р. 327—361.
28. Patel R. P. An experimental study of a plane mixing layer//AIAA Journal. 1973. V. 11. № 1. Р. 67—71.
29. Bradbury L. J. The structure of a self-preserving turbulent plane jet//J. Fluid Mech. 1965. V. 23. Pt 1. Р. 31—64.
30. Heskestad G. Hot-wire measurements in a plane turbulent jet//J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 4. Р. 721—734.
31. Gutmark E., Wygnanski I. The planar turbulent jet//J. Fluid Mech. 1976. V. 73. Pt 3. Р. 465—495.
32. Wygnanski I., Fiedler H. E. Some measurements in the self-preserving jet//J. Fluid Mech. 1969. V. 38. Pt 3. Р. 577—612.
33. Таунсенд А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 399 с.
34. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: Мир, 1968. 176 с.
35. Laufer J. Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel//NACA. Rep. 1951. № 1053. 20 p.
36. Clark J. A study of incompressible turbulent boundary layers in channel flow//J. Basic Eng. 1968. V. 90. № 4. Р. 455—467.
37. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. С. 165.
38. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow//NACA Rep. 1954. № 1174. 18 p.
39. Wygnanski I. J., Champagne F. H. On transition in a pipe//J. Fluid Mech. 1973. V. 59. Pt 2. Р. 281—335.
40. Lawn C. The determination of the rate of dissipation in turbulent pipe flow//J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Pt 3. Р. 477—505.
41. Klebanoff P. S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient//NACA Rep. 1955. № 1247. 19 p.
42. Hama F. Boundary-layer characteristics for smooth and rough surfaces//Trans. Soc. Naval Arch. Marine Engrs, 1954. V. 62. № 563. Р. 333—358.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
28.IV.1992