

УДК 532.516:532.61

© 1994 г. Ю. А. ВОЛЧЕНКО, И. И. ИЕВЛЕВ

ДИНАМИКА ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ИСКРИВЛЕННОЙ ТВЕРДОЙ СТЕНКЕ С УЧЕТОМ ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается течение трехмерной пленки на криволинейной стенке. На пленку действуют силы тяжести, поверхностного натяжения, а на ее свободную поверхность падает капельный поток. Сформулированы системы уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости на криволинейной твердой поверхности и граничные условия с учетом падающего капельного потока. Рассмотрены задачи о стационарном осесимметричном движении пленки на цилиндрической и конической поверхностях, рассмотрено влияние искривленности твердой стенки на характер решения.

Движение тонких пленок на твердых поверхностях при наличии межфазного обмена на свободной поверхности представляет интерес в связи с проблемами теплообмена в технологических установках. Рассмотрены задачи двумерного движения пленок на плоских поверхностях с учетом различного взаимодействия их на свободной поверхности с контактируемой средой (подробную библиографию см. в [1]). В отличие от предыдущих исследований ниже рассматривается трехмерное течение пленки на криволинейной стенке с учетом падающего на нее капельного потока той же самой жидкости. Необходимость рассмотрения постановкой задач, как это имеет место, в частности, при исследовании процессов, протекающих в охлаждающих радиаторах открытого типа [2]. Ниже получены уравнения и граничные условия в приближении тонкой пленки, когда отбрасываются слагаемые выше первого порядка малости по величине ϵ , связанной с отношением характерного поперечного размера к продольному. Полученная система соотношений обобщает известные уравнения динамики тонкой пленки на плоских стенках [1]. Дается решение стационарных осесимметричных задач динамики пленки на цилиндрической и конической поверхностях.

1. Приближение тонкой пленки. Как и в случае пограничного слоя, рассматриваемого вблизи искривленной поверхности, введем специальную систему криволинейных координат [3]. Обозначим через s^1, s^2 криволинейные координаты точек твердой стенки Σ , имеющие размерность длины. В качестве пространственной системы координат выберем s^1, s^2, n , где n — длина отрезка, отсчитываемая от поверхности стенки по нормали к Σ .

Тогда ковариантные пространственные базисные векторы $E_\alpha = E_\alpha(s^1, s^2, n)$ связаны с базисными векторами e_α на Σ соотношениями

$$E_\alpha = e_\alpha + n \frac{\partial n}{\partial s^\alpha}, \quad E_3 = n \quad (1.1)$$

а компоненты метрического тензора g_{ij} определяются выражениями

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2nb_{\alpha\beta} + n^2c_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha 3} = g_{3\alpha} = 0, \quad g_{33} = 1 \quad (1.2)$$

где $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой, второй и третьей квадратичных форм

поверхности Σ соответственно, n — единичная нормаль к Σ , греческие индексы меняются от 1 до 2, а латинские — от 1 до 3.

При указанном выше выборе системы координат символы Кристоффеля второго рода Γ_{jk}^i , отличные от нуля, равны

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta} - nc_{\alpha\beta}; \quad \Gamma_{\alpha 3}^\gamma = \Gamma_{3\alpha}^\gamma = -g^{\gamma\sigma} (b_{\sigma\alpha} - nc_{\sigma\alpha})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)_0 + 2n (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)_1 + n^2 (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)_2 \quad (1.3)$$

$$(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)_0 = \frac{1}{2} a^{\gamma\sigma} \left(\frac{\partial a_{\alpha\sigma}}{\partial s^\beta} + \frac{\partial a_{\sigma\beta}}{\partial s^\alpha} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s^\sigma} \right)$$

где $(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)_0$ — символы Кристоффеля второго рода поверхности Σ [4], а $(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)_1$, $(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)_2$ — коэффициенты разложения $\Gamma_{jk}^i(s^1, s^2, n)$ в ряд по степеням n .

Выпишем уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = - \frac{\nabla p}{\rho} + \eta \Delta v + g \quad (1.4)$$

где g — интенсивность сил тяжести.

