

УДК 532.517.4

© 1994 г. В. Г. ЛУЩИК, А. А. ПАВЕЛЬЕВ, А. Е. ЯКУБЕНКО

## ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ. МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

### Обзор

Представлен обзор отечественных работ, опубликованных в основном в настоящем журнале за последние 10—15 лет, по разработке дифференциальных моделей турбулентности и численному исследованию неравновесных турбулентных течений жидкостей, газа и электропроводных сред.

В основе рассмотренных в обзоре моделей турбулентности лежат идеи А. Н. Колмогорова, которые генерировали новый подход к математическому моделированию турбулентных течений, связанный с использованием уравнений переноса для характеристик турбулентности. Дальнейшее развитие эти модели получили с появлением компьютеров, позволяющих от качественного анализа в отдельных областях перейти к получению количественных результатов с помощью математического моделирования турбулентных течений, которое учитывало непосредственное влияние вязкости, а также такие процессы, как диффузия и конвекция.

Основные критерии отбора моделей в обзоре следующие.

1. Рассмотрены только дифференциальные модели, т. е. модели, в которых используются уравнения переноса для основных характеристик турбулентности: энергии турбулентности, напряжения сдвига или турбулентной вязкости и параметра, содержащего интегральный масштаб турбулентности. По числу уравнений переноса модели классифицируются как одно-, двух- и трехпараметрические. Применение модели ограничено классом течений, к которым применимо приближение пограничного слоя.

2. Модели должны быть доведены до практического использования при анализе конкретных течений с указанием областей наиболее эффективного их применения. Тестирование моделей должно быть проведено путем сравнения с наиболее достоверными экспериментальными данными. Модели должны обладать высокой степенью универсальности, позволяющей без изменения констант, входящих в модель, учитывать влияние входных и граничных условий, переменности физических свойств среды и внешних воздействий.

Обзор ставит своей целью продемонстрировать возможности рассмотренных моделей турбулентности для широкого класса течений в пограничных слоях и каналах, а также привлечь внимание к ним разработчиков научных и прикладных программ расчета и пользователей в авиационной, космической технике и в отраслях, использующих устройства со сложными рабочими процессами для описания и управления ими.

### ВВЕДЕНИЕ

Разработке методов расчета турбулентных течений в последнее время было посвящено большое количество публикаций и конференций. На 3-й Стенфордской конференции 1990—1992 гг. (первые две [1, 2] состоялись соответственно в 1968 и в 1980—1981 гг.) была организована серия дискуссий, посвященных состоянию работ в этом направлении, под названием «Совместное исследование моделей турбулентности», в которых приняли участие более 100 исследовательских групп из многих стран, обменивавшихся своими результатами по почте. Целью этого мероприятия была выработка согласованной точки зрения на возможности су-

ществующих в настоящее время моделей турбулентности и выделение типов моделей, которые заслуживают дальнейшего развития. По результатам этой деятельности в итоговых докладах П. Бредшоу [3, 4] сделаны некоторые выводы, из которых отметим следующие.

Результаты, полученные с помощью моделей, использующих уравнения переноса для напряжений Рейнольдса, позволяют предположить, что эти модели являются более точными. Вместе с тем отмечается, что более определенными выводам мешает недостаток представленных результатов, особенно от тех групп исследователей, которые разрабатывают модели с уравнениями переноса для напряжений Рейнольдса.

Существует увеличивающееся количество свидетельств того, что использование уравнения переноса для «частоты» турбулентности, впервые рассмотренного А. Н. Колмогоровым [5] в 1942 г., дает лучшие результаты, чем использование уравнения для диссипации энергии турбулентности, которое широко распространено в настоящее время.

Оба вывода [3, 4] носят скорее предварительный, чем окончательный характер. При этом подчеркивается, что автор [3, 4] не располагает достаточным количеством результатов расчетов, использующих модели с уравнениями переноса для напряжения Рейнольдса и «частоты» турбулентности.

Расчетная модель для сдвиговых турбулентных течений несжимаемой жидкости, в которой уравнения переноса записаны для энергии турбулентности, напряжения сдвига и «частоты», была опубликована авторами настоящего обзора в 1974—1978 гг. [6, 7]. В дальнейшем эта модель была развита для расчета теплообмена и сверхзвуковых сдвиговых течений [8, 9]. За последние 10 лет было опубликовано большое количество результатов расчетов сдвиговых турбулентных течений [10—15], использующих предложенную в [6—9] модель турбулентности.

Расчеты выполнялись при неизменных константах, входящих в модель [7], даже в тех случаях, когда рассчитываемое течение сильно отличалось от тех эталонных течений (течения за решеткой со сдвигом и без сдвига и установившегося течения в трубе), для которых были определены константы. Результаты расчетов турбулентных сдвиговых течений несжимаемой жидкости опубликованы в обзоре [13]. Во всех случаях наблюдалось совпадение результатов расчетов с экспериментальными результатами с такой же точностью, с какой это совпадение наблюдалось для эталонных течений. Среди рассмотренных течений отметим расчеты пограничного слоя со вдувом и отсосом, ускорением и замедлением внешнего потока, включая участок перехода к турбулентности при большом уровне внешних возмущений.

Однако эти результаты, так же как и результаты других исследовательских групп в России, практически не были проанализированы зарубежными исследователями после их опубликования. Поскольку проблемы, рассмотренные в [6—7], в настоящее время, как показывают результаты последней Стенфордской дискуссии [3, 4], вновь становятся предметом обсуждения, в данном обзоре приводятся и анализируются основные результаты работ, выполненных в России после 1-й Стенфордской конференции 1968 г. [1].

## 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ТЕЧЕНИЯХ ТИПА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

1.1. Общая характеристика моделей. Средние значения параметров турбулентного течения подчиняются уравнениям Рейнольдса, которые можно получить, если применить операцию осреднения к уравнениям Навье — Стокса. Уравнения Рейнольдса являются незамкнутой системой, так как в них присутствуют компоненты тензора рейнольдсовых напряжений.

В течениях типа пограничного слоя, т. е. в течениях, у которых один из характерных размеров области много меньше двух других, уравнения Рейнольдса

существенно упрощаются. Так, для случая плоского пограничного слоя с теплообменом в несжимаемой жидкости эти уравнения имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial \langle v'T' \rangle}{\partial y}$$

В уравнения (1.1) входят неизвестные функции, характеризующие турбулентный перенос импульса  $\langle u'v' \rangle$  и тепла  $\langle v'T' \rangle$ , для которых можно записать моментные дифференциальные уравнения, являющиеся следствием уравнений движения и переноса тепла. В приближении пограничного слоя для несжимаемой жидкости, например, уравнение для напряженного сдвига  $\tau = -\langle u'v' \rangle$  имеет вид

$$u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} - \frac{\partial J_\tau}{\partial y} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial u}{\partial y} - T_\tau + \varepsilon_\tau \quad (1.2)$$

В уравнении (1.2) появились новые неизвестные функции

$$\langle v'^2 \rangle, \quad T_\tau = \langle p' \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \rangle, \quad J_\tau = \langle u'v'^2 \rangle, \quad \varepsilon_\tau = \nu \left\langle \frac{\partial u'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v'}{\partial x_\alpha} \right\rangle$$

В большинстве моделей используется уравнение баланса кинетической энергии турбулентности  $2E = \langle u'_\alpha u'_\alpha \rangle$ , которое в приближении пограничного слоя имеет вид

$$u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{\partial J_E}{\partial y} - \langle u'v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon_E \quad (1.3)$$

$$J_E = \langle v' u'_\alpha u'_\alpha \rangle + \frac{1}{\rho} \langle v' p' \rangle, \quad \varepsilon_E = \nu \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u'_k}{\partial x_\alpha} \right\rangle$$

Отсюда видно, что при попытке записи для всех характеристик турбулентности дифференциальных уравнений в них возникает большое количество новых неизвестных функций — моментов второго и третьего порядка.