Граничные условия: на твердой стенке Σ — условие прилипания, на свободной поверхности Γ ($n = F$) — условия непрерывности потока масс и скачка тензора напряжений и кинематическое условие

$$v = 0 \quad (n = 0), \quad \langle \rho (v_n - w) \rangle = 0 \quad (1.5)$$

$$\sigma 2\kappa_\tau N + \nabla_\Gamma \sigma + \langle N\tau - pN - \rho (v_n - w) (v - w) \rangle = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = wNn, \quad \nabla_\Gamma \sigma = E^\alpha \frac{\partial \sigma}{\partial s^\alpha}$$

Здесь $F = F(t, s^1, s^2)$ — уравнение свободной поверхности Γ , $N = N(t, s^1, s^2)$ — единичная нормаль к Γ , $w = w(t, s^1, s^2)$ — скорость движения поверхности Γ в направлении нормали N : $w = wN$, $2\kappa_\tau$ — удвоенная средняя кривизна Γ , $\nabla_\Gamma \sigma$ — поверхностный градиент коэффициента поверхностного натяжения на Γ (по α суммирование от 1 до 2), $E^\alpha = E^\alpha(t, s^1, s^2)$ — элементы взаимного базиса на Γ , $\tau = \tau(t, s^1, s^2, n) = 2\eta V$ — тензор вязких напряжений, η — коэффициент динамической вязкости, полагаемый постоянным, $V = V(t, s^1, s^2, n)$ — тензор скоростей деформаций, $v_n = v \cdot N$ — нормальная к Γ составляющая скорости жидкости пленки.

Введем безразмерные переменные, как это делается для тонких пленок на плоских стенках [1]. Обозначим через l_0 характерный продольный линейный размер, а h_0 — соответственно поперечный размер. Отношение $\varepsilon = h_0 l_0^{-1}$ для тонких пленок является малым параметром. Если ввести U_0, t_0, σ_0 — характерные продольную скорость движения жидкости, время и поверхностное натяжение, то безразмерные величины будут связаны с размерными соотношениями [1]

$$s^\alpha = l_0 s'^\alpha, \quad n' = \varepsilon l_0 n', \quad v^\alpha = v_0 v'^\alpha, \quad v_n = \varepsilon U_0 v'_n$$

$$F = \varepsilon l_0 F', \quad p = \rho U_0^2 p', \quad t = t_0 t', \quad \sigma = \sigma_0 \sigma'$$

Данные соотношения учитывают то, что поперечная скорость движения жидкости мала по сравнению с продольной и нормальная производная величина велика по отношению к их продольным производным.

В дальнейшем фигурируют только безразмерные величины, знак штрих опущен. В этом случае форма соотношений (1.1)—(1.3) сохраняется с заменой n на εn .

Из (1.4) следуют уравнения в приближении тонкой пленки

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial s_\alpha} v_\alpha + \varepsilon \left(nb_{\alpha\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} + n \frac{b_{\alpha\alpha}}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial s_\alpha} v_\alpha - n \frac{\partial 2\kappa}{\partial s_\alpha} v_\alpha \right) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \varepsilon \left(St \frac{\partial v_n}{\partial t} + b_{\beta\gamma} v_\beta v_\gamma - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_n}{\partial n^2} \right) = \frac{en}{Fr} \quad (1.7)$$

$$St \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial n^2} + \varepsilon \left\{ v_n \frac{\partial v_\alpha}{\partial n} + v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} + (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha)_0 v_\beta v_\gamma + a^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial s_\beta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{Re} \left[(2\kappa - b_{\alpha\alpha}) \frac{\partial v_\alpha}{\partial n} + b_\beta^\alpha \frac{\partial v_\beta}{\partial n} \right] \right\} = \frac{eE_\alpha^\circ}{Fr}$$

$$St = \frac{h_0}{t_0 U_0}, \quad Re = \frac{U_0 h_0}{\nu}, \quad Fr = \frac{U_0^2}{gh_0}$$

Здесь $a = \det \|a_{\alpha\beta}\|$, e — единичный вектор, задающий направление действия силы тяжести, $b_\beta^\alpha = a^{\alpha\gamma} b_{\beta\gamma}$ (по γ суммирование от 1 до 2), $2\kappa = a^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha}$ — удвоенная средняя кривизна поверхности Σ (по α, β суммирование от 1 до 2), St, Re, Fr — числа Струхала, Рейнольдса, Фруда.

Введем вспомогательную функцию $P = P(t, s_1, s_2, n)$, связанную с давлением p соотношением

$$p = p_0 - \sigma 2\kappa + P$$

где p_0 — «атмосферное» давление (постоянная составляющая) в области капельного потока.

В этом случае граничные условия (1.6) на свободной поверхности Γ можно представить в виде

$$v_n - w - v_\alpha \frac{\partial F}{\partial s_\alpha} + \varepsilon \left(4\kappa v_n - b_{\alpha\alpha} v_\alpha \frac{\partial F}{\partial s_\alpha} \right) F = -Q_n^\circ Q_n$$

$$P + \varepsilon \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial v_n}{\partial n} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial n} \frac{\partial F}{\partial s_\alpha} \right) = -\varepsilon E_n^\circ P_n^\circ \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{2Re} a_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\beta}{\partial n} + \varepsilon \left\{ \frac{1}{2Re} \left[(4\kappa a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \frac{\partial v_\beta}{\partial n} F + a_{\alpha\beta} b_{\beta\beta} \left(v_\beta + \frac{\partial v_\beta}{\partial n} F \right) \right] - \right.$$

$$\left. - a_{\alpha\beta} v_\beta \left(v_n - w + 4\kappa v_n F - v_\gamma \frac{\partial F}{\partial s_\gamma} \right) - \frac{1}{We} \frac{\partial \sigma}{\partial s_\alpha} \right\} = E_\tau^\circ P_\tau^\circ$$

$$St \frac{\partial F}{\partial t} = \varepsilon w, \quad We = \frac{\rho U_0^2 h_0}{\sigma_0}, \quad Q_n^\circ = \frac{l_0 q_{n \max}^\circ}{\rho U_0 h_0}$$

$$E_n^\circ = \frac{l_0 P_{n \max}^\circ}{h_0 \rho U_0^2}, \quad E_\tau^\circ = \frac{\pm |P_{\tau \max}^\circ|}{h_0 \rho U_0^2}$$

где $q_{n \max}^\circ$ — максимальное значение плотности потока массы капель, падающих на поверхность Γ , $P_{n \max}^\circ$ — максимальное значение нормальных напряжений на Γ , действующих со стороны капельного потока, без учета составляющей $p_0 - \sigma 2\kappa$, $P_{\tau \max}^\circ$ — максимальное значение касательных напряжений на Γ со стороны капельного потока, знак плюс соответствует тому, что относительная касательная составляющая скорости капельного потока по отношению к поверхности пленки положительна, $Q_n(s_1, s_2)$, $P_n^\circ(s_1, s_2)$, $P_\tau^\circ(s_1, s_2)$ — известные функции поверхностных переменных s_1, s_2 , We — число Вебера.

Величины Q_n° , Q_n , E_n° , P_n° , E_n° , P_n° считаем заданными. Если рассматривать капельный поток как сплошную среду, характеризуемую плотностью ρ_0 и нулевой вязкостью, то

$$Q_{n \max}^\circ \approx -\rho_0 (v_{0n} - w), P_{n \max}^\circ \approx \rho_0 (v_{0n} - w)^2$$

Для грубой оценки величины $P_{n \max}^\circ$ можно положить касательный импульс, передаваемый капельным потоком пленке, пропорциональным отношению относительной продольной составляющей скорости движения капель по отношению Γ к их радиусу R_c с коэффициентом пропорциональности («вязкостью») v_0 . Этот коэффициент в свою очередь можно считать пропорциональным отношению $\rho_0 \rho^{-1}$. Более точную информацию об указанных величинах можно получить, либо рассматривая более подробно процесс слияния капель с пленкой, либо экспериментальным путем.

Как показывают вычисления, отбрасываемые в соотношениях тонкой пленки слагаемые, имеющие второй порядок малости по ε , содержат производные от v_n и F по продольным координатам второго порядка, т. е. имеют место малые параметры при старших производных. Это может служить причиной появления погранслоя по переменным s_1, s_2 . Действительно, погранслоем наблюдается вблизи входной щели или в местах резкого излома поверхности стенки [1]. Поэтому используемые ниже асимптотические разложения решений по ε необходимо рассматривать как «внешние» разложения, справедливые вдали от входных щелей [5].