Таким образом, система уравнений (1.1) — (1.3) остается незамкнутой и поэтому главная трудность создания любой модели турбулентности связана с формулировкой удачных замыкающих алгебраических соотношений. В частности, для моментов третьего порядка обычно используется градиентный механизм переноса

$$\frac{\partial J_\tau}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial J_E}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( D_E \frac{\partial E}{\partial y} \right) \quad (1.4)$$

Для скорости диссипации энергии и трения применяются соотношения, построенные по аналогии с точными формулами для локально-однородной и изотропной турбулентности

$$\varepsilon_\tau = c_\tau \nu \frac{\tau}{L^2}, \quad \varepsilon_E = \varphi_1 \frac{E^{3/2}}{L} \quad (1.5)$$

Здесь  $L$  — поперечный интегральный масштаб турбулентности.

Таким образом, любая модель турбулентности представляет собой набор нескольких дифференциальных и алгебраических уравнений относительно параметров, характеризующих в модели турбулентность:  $\tau$ ,  $E$ ,  $\varepsilon$ ,  $L$ ,  $D$  и т. п. Возможны самые различные варианты записи моделей турбулентности, в которых одни и те же параметры вычисляются либо с применением дифференциальных уравнений, либо с использованием алгебраических формул. Несмотря на имею-

щиеся различия, в существующих моделях много сходных физических идей. В частности, во всех моделях характерное время релаксации (установления равновесия) имеет порядок  $L/\sqrt{E}$ , скорость диссипации энергии  $\sim E^{3/2}/L$ , третьи моменты представляются в виде (1.4).

Число дифференциальных уравнений можно уменьшить, если для напряжения сдвига применить алгебраические соотношения. По аналогии с классическими представлениями о линейной связи между напряжениями трения и скоростью деформации можно записать следующие равновесные соотношения:

$$-\langle u'v' \rangle = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\langle v'T' \rangle = a_t \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.6)$$

Однако в отличие от молекулярных значений турбулентная вязкость  $\nu_t$  и температуропроводность  $a_t$  не определяются физическими свойствами среды, а являются сложными гидродинамическими характеристиками течения. Перенос импульса и тепла осуществляется сравнительно крупномасштабными образованиями с размерами порядка интегрального масштаба турбулентности  $L$  и с характерными пульсационными скоростями порядка  $\sqrt{E}$ , откуда следуют связи для  $\nu_t = \varphi_2 \sqrt{E}L$  и  $a_t = \varphi_3 \sqrt{E}L$ . Определение вида функций  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  является предметом исследования моделей турбулентности, использующих алгебраические (равновесные) соотношения (1.6).

Следует отметить, что впервые уравнение переноса для энергии турбулентности (1.3) при компьютерных расчетах пограничного слоя на плоской пластине непосредственно от стенки использовано в работе [16]. С привлечением алгебраических соотношений для масштаба турбулентности в [16] получено хорошее согласование результатов расчета с экспериментом не только для профиля средней скорости, но и для энергии турбулентности по сечению пограничного слоя. Эта работа оказала большое влияние на развитие математических моделей турбулентных течений, включающих в себя уравнения переноса для характеристик турбулентности. После работы [16] количество публикаций по данному вопросу в мировой литературе резко возросло и остается на высоком уровне до настоящего времени.

**1.2. Особенности дифференциальных моделей турбулентности.** Для замыкания системы уравнений (1.1)–(1.5) и других уравнений той или иной модели турбулентности необходимо добавить уравнение для интегрального масштаба турбулентности  $L$ . Это уравнение часто оказывается основным уравнением модели. Один из способов вывода уравнения для  $L$  предложен в [17], где записано уравнение относительно величины

$$m(x) = EL = \frac{3}{16\pi} \iiint Q(x, \xi) \frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\xi^2}$$

Здесь  $Q$  — двухточечная корреляционная функция, а множитель  $3/(16\pi)$  подобран так, чтобы в однородной изотропной турбулентности масштаб  $L = m/E$  совпадал с поперечным интегральным масштабом.

В [18, 19] был дан новый вывод уравнения для  $m$ , в котором учитывалась конечность расстояния от стенки и взаимодействие с ней крупных вихрей. В результате уравнение для  $m$  приняло вид

$$u \frac{\partial m}{\partial x} + v \frac{\partial m}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \frac{\partial J_m}{\partial y} - \alpha_v \langle u'v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} L + \quad (1.7)$$

$$+ \alpha_{xy} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| m - \alpha_v \nu L - \nu \gamma_v \frac{m}{s^2} - \gamma_p E^{3/2} \left( \frac{L}{S} \right)^2$$

Здесь  $s$  — расстояние до стенки;  $\alpha_v$ ,  $\alpha_{xy}$ ,  $\alpha_s$ ,  $\gamma_v$ ,  $\gamma_p$  — интегралы от безразмерных

корреляционных функций типа  $Q_i(x, \xi)/Q_i(x, 0)$  по безразмерным переменным  $\xi_i = \xi_i/L$ .

Уравнения Рейнольдса, энергии турбулентности, уравнение для  $m$  и совокупность алгебраических функций, выражающих  $\nu_t$ ,  $a_t$ ,  $J_m$ ,  $D_E$ ,  $\varepsilon_E$  через  $E$ ,  $L = m/E$  и другие параметры, являются замкнутой системой уравнений. Из уравнения для  $E$  и  $m$  можно получить уравнение для других функций типа  $F = E^*L^k$ . Система уравнений (1.1)—(1.4), (1.6) и уравнение для  $F$  (с различными  $n$  и  $k$ ) в совокупности с теми же алгебраическими функциями также образуют замкнутую систему уравнений. Разные авторы в качестве уравнения для масштаба использовали уравнения для различных  $n$  и  $k$ .

В [18] для расчетов турбулентных течений использовалась система уравнений (1.1), (1.3), (1.7), замкнутая алгебраическими функциями для  $\nu_t$ ,  $a_t$ ,  $D_E$ ,  $\varepsilon_E$ . Для  $J_m$  предлагалось градиентное представление вида  $\partial J_m/\partial y = -\partial/\partial y (D_m \partial m/\partial y)$ . Здесь  $D_m = k_m \nu_t$  — аналог турбулентной вязкости, поскольку член  $\partial J_m/\partial y$  имеет диффузионный характер. В выражении для  $\nu_t$  и  $a_t$  учитывалось вязкое взаимодействие со стенкой и не учитывались эффекты, связанные с неизотропностью турбулентности. Уравнения (1.1), (1.3) и (1.7) были обобщены для сжимаемых течений. При этом в уравнениях (1.3) и (1.7) появились дополнительные члены.

В [19—22] вместо уравнения для  $m$  (1.7) употреблялось полученное из него и уравнения для энергии турбулентности (1.3) уравнение для  $\lambda = L^2/2$ , которое имеет вид

$$u \frac{\partial \lambda}{\partial x} + w \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - c_\lambda \frac{\nu_t}{E} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \lambda + c_F \left[ 1 - \frac{2\lambda}{s^2} \varphi \left( \frac{2\lambda}{s^2} \right) \right] \frac{L^2}{E} \varepsilon_E \quad (1.8)$$

$$w = v + 0,5\nu \frac{\partial \ln \lambda}{\partial y} - (\nu + D_E) \frac{\partial \ln E}{\partial y}$$

Здесь  $c_\lambda$ ,  $c_F$  — константы.