2. Пленка на конической поверхности. Рассмотрим движение пленки по поверхности кругового конуса, угол полураствора которого равен α и расположенного так, что его ось симметрии совпадает с осью z , направленной вниз. Начало координат совместим с вершиной конуса.

Предположим, что пленка жидкости стекает от вершины конуса вниз и орошается направленным сверху вниз вдоль оси z капельным потоком на участке поверхности конуса, заключенном между плоскостями $z = L_0$ и $z = L_0 + l_0$.

Обозначим через R радиус окружности C сечения конуса плоскостью $z = L_0$ ($R = L_0 \sin \alpha$). Выберем в качестве криволинейных координат x — дуговую координату, связанную с окружностью C , s — длину отрезка образующей конуса, отсчитываемую от C , и n — расстояние от поверхности конуса по нормали к Σ . Определим свободную поверхность конуса уравнением $n = F(s)$.

В этом случае система уравнений и граничных условий, описывающих осесимметричные движения пленки, имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial n} + U \frac{\sin \alpha}{R_1} + \varepsilon \left(\frac{\cos \alpha}{R_1} + nU \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R_1^2} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} - \varepsilon \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = - \frac{\sin \alpha}{\text{Fr}} \quad (2.2)$$

$$- \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + \varepsilon \left(- \frac{1}{\text{Re}} \frac{\cos \alpha}{R_1} \frac{\partial U}{\partial n} + V \frac{\partial U}{\partial n} + U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial P}{\partial s} \right) = \frac{\varepsilon \alpha^2}{\text{Fr}} \quad (2.3)$$

$$n = F(s):$$

$$V - U \frac{dF}{ds} - \varepsilon \frac{2 \cos \alpha}{R_1} = -Q_n^\circ Q_n \quad (2.4)$$

$$P - \varepsilon \left[\frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} \frac{dF}{ds} \right) + E_n^\circ P_n^\circ \right] = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial n} - E_{\tau}^{\circ} P_{\tau}^{\circ} - \varepsilon \left[\frac{1}{\text{Re}} \frac{\cos \alpha}{R_1} \frac{\partial U}{\partial n} F + \left(V - \frac{2 \cos \alpha}{R_1} FV - U \frac{dF}{ds} \right) U \right] = 0 \quad (2.6)$$

$$n = 0: U = V = 0 \quad (2.7)$$

$$R_1 = R + (\sin \alpha) s$$

Вспользуемся асимптотическими разложениями для искомых величин в ряды по ε [5]: $A = A^{\circ} + \varepsilon A^1 + \dots$, где A — одна из искомых функций U, V, F, P . Аналогичные разложения были использованы для решения задачи о динамике пленки на плоскости [1].

Приведенное ниже нулевое приближение представляет собой обобщение на случай криволинейной стенки соответствующих соотношений, дающих решение Нуссельта [1, с. 17]

$$-\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U^{\circ}}{\partial n^2} = \frac{\cos \alpha}{\text{Fr}}, \quad \frac{\partial P^{\circ}}{\partial n} = -\frac{\sin \alpha}{\text{Fr}} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U^{\circ}}{\partial s} + \frac{\partial V^{\circ}}{\partial n} + \frac{\sin \alpha}{R_1} U^{\circ} = 0 \quad (-L_0 < s < \infty, 0 < n < F^{\circ}),$$

$$V^{\circ} - U^{\circ} \frac{dF^{\circ}}{ds} = -Q_n^{\circ} Q_n, \quad P^{\circ} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{2\text{Re}} \frac{\partial U^{\circ}}{\partial n} - E_{\tau, \max}^{\circ} P^{\circ} = 0 \quad (-L_0 < s < \infty, n = F^{\circ})$$

$$U^{\circ} = V^{\circ} = 0 \quad (n = 0) \quad (2.10)$$

Первое приближение

$$\frac{\partial^2 U^1}{\partial n^2} = \text{Re} \left(V^{\circ} \frac{\partial U^{\circ}}{\partial n} + U^{\circ} \frac{\partial U^{\circ}}{\partial s} - \frac{\cos \alpha}{\text{Re} R} \frac{\partial U^{\circ}}{\partial n} + \frac{\partial P^{\circ}}{\partial s} - \frac{n}{\text{Fr}} \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{R_1} \frac{1 + R_1}{R} s \right)$$

$$\frac{\partial P^1}{\partial n} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V^{\circ}}{\partial n^2} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial U^1}{\partial s} + \frac{\partial V^1}{\partial n} + \frac{\sin \alpha}{R_1} U^1 = -\frac{\cos \alpha}{R_1} V^{\circ} - n \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R_1^2} U^{\circ} \quad (-L_0 < s < \infty, 0 < n < F^{\circ})$$

$$V^1 - U^{\circ} \frac{dF^1}{ds} - U^1 \frac{dF^{\circ}}{ds} - \frac{2 \cos \alpha}{R_1} F^{\circ} V^{\circ} + F^1 \frac{\partial V^{\circ}}{\partial n} - \frac{dF^{\circ}}{ds} \frac{\partial U^{\circ}}{\partial n} F = 0 \quad (2.12)$$

$$P^1 + \frac{\partial P^{\circ}}{\partial n} F^1 - \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V^{\circ}}{\partial n} - \frac{\partial U^{\circ}}{\partial n} \frac{dF^{\circ}}{ds} \right) + E_n^{\circ} P_n = 0$$

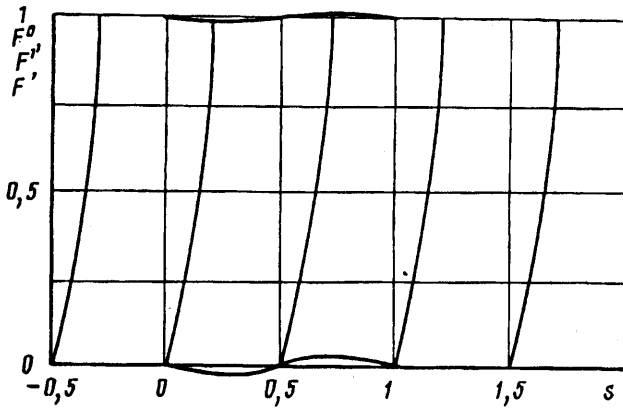
$$\frac{1}{2\text{Re}} \frac{\partial U^1}{\partial n} + \frac{1}{2\text{Re}} \frac{\partial U^{\circ}}{\partial n} F^1 - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\cos \alpha}{R_1} \frac{\partial U^{\circ}}{\partial n} F^{\circ} - \left(V^{\circ} - \frac{2 \cos \alpha}{R_1} F^{\circ} U^{\circ} - U^{\circ} \frac{dF^{\circ}}{ds} \right) U^{\circ} = 0$$

$$(-L_0 < s < \infty, n = F^{\circ})$$

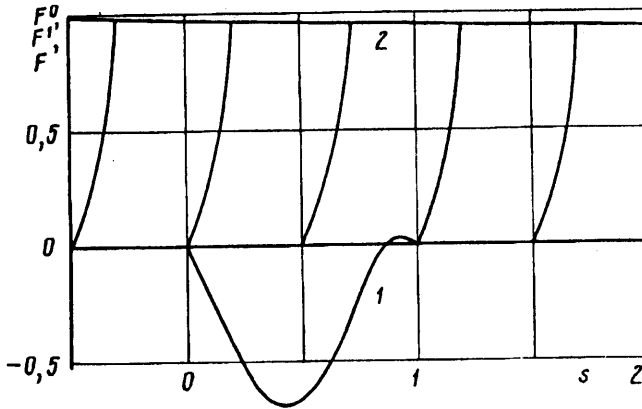
$$U^1 = V^1 = 0 \quad (n = 0) \quad (2.13)$$

Можно показать, что продольная U° и поперечная V° скорости являются полиномами второй и третьей степени по переменной n соответственно

$$U^{\circ} = an - \frac{\text{Re} \cos \alpha n^2}{2\text{Fr}}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$V^{\circ} = -\frac{n^2}{2} \left(a' + \frac{\sin \alpha}{R_1} a \right) + \frac{\text{Re}}{6\text{Fr}} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R_1} n^3$$

$$a = 2\text{Re } E_{\tau}^{\circ} P_{\tau}^{\circ} + \frac{\text{Re} \cos \alpha}{\text{Fr}} F^{\circ}$$

Дифференциальное уравнение для функции $F^{\circ}(s)$, вытекающее из первого соотношения (2.9), можно представить в виде

$$\frac{dF^{\circ}}{ds} = \left(\frac{Q_n Q_n}{F^{\circ}} + \frac{\text{Re} \cos \alpha \sin \alpha F^{\circ 2}}{6\text{Fr} R_1} - Q_0' F^{\circ} \right) \frac{1}{a} - \frac{\sin \alpha F^{\circ}}{2R_1}, \quad Q_0 = \text{Re } E_{\tau}^{\circ} P_{\tau}^{\circ} \quad (2.14)$$

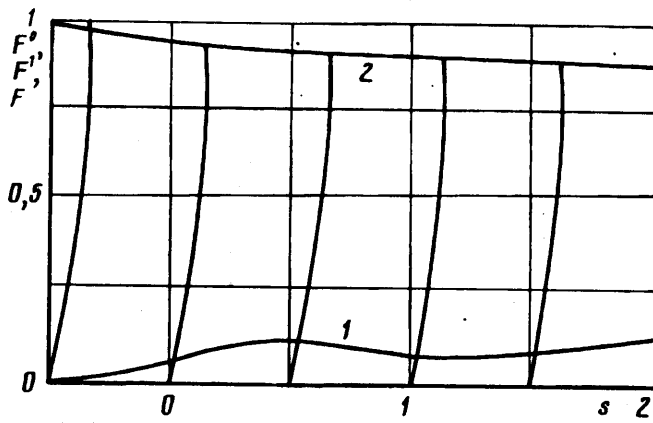
Требуемое для расчетов начальное условие $F^{\circ}(s_0)$ определим из условия $F(s_0) = 1$ в точке s_0 выше зоны орошения: $s_0 < 0$ (как показали дальнейшие расчеты, при выборе значений $s_0 < -0,5$ характер решения уравнения (2.14) не меняется). В этом случае $F(s_0) = F^{\circ}(s_0) + \varepsilon F^I(s_0) + \dots$

Откуда

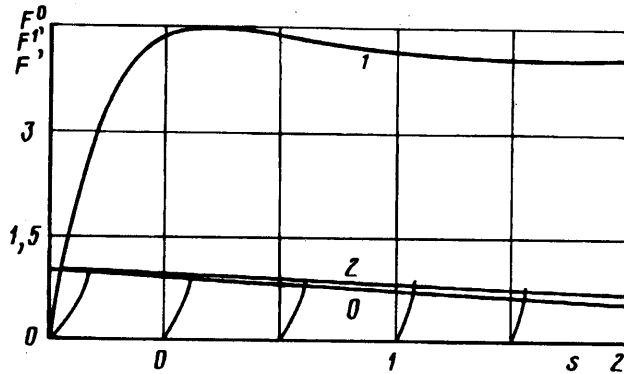
$$F^{\circ}(s_0) = 1, \quad F^I(s_0) = 0 \quad (2.15)$$

Первое приближение дает следующие соотношения для определения U^I, V^I :

$$U^I(s, n) = bn + \Phi(s, n)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$V'(s, n) = -\frac{n^2}{2} \left(b' + b \frac{\sin \alpha}{R_1} \right) - \Omega(s, n)$$

$$\Phi(s, n) = \frac{n^2}{2} \left(\frac{\text{Re} \cos \alpha}{\text{Fr}} \text{tg } \alpha F^{\circ'} - a \frac{\cos \alpha}{R_1} \right) + \frac{n^3}{6} \frac{\text{Re} \cos^2 \alpha}{\text{Fr} R_1} \left[1 - \frac{\sin \alpha (R + R_1) s}{R^2} \right] +$$

$$+ \frac{n^4}{24} \text{Re } a \left(a' - \frac{\sin \alpha}{R_1} \right) + \frac{n^5}{30} a \frac{\text{Re}^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\text{Fr} R_1} - \frac{n^6}{180} \text{Re} \left(\frac{\text{Re} \cos \alpha}{\text{Fr}} \right)^2 \frac{\sin \alpha}{R_1}$$

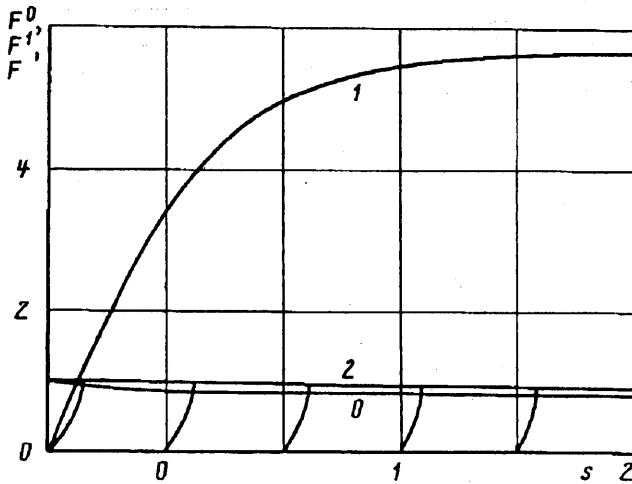
$$\Omega(s, n) = \frac{n^3}{3} \left[\frac{\text{Re} \sin \alpha}{2\text{Fr}} \left(F^{\circ''} + \frac{\sin \alpha}{R_1} F^{\circ'} \right) + \frac{\cos \alpha}{R_1} \left(a \frac{\sin \alpha}{R_1} - a' \right) \right] -$$

$$- \frac{n^4}{12} \frac{\text{Re} \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\text{Fr}} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2} \right) + \frac{n^5}{120} \text{Re} \left(a'^2 + aa'' - aa' \frac{\sin \alpha}{R_1} \right) +$$

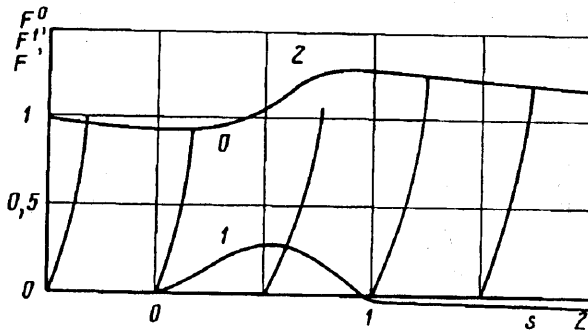
$$+ \frac{n^6}{180} a' \frac{\text{Re}^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\text{Fr} R_1}$$

$$b = \frac{\text{Re} \cos \alpha}{\text{Fr}} F^{\circ} + \Psi(s)$$

$$\Psi(s) = \frac{4 \cos \alpha}{R_1} Q_0 F^{\circ} - 4 Q_0^2 F^{\circ} - \frac{\text{Re} \cos \alpha}{\text{Fr}} Q_0 F^{\circ 2} - 4 \frac{\text{Re} \cos \alpha}{R_1} F^{\circ 2} \left(2 Q_0 + \frac{\text{Re} \cos \alpha F^{\circ}}{2\text{Fr}} \right) \times$$



Фиг. 5



Фиг. 6

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\operatorname{Re} \sin \alpha \cos \alpha (F^0)^3}{6\operatorname{Fr}R_1} - a \frac{\sin \alpha}{2R_1} (F^0)^2 - a' \frac{(F^0)^2}{2} \right) - F^0 \left(\frac{\operatorname{Re} \sin \alpha}{\operatorname{Fr}} F^0 - a \frac{\cos \alpha}{R_1} \right) - \\ & - \frac{\operatorname{Re} \cos^2 \alpha}{2\operatorname{Fr}R_1} (F^0)^2 \left[1 - \frac{\sin \alpha (R + R_1) s}{R^2} \right] - \frac{(F^0)^3}{6} \operatorname{Re} a \left(a' - a \frac{\sin \alpha}{R_1} \right) - \\ & - \operatorname{Re}^2 a \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{6\operatorname{Fr}R_1} (F^0)^4 + \operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{Re} \cos \alpha}{\operatorname{Fr}} \right)^2 \frac{\sin \alpha}{30R_1} (F^0)^5 \end{aligned}$$

$$Q_0 = \operatorname{Re} E_i^0 P_v, \quad ()' = \frac{d()}{ds}$$

$$P_v = P_v(s) = \left[\frac{s}{l_0} \left(1 - \frac{s}{l_0} \right) \right]^2 \quad (s \in (0, l_0))$$

$$P(s) = 0 \quad (s \in (0, l_0))$$

Из условий (2.12), (2.15) вытекают дифференциальное уравнение для нахождения функции $F^1(s)$ и начальное условие

$$\frac{dW}{ds} = \left(\frac{(F^0)'}{F^0} - \frac{\operatorname{Re} \cos \alpha}{\operatorname{Fra}} (F^0)' - \frac{\sin \alpha}{R_1} - 2 \frac{Q_0 (F^0)'}{aF^0} \right) w - \frac{\sin \alpha}{2R_1} (F^0)^2 \Psi -$$

Номер фигуры	$s = -0,5$	0	0,5	1	1,5
1	10	10	11	10	10
2	10	10	11	10	10
3	7,5	7,1	7,3	6,9	6,6
4	11	7,6	6,6	5,5	4,8
5	30	25	22	19	18
6	0,37	0,32	0,55	0,55	0,50

$$-(F^0)' \Phi(s, F^0) - \Omega(s, F^0) - 2 \frac{\cos \alpha}{R_1} F^0 V^0$$

$$W(s_0) = 0$$

$$W = aF^0 F^1, \quad W = w + (F^0)^2 \Omega$$

Расчеты проводились для значений параметров $\varepsilon = 0,02$, $l_0 = 1$, $E_t^0 = 0,4$, $Q_n^0 = 10$ при различных значениях Re , Fr , R , α . Результаты вычислений отражены на фиг. 1—6. Здесь по горизонтальной оси откладывается s , по вертикальной — значения функций F^0 , F^1 , $F = F^0 + \varepsilon F^1$. Кривые, обозначенные цифрами 0, 1, 2, соответствует нулевому F^0 , первому F^1 приближениям и суммарной зависимости F . Здесь же изображены профили продольной составляющей скорости U . В таблице указаны ее максимальные значения U_m для разных значений переменной s .

На фиг. 1, 2 приведены результаты расчетов для цилиндра ($\alpha = 0^\circ$), $Re = 2$, $Fr = 0,1$, $R = 5$ и 1 соответственно. С увеличением кривизны поверхности цилиндра растет вклад первого приближения в общее решение. При этом отличие от нуля первого приближения имеет место только в зоне орошения пленки.

Для конической поверхности ($\alpha = 45^\circ$) и тех же значений физических параметров соответствующие графики приведены на фиг. 3, 4. С увеличением кривизны поверхности влияние первого приближения более существенно. При этом оно отлично от нуля и вне зоны падающего капельного потока.

Влияние чисел Фруда и Рейнольдса на характер решения отражен на фиг. 5 ($Re = 5$, $Fr = 0,1$) и фиг. 6 ($Re = 0,5$, $Fr = 0,5$) для $R = 2$, $\alpha = 45^\circ$. Величина $\delta = ReFr^{-1}$ значительно влияет на характер первого приближения. С ее увеличением «качество» асимптотического решения ухудшается. Здесь нельзя говорить о равномерной пригодности по параметру δ асимптотических разложений (2,8).

В рассматриваемых выше случаях влияние трехмерности задачи проявляется через посредство кривизны стенки. В случае цилиндров первое приближение отлично от нуля только в зоне орошения капельным потоком, с уменьшением кривизны стенки вклад первого приближения в решение уменьшается (фиг. 1, 2). Для стенок, у которых обе главные кривизны отличны от нуля, как нулевое, так и первое приближения существенно меняются и вне зоны падения капельного потока (фиг. 3, 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояджиев Ч., Бешков В. Массоперенос в движущихся пленках жидкости. М.: Мир, 1988. 137 с.
2. Mattick A. T., Herzberg A. The liquid droplet radiator — an ultralightweight heat rejection system for efficient energy conversion in space//Acta Astronaut. 1982. V. 9. № 3. P. 165—172.
3. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
4. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ. С приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
5. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.