Модели турбулентности, предложенные в [16, 18—22], могут применяться в течениях типа пограничного слоя, в которых нет сильных изменений граничных условий вдоль потока и нет областей с отрицательной турбулентной вязкостью (назовем такие течения квазинеравновесными). В неравновесных течениях необходимо вводить в рассмотрение дифференциальные уравнения либо турбулентной вязкости  $\nu_t$  (сильные продольные изменения граничных условий, но нет областей с отрицательной турбулентной вязкостью), либо для напряжения сдвига  $\tau = -\langle u'v' \rangle$ . Такие модели предложены в [23—27] (уравнение для  $\nu_t$ ) и в [6, 7] (уравнение для  $\tau$ ).

В [23—27] использовалось уравнение для турбулентной вязкости в виде

$$u \frac{\partial \nu_t}{\partial x} + v \frac{\partial \nu_t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (k\nu_t + \nu) \frac{\partial \nu_t}{\partial y} \right] + \alpha \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \nu_t - \gamma \frac{\nu_t}{s^2} (\beta \nu_t + \nu) \quad (1.9)$$

Здесь  $\alpha = \alpha(\nu_t/\nu)$ ;  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $k$  — константы.

Несмотря на некоторые удобства модели для турбулентной вязкости [23] (меньшее число уравнений, чем в двухпараметрических моделях), в ряде случаев она не совсем точно отражает экспериментальные факты. Это обстоятельство побудило автора [23] перейти к двухпараметрической модели [28], включающей уравнения энергии турбулентности  $E$  (1.3) и турбулентной вязкости  $\nu_t$  (1.9), благодаря чему удалось моделировать течения, в которых  $\langle u'v' \rangle/E$  заметно отклоняется от равновесного значения.

Одно- и двухпараметрические модели [23—28] обобщены в [29] на течения сжимаемых сред путем введения дополнительных членов в уравнения для  $\nu_t$  и  $E$ .

Для расчетов неравновесных турбулентных потоков, в том числе и с зонами с отрицательными значениями турбулентных коэффициентов переноса, в [6, 7]

предложена трехпараметрическая модель, состоящая из уравнения (1.2) для напряжения сдвига  $\tau = -\langle u'v' \rangle$ , уравнения для энергии турбулентности  $E$  (1.3) и уравнения для завихренности  $\omega = E/L^2$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ D_\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] + \left( \frac{\tau}{E} \frac{\partial u}{\partial y} + c_4 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) \times \\ \times \omega - c\omega^{3/2} - 1,4c_1 v \frac{\omega - \omega_0}{L^2} \quad (1.10)$$

$$L = \sqrt{\frac{E}{\omega}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{2c_1} \frac{1}{E} \left( \frac{\partial E}{\partial y} \right)^2$$

Для выражения коэффициентов диффузии  $D_E$ ,  $D_\tau$  и  $D_\omega$  в [7] использованы формулы вида  $D_\varphi = \alpha_\varphi v + a_\varphi \sqrt{EL}$ , т. е. линейные аппроксимации функциями числа Рейнольдса турбулентности, каждая из которых задается одной или двумя константами. Подбор констант в трехпараметрической модели [7] осуществлялся путем сравнения результатов решения системы уравнений с экспериментальными данными в трех различных течениях: вырождение решеточной турбулентности, развитие турбулентности за решеткой с однородным сдвигом, развитое течение в трубе.

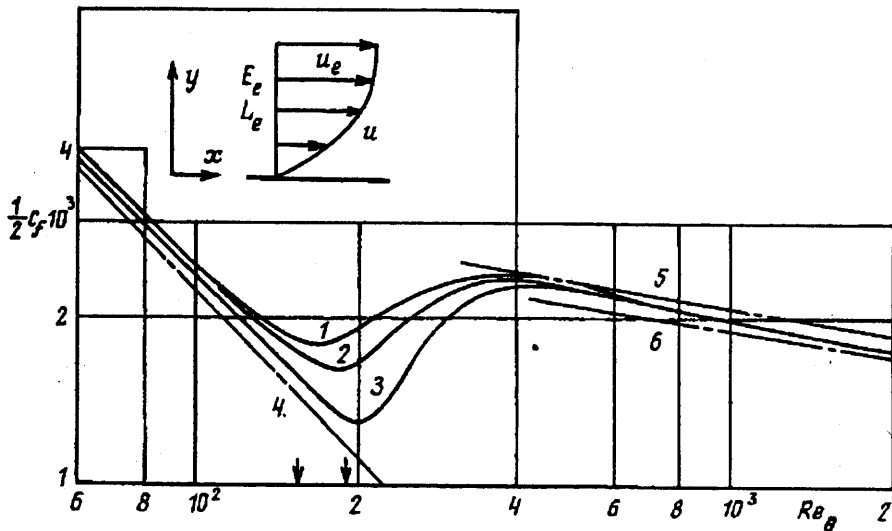
С использованием рассмотренных моделей для течений в каналах и пристеночных пограничных слоях в широком диапазоне чисел Рейнольдса, Маха, Прандтля и параметра МГД-взаимодействия при наличии теплообмена, вдува и отсоса, ускорения и замедления внешнего потока, при различных уровнях турбулентности внешнего потока, а также при сочетаниях перечисленных выше условий течения получены многочисленные результаты, наиболее интересные из которых представлены ниже.

## 2. ПЕРЕХОД К РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ И В КАНАЛАХ

### 2.1. Пограничный слой на пластине. Течение в пограничном слое на участке перехода к турбулентности относится к классу течений, в которых параметры, характеризующие пульсационное движение в заданном сечении, существенным образом зависят от предыстории.

Решение задачи о переходе к турбулентности при большой интенсивности внешних возмущений с использованием трехпараметрической модели [7] проводилось в следующей постановке [10]. Энергия турбулентности  $E$  в начальном сечении задавалась в виде интенсивности  $e = \sqrt{E}/u_e$ , начальный масштаб турбулентности  $L$  — в виде числа Рейнольдса  $Re_L = Lu_e/\nu$ , либо  $Re_L = \sqrt{E} L/\nu = e Re_L$  ( $u_e$  — скорость внешнего потока). Результаты расчетов получены для трех вариантов значений  $E$  и  $L$  во внешнем потоке (кривые 1—3 на фиг. 1). Для кривых 1, 3 масштаб турбулентности внешнего потока задан достаточно большим ( $Re_L = 12 \cdot 10^3$ ), так что на расчетной длине интенсивность ( $1 - e = 0,04$ ;  $3 - 0,03$ ) и масштаб турбулентности изменяются незначительно. Для кривой 2 масштаб был уменьшен в 7,5 раза. Число  $Re_L$  внешнего потока во всех вариантах на расчетной длине оставалось постоянным ( $1 - Re_L = 480$ ,  $2 - 60$ ,  $3 - 360$ ).

Зависимость местного коэффициента поверхностного трения  $c_f = 2\tau_w/u_e^2$  от числа Рейнольдса по толщине потери импульса  $Re_\theta = \theta u_e/\nu$ , приведена на фиг. 1. Несмотря на довольно высокий уровень внешних возмущений, величина  $c_f$  при малых  $Re_\theta$  близка к зависимости Блазиуса (линия 4) для ламинарного пограничного слоя. При увеличении  $Re_\theta$  выше некоторого значения, которое возрастает при уменьшении интенсивности турбулентности во внешнем потоке, расчет дает



Фиг. 1

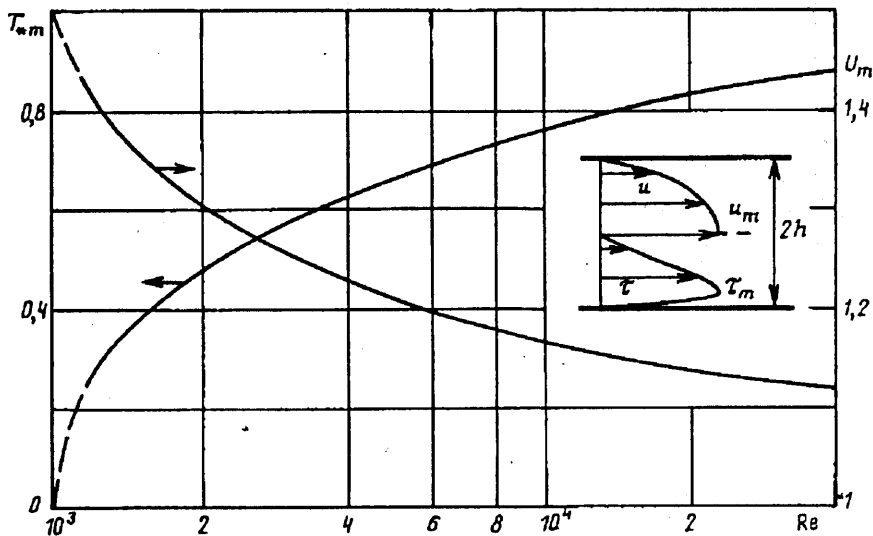
возрастание  $c_f$  и переход на зависимость  $c_f$  от  $Re_0$ , близкую к известным аппроксимационным зависимостям Фолкнера (линия 5) и Никурадзе (линия 6) для развитого турбулентного пограничного слоя.

За число Рейнольдса перехода  $Re^*$  принято число  $Re$ , соответствующее минимальному значению  $c_f$  на зависимости  $c_f(Re_0)$  либо  $c_f(Re_x)$ . Расчеты показывают, что  $Re^*$  возрастает при уменьшении интенсивности внешних возмущений и несколько уменьшается при уменьшении масштаба внешних возмущений. Для сопоставления результатов расчета с экспериментом [30] использована зависимость  $Re_0^*(e)$ , полученная в [10] на основе обработки результатов эксперимента [30]:  $1474/Re_0^* = 1 + 38,2Re_0^*e^2$ . Для использовавшихся в расчете значений  $e = 0,3$  и  $0,04$  это соотношение дает числа  $Re_0^*$ , равные 193 и 147 соответственно. Эти значения отмечены стрелками на оси абсцисс фиг. 1. Учитывая приближенность установления точки перехода в эксперименте, соответствие расчета и эксперимента следует признать хорошим.

Результаты расчетов позволяют проанализировать поведение на участке перехода энергии турбулентности  $E$ . В пограничном слое на участке с трением, близким к ламинарному,  $E$  возрастает. Возрастание  $E$  начинается одновременно с возрастанием  $c_f$ . Такое поведение энергии турбулентности отличается от поведения пульсаций скорости при переходе вследствие развития волн Толмина — Шлихтинга, когда рост пульсаций скорости происходит и на участке ламинарного трения. Это означает, что развитие мелкомасштабных возмущений в потоке с градиентом скорости, описываемое моделью [7], является механизмом перехода к турбулентности в пограничном слое при большом уровне внешних возмущений.

Численное исследование перехода к турбулентности в пограничном слое плоской пластины при различных значениях интенсивности и масштаба турбулентности набегающего потока с использованием двухпараметрической модели [19] проведено в [21]. Расчет при качественно правильном описании перехода к турбулентности дает протяженность зоны перехода меньшую, чем в эксперименте. Причиной этого, по-видимому, является использование в модели [19] равновесной аппроксимации для турбулентного трения, не учитывающей предыстории потока.

2.2. Течения в каналах. Расчеты развитого течения в круглой трубе и плоском канале, проведенные в [7] с использованием трехпараметрической модели тур-



Фиг. 2

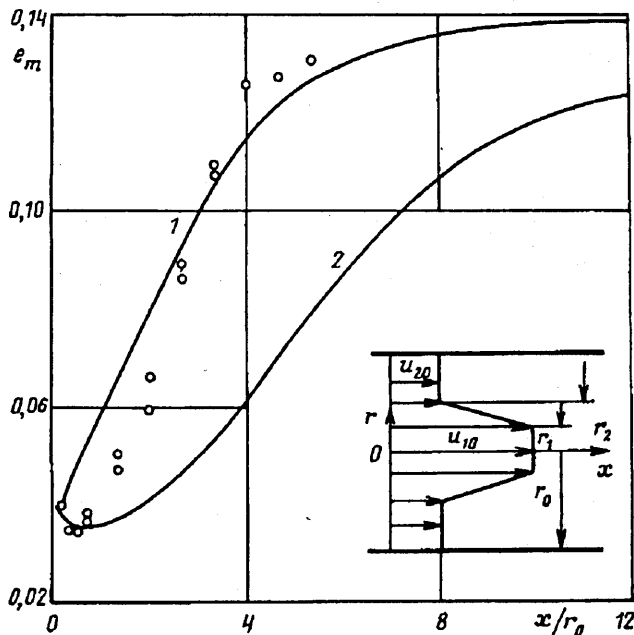
булентности, показали, что при уменьшении числа Рейнольдса профили средней скорости, энергии турбулентности  $E$  и напряжения сдвига  $\tau$  сильно изменяются:  $E$  и  $\tau$  уменьшаются, а профиль скорости приближается к ламинарному.

Отмеченная тенденция была специально исследована в [10], где проведены расчеты в области переходных (от ламинарного к турбулентному режиму течения) числах Рейнольдса. Результаты этих расчетов для плоского канала приведены на фиг. 2 в виде зависимости от числа Рейнольдса  $Re = 2h\langle u \rangle / \nu$  относительной скорости в центре канала  $U_m = u_m / \langle u \rangle$  и максимального значения турбулентного напряжения сдвига  $T_{*m} = \tau_m / u_*^2$ . Зависимость  $T_{*m}$  от  $Re$  показывает, что при уменьшении числа  $Re$  уменьшается также  $T_{*m}$  и при  $Re \approx 1000$  оно обращается в нуль. Аналогичным образом ведет себя зависимость максимального значения энергии турбулентности  $E_m / u_*^2$  от числа  $Re$ . Следует отметить, что расчеты выполнены только до  $Re = 1168$ . При меньших  $Re$  расчеты провести не удалось, так как в некоторых областях канала величины  $E$  и  $\tau$  становились слишком малыми. Поэтому число  $Re \approx 1000$ , при котором обращается в ноль  $T_{*m}$ , получено путем экстраполяции. Для круглой трубы также было определено число Рейнольдса, при котором  $\tau$  и  $E$  обращаются в нуль и которое также оказалось близким к 1000. Результаты расчетов показывают, что при уменьшении числа Рейнольдса расстояния от стенки, соответствующие значениям  $\tau_m$  и  $E_m$ , возрастают. Отношение максимальной (на оси) к среднерасходной скорости при приближении числа  $Re$  к 1000 возрастает и приближается к значению  $U_m = 1,5$  для плоского канала (фиг. 2) и к  $U_m = 2$  для осесимметричного, т. е. к значениям, соответствующим ламинарному течению.

Проведенные расчеты показали, что установившееся турбулентное течение при числах Рейнольдса, меньших 1000, невозможно. Эта величина близка к так называемому минимальному критическому числу Рейнольдса, т. е. к наименьшему числу Рейнольдса, при котором наблюдалось установившееся турбулентное течение.

Однопараметрическая модель [23] также использовалась для расчета течения в круглой трубе при различных числах Рейнольдса. Введение эмпирической функции  $\alpha(\nu_i/\nu)$  в член с порождением в уравнении переноса для турбулентной вязкости (1.9) в [27, 31] позволило получить хорошее совпадение с экспериментом.





Фиг. 3

Расчеты, результаты которых представлены в [12, 13], относятся к переходу к развитой турбулентности в каналах для течений с неоднородным профилем скорости и мелкомасштабной турбулентностью на входе. Особенностью таких течений является то, что в них на значительной длине интенсивность процессов турбулентного переноса определяется энергией и масштабом турбулентности, генерируемыми входным устройством, формирующим профиль скорости.

Одним из течений, рассмотренных в [12, 13], является течение с  $\Lambda$ -образным профилем скорости на входе (см. схему на фиг. 3), которое экспериментально исследовалось в [32]. Измеренная величина интенсивности турбулентности в зоне с градиентом скорости, где она является максимальной  $e_m \approx (u'/u)_m$ , вначале падает, а затем возрастает и достигает некоторого предельного значения (точки на фиг. 3). На оси струи интенсивность пульсаций скорости изменяется незначительно и в конце измерительного участка примерно равна начальному значению.

Расчетное исследование проводилось для течения, которое по параметрам близко к исследованному экспериментально:

$$Re = 2r_0 \frac{\langle u \rangle}{\nu} = 7 \cdot 10^4, \quad \frac{u_{20}}{u_{10}} = 0,4, \quad \frac{r_1}{r_0} = 0,167, \quad \frac{r_2}{r_0} = 0,333,$$

$$\frac{\sqrt{E_0}}{u} = 0,04, \quad \tau_0 = 0$$

Масштаб турбулентности на входе, ввиду того что он известен приближенно, варьировался. Результаты расчета изменения по длине максимального значения интенсивности турбулентности  $e_m = (\sqrt{E}/u)_m$  в слое сдвига для двух начальных значений масштаба представлены на фиг. 3 (линия 1 —  $L_0/r_0 = 0,025$ ; 2 —  $0,0125$ ). Расчет правильно отражает все особенности полученных в эксперименте результатов. Изменение ширины слоя со сдвигом в пределах начального участка относительно входной величины незначительно, что также согласуется с экспериментом.

### 3. ПРИСТЕНОЧНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

3.1. Пограничный слой со вдувом и отсосом на проницаемой поверхности. Для пограничного слоя несжимаемой жидкости с постоянной скоростью набегающего потока  $u_e$  на проницаемой поверхности в условиях однородного вдува (отсоса) отличие от пограничного слоя на непроницаемой поверхности будет состоять лишь в наличии потока жидкости со скоростью  $v_w$  через поверхность. Такая постановка позволяет выделить влияние только одного параметра  $F = v_w/u_e$  на характеристики пограничного слоя.

Расчеты по трехпараметрической модели турбулентности [7] были проведены [12, 13] в диапазоне изменения параметра вдува (отсоса)  $F = -0,01—0,1$ , что соответствует области исследования работы [33], с результатами которой проведено сравнение.

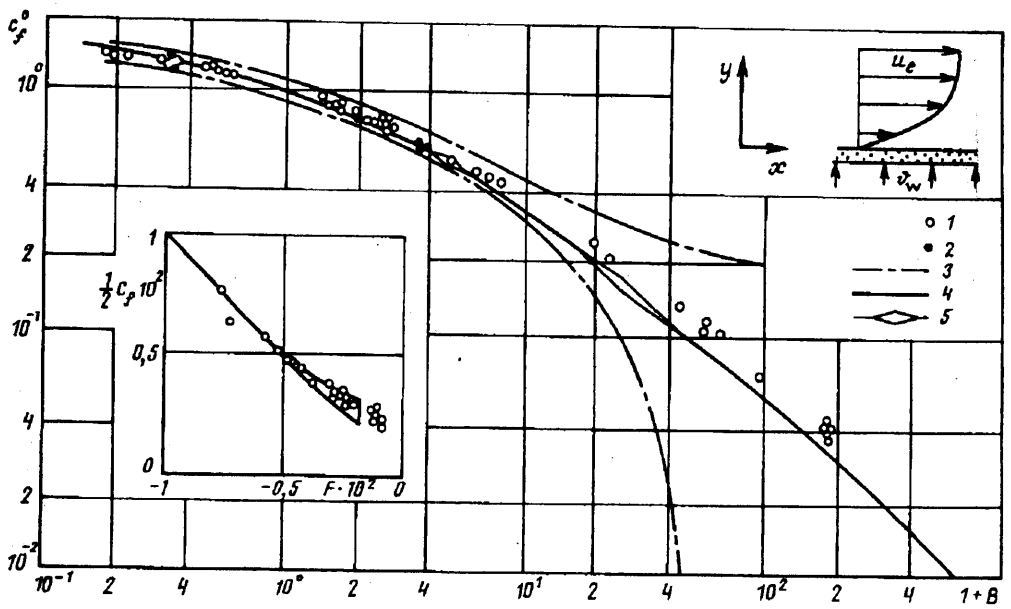
Расчеты показали, что по толщине пограничного слоя турбулентное напряжение сдвига  $\tau$  при вдуве возрастает по сравнению со случаем  $F = 0$ , причем максимум  $\tau$  удаляется от стенки. Отсос приводит к уменьшению  $\tau$ . Аналогично ведет себя и энергия турбулентности  $E$ . Масштаб турбулентности, как показали расчеты в диапазоне  $|F| = 0,002$ , слабо зависит как от вдува, что подтверждается экспериментом, так и от отсоса.

Результаты расчета профилей скорости в широком диапазоне параметра вдува (отсоса)  $F$  и числа Рейнольдса  $Re_0$  согласуются с экспериментом (см. в [12]) не только в качественном, но и в количественном отношении. С ростом параметра вдува  $F$  профили скорости становятся менее заполненными по сравнению со случаем  $F = 0$ , приближаясь по форме к предотрывным профилям скорости. При отсосе деформация профиля скорости происходит немонотонно. Так, при небольших значениях параметра отсоса  $|F| < 0,005$  профили скорости как в расчете, так и в эксперименте становятся более заполненными, чем в случае непроницаемой пластины. При дальнейшем увеличении параметра отсоса (до  $|F| = 0,01$ ) профили скорости становятся более вытянутыми, что является признаком ламинаризации пограничного слоя, о чем свидетельствует также существенное уменьшение  $\tau$  и  $E$ .

Результаты расчета местного коэффициента трения  $c_f$ , отнесенного к соответствующей величине  $c_{f0}$  при  $F = 0$  и при том же числе Рейнольдса  $Re_0$ ,  $c_f^0$  в зависимости от параметра вдува  $B = 2F/c_f$ , представлены на фиг. 4 (кривая 4). Там же нанесены экспериментальные данные [33] (точки 1) с указанием погрешностей измерений (кривые 3). В расчетах получено некоторое расслоение зависимости  $c_f^0(B)$  по числу Рейнольдса  $Re_0$ , не превышающее, впрочем, толщину кривой 4 на фиг. 4. Расчетные и экспериментальные данные для отсоса пограничного слоя представлены отдельно на фиг. 4 в виде зависимости  $c_f$  от параметра вдува  $F = v_w/u_e$ . Как видно, при  $|F| > 0,004$  как в эксперименте, так и в расчете связь между коэффициентом трения и параметром отсоса имеет вид  $c_f/2 = -|F|$ . При  $|F| < 0,004$  это соотношение нарушается, что приводит к большому разбросу экспериментальных данных и расслоению расчетных кривых, построенных в координатах  $c_f, F$ .

3.2. Теплообмен в пограничном слое. Двухпараметрическая модель [19] была использована в [22] для расчета теплообмена в пограничном слое на пластине. Для пограничного слоя на непроницаемой пластине в потоке жидкости с различными числами Прандтля ( $Pr = 0,2—1000$ ) получено хорошее совпадение с экспериментом (см. в [22]) по числу Нуссельта и профилям температуры. При больших числах Прандтля основное изменение температуры происходит в вязком подслое. Показано, что для жидкостей с большим числом  $Pr$ , имеющих сильную зависимость теплофизических свойств от температуры, учет ее улучшает согласование расчета и эксперимента.

Результаты расчета теплообмена на проницаемой пластине при вдуве воздуха в пограничный слой также свидетельствуют о хорошем согласии с экспериментом,



Фиг. 4

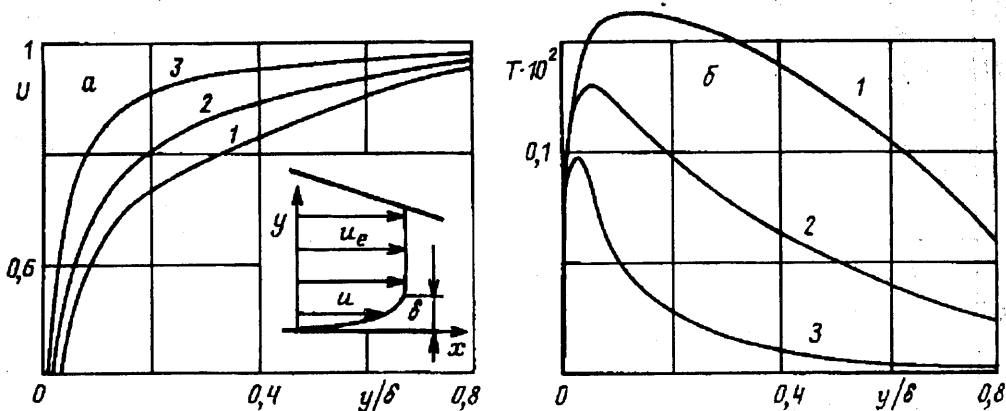
что позволяет рекомендовать эту модель для расчета пограничного слоя в исследованном диапазоне чисел Прандтля и параметра вдува.

3.3. Пограничный слой на пластине с ускорением и торможением потока. Продольный градиент давления является параметром, который оказывает существенное влияние на турбулентный пограничный слой, приводя в пределе в случае отрицательного градиента давления к ламинаризации, а в случае положительного — к отрыву пограничного слоя. Расчет пограничного слоя на пластине с использованием трехпараметрической модели [7], результаты которого представлены в [12, 13], проводился с постоянными значениями параметров вдува  $F$  и градиента давления

$$k = - \frac{\nu}{\rho u_e} \frac{dp}{dx} = \frac{\nu}{u_e^2} \frac{du_e}{dx}$$

Пограничный слой с отрицательным градиентом давления ( $k > 0$ ) исследовался как в случае непроницаемой пластины ( $F = 0$ ), так и для проницаемой пластины со вдувом ( $F > 0$ ) и отсосом ( $F < 0$ ). Для непроницаемой пластины расчеты проведены для трех значений параметра ускорения  $k = (0,57; 1,45; 4,0) \cdot 10^{-6}$ . При  $k = 4 \cdot 10^{-6}$  число  $Re_0$  заметно убывает, приближаясь к критическому значению  $Re_0 \approx 200$ , что свидетельствует о тенденции к ламинаризации пограничного слоя при сильном ускорении потока.

Анализ профилей скорости  $U = u/u_0$  при  $Re_0 \approx 1650$ , построенных как в физических (фиг. 5; а), так и в универсальных координатах, показал, что для каждого из трех значений параметра  $k$  (1 —  $k = 0$ , 2 —  $0,57 \cdot 10^{-6}$ , 3 —  $1,45 \cdot 10^{-6}$ ) достаточно быстро устанавливается распределение скоростей, не зависящее от расстояния. В непосредственной близости от стенки (в вязком подслое и в переходной области) градиент давления не влияет на профиль скорости. Влияние его заметно начинает сказываться в логарифмической области, где профили скорости с ростом параметра  $k$  все больше отклоняются вверх от универсального закона. Наиболее существенно влияние градиента давления на внешнюю часть пограничного слоя — так называемую область следа. Профиль скорости в этой области утрачивает форму, характерную для нее в случае



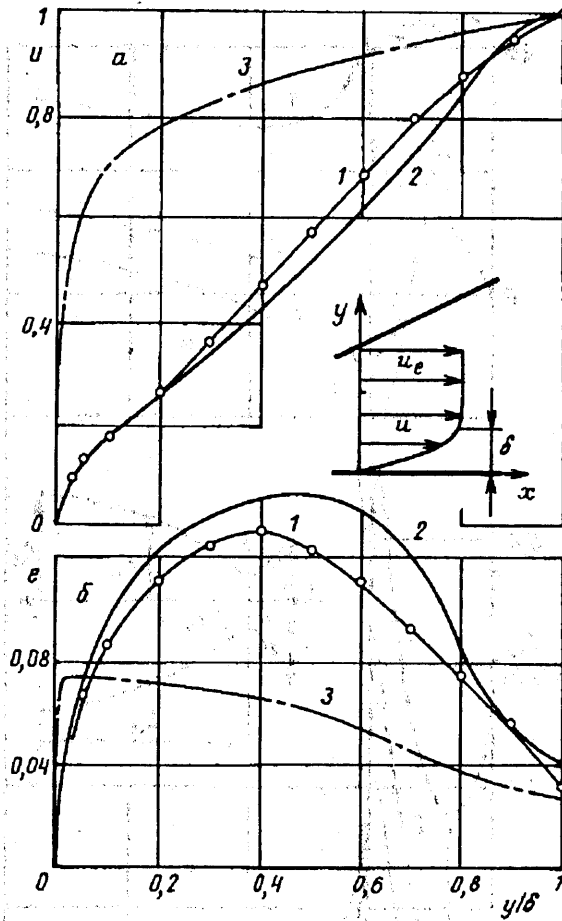
Фиг. 5

безградиентного течения. Это является результатом снижения энергии турбулентности и напряжения трения  $T = \tau/u_*^2$  во внешней части пограничного слоя с ростом параметра  $k$  (фиг. 5, б) и при достаточно большом отрицательном градиенте давления возможна ламинаризация турбулентного пограничного слоя.

В случае проницаемой пластины расчеты были проведены при значениях параметра  $F = 0,004$  и  $-0,002$  для  $k = (0,57; 1,45) \cdot 10^{-6}$ , что соответствует значениям  $F$  и  $k$  работы [34]. Характер изменения профилей скорости и турбулентных величин ( $E, \tau$ ) в пограничном слое с отрицательным градиентом давления при наличии вдува и отсоса такой же, как и в случае непроницаемой пластины. Результаты расчета коэффициента трения  $c_f$ , отнесенного к соответствующей величине  $c_{f0}$  при  $F = 0$  для одних и тех же значений  $Re_0$  и  $k$ , в зависимости от параметра вдува  $B = 2F/c_f$ , представлены на фиг. 4 (кривые 5). Там же нанесены экспериментальные данные [34] (точки 2). При наличии градиента давления результаты расчета, несмотря на некоторый разброс, так же как и экспериментальные данные, достаточно близки к зависимости, соответствующей безградиентному течению (кривая 4), что свидетельствует об универсальности полученной зависимости для относительного коэффициента трения.

Пограничный слой с положительным градиентом давления ( $k < 0$ ) исследовался для четырех значений параметра градиента давления  $-k = (0,57; 1; 1,45; 2) \cdot 10^{-6}$ . Для трех последних значений параметра  $k$  на некоторой длине величина  $du/dy$  на стенке становится равной нулю. Это сечение в дальнейшем будем называть сечением счетного отрыва. В пределах расчетной длины для указанных значений параметра  $k$  наступал счетный отрыв пограничного слоя, соответствующий возникновению области отрицательных значений скорости у стенки.

В предотрывных расчетных сечениях и в эксперименте [35] значение произведения  $kRe_0 \approx -0,005$ . Это согласуется с условием возникновения отрыва при течении в пограничном слое с положительным градиентом давления, полученным в [36] в виде неравенства  $-kRe_0 \geq 0,005$ , которое следует рассматривать как необходимое условие безотрывного обтекания, неприменимое в случае возникновения отрывного течения. В предотрывной области профиль скорости становится менее заполненным, приближаясь к линейному, коэффициент трения уменьшается, а энергия турбулентности и напряжение сдвига существенно возрастают по сравнению со случаем безграничного течения. Это иллюстрируется на фиг. 6, где представлены расчетные профили скорости  $U = u/u_e$  (фиг. 6, а) и энергии турбулентности  $e = \sqrt{E}/u_e$  (фиг. 6, б) в предотрывных сечениях для трех значений параметра  $k$ , удовлетворяющих условию  $kRe_0 \approx -0,005$ . Эти результаты достаточно хорошо укладываются на зависимость (линии 2), близкую к эксперимен-



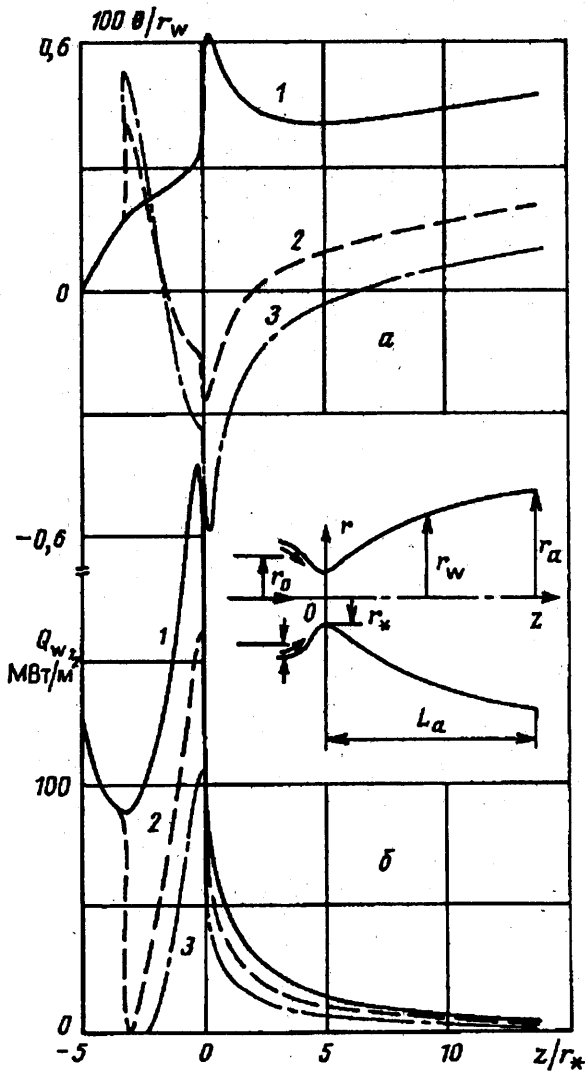
Фиг. 6

тальным данным [35] (точки 1) и существенно отличающиеся от случая безградиентного течения (линии 3).

3.4. Сверхзвуковой пограничный слой в сопле и на пластине с тангенциальным вдувом. Обзор методов расчета турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке по состоянию до 1978 г. представлен в [37]. Наиболее распространенными в инженерной практике являются интегральные методы, основанные на использовании интегральных соотношений импульса и энергии, замкнутых алгебраическими зависимостями для коэффициента трения, формпараметра и числа Стантона. В классе дифференциальных методов расчета сверхзвукового пограничного слоя отметим работу [38], где использовано уравнение переноса для турбулентной вязкости.

Указанные работы относятся к случаю так называемого внешнего охлаждения стенок. Для снятия больших тепловых потоков, например в соплах ЖРД, используется завесное охлаждение стенок путем подачи охладителя через тангенциальные щели. Дифференциальные модели турбулентности также применялись при расчете плоских и осесимметричных пограничных слоев с завесой в сверхзвуковом потоке.

В [24] экспериментально определенные поля скоростей и концентрации смеси гелия в воздушной сверхзвуковой плоской струе ( $\epsilon$  числом Маха  $M_\epsilon = 2,18$ ), распространяющейся вдоль поверхности в сверхзвуковом спутном воздушном



Фиг. 7

поток ( $M_2 = 2,7$  и  $3,8$ ), использованы для апробирования однопараметрической модели [23], обобщенной на случай течения сжимаемых сред.

Основной особенностью сверхзвуковой пристеночной струи, распространяющейся в сверхзвуковом спутном потоке, является перестройка профилей скорости и концентрации по длине. Хорошее согласование расчетных и опытных данных показывает, что однопараметрическая модель [23] может с успехом применяться для описания существенно неавтономных турбулентных сжимаемых течений.

В [26] численное исследование проведено с учетом различных факторов: числа Маха вдува  $M_2$ , рода вдуваемого газа и интенсивности изменения градиента давления. Показано, что увеличение числа  $M_2$  приводит к повышению устойчивости течения к отрыву. Однако значительное увеличение числа  $M_2$  может привести к возникновению «внутреннего отрыва», т. е. обратного течения в следе за кромкой сопла вдува.

В [14, 15] на основе трехпараметрической модели [7], обобщенной в [8] на течение с теплообменом, разработана методика расчета пограничного слоя в

сопле с завесным охлаждением и проведено численное исследование пограничного слоя в сопле ЖРД с газовой завесой. Параметры сопла (см. схему на фиг. 7): число Рейнольдса, определенное по параметрам потока на входе, составляло  $0,84 \cdot 10^7$ , длина сверхзвуковой части  $L_0/r_* = 29$ , радиус выходного сечения  $r_e/r_* = 11$ , температура стенки, отнесенная к температуре торможения  $T_0$ ,  $T_w/T_0 = 0,2$ . В расчетах варьировался относительный расход  $g$ , горючего в завесу, который составлял 0; 0,005; 0,01 (кривые 1, 2, 3 на фиг. 7) суммарного расхода топлива через сопло. Сечение ввода завесы располагалось на входе в коническую дозвуковую часть сопла.

Полученные результаты расчета изменения по длине сопла толщины потери импульса  $\theta$  (фиг. 7, а) позволили установить следующее. В закритической части сопла с ростом расхода в завесу  $g$ , величина  $\theta$  уменьшается, что свидетельствует о снижении трения в пограничном слое при вводе завесы. В области критического сечения величина  $\theta$  принимает отрицательные значения. Это обусловлено наличием максимума в профиле скорости пограничного слоя, который появляется при ускорении газа завесы в сопле, что в соответствии с выражением для  $\theta$  приводит к отрицательному значению толщины потери импульса.

Величина формпараметра  $H = \delta^*/\theta$  в случае завесы, где  $\theta$  обращается в ноль, терпит разрыв (см. фиг. 7, а). Это обстоятельство приводит к трудностям при попытках использования интегрального метода расчета, в котором задается зависимость для  $H$ .

Изменение по длине сопла теплового потока в стенку  $Q_w = -(\lambda \partial T / \partial y)_w$  представлено на фиг. 7, б. Величина  $Q_w$  резко снижается после ввода завесы и в критическом сечении сопла при расходе в завесу  $g_e = 0,005$  (линия 2) уменьшается на 30%, а при  $g_e = 0,01$  (линия 3) — на 50% по сравнению со случаем отсутствия завесы (линия 1).

#### 4. ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ

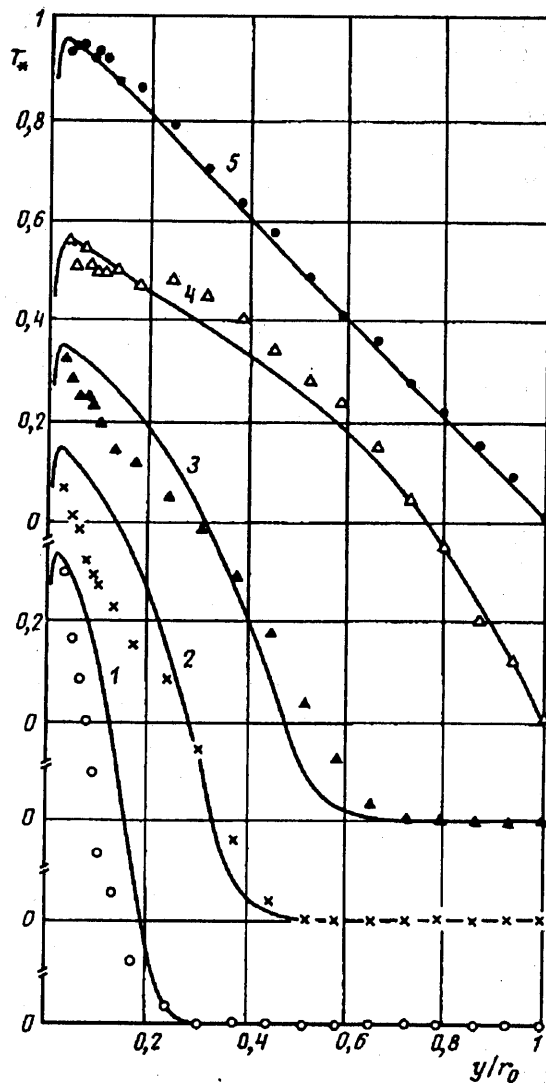
**4.1. Развитие течения в круглой трубе.** Характер развития течения в трубе существенно зависит от условий на входе, что открывает широкие возможности управления течением при помощи входных устройств, формирующих потоки с заданными условиями.

Течение с однородным профилем скорости на входе является наиболее исследованным как экспериментально, так и теоретически. Основной особенностью результатов эксперимента, полученных в ряде работ, является немонотонное поведение характеристик течения по длине трубы до выхода на развитое течение. Анализ обширного экспериментального материала (см. обзор [39]) подтверждает высказанное выше утверждение о существенной зависимости характера развития течения от условий на входе, однако систематического исследования в этом направлении проведено не было.

Численное исследование развития течения на начальном участке трубы с использованием трехпараметрической модели [7] выполнено в [12, 13]. Для течения с однородным профилем скорости на входе  $u = u_0 = \text{const}$  варьируемыми параметрами были: число Рейнольдса  $Re = 2r_0 \langle u_0 \rangle / \nu$  ( $2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^6$ ), интенсивность  $\sqrt{E_0}/u_0$  (0,01—0,1) и масштаб  $L_0/r_0$  (0,1—0,5) турбулентности.

С ростом числа Рейнольдса и уровня начальных возмущений (энергии и масштаба турбулентности) в расчете, как и в эксперименте, немонотонный характер изменения скорости сглаживается, приближаясь к монотонной зависимости. Расчетная длина входного участка увеличивается с ростом числа Рейнольдса и уменьшается с ростом уровня начальных возмущений, что также находится в согласии с экспериментом [40].

Изменение характеристик турбулентности по длине входного участка также является немонотонным. На фиг. 8 представлены профили турбулентного на-



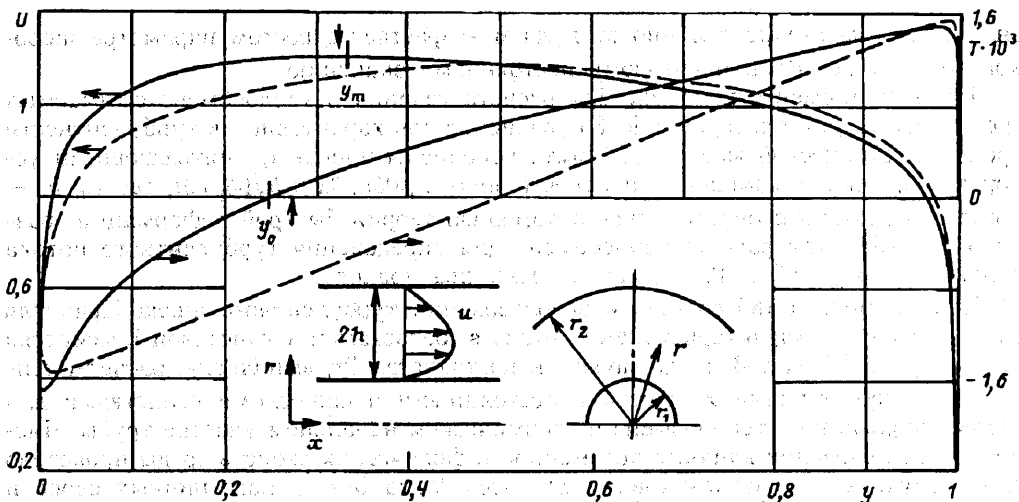
Фиг. 8

пряжения сдвига  $T_* = \tau/u_*^2$  в ряде сечений по длине трубы радиуса  $r_0$ : сравнение расчета (кривые,  $Re = 3 \cdot 10^5$ ,  $\sqrt{E_0}/u_0 = 0,014$ ;  $L_0/r_0 = 0,1$ ) с экспериментом [40] (точки). Значение  $x/2r_0$  в эксперименте (и расчете) соответственно: 1 — 4(8); 2 — 12(16); 3 — 21(24); 4 — 46(48); 5 — 95(100). Согласно расчету с экспериментом вполне удовлетворительное. Аналогичные результаты получены для энергии турбулентности. Следует отметить, что длина входного участка, определенная по характеристикам турбулентности, примерно вдвое превосходит длину начального участка по скорости, достигая 100—120 калибров трубы.

Численное исследование развития течения на начальном участке круглой трубы с использованием однопараметрической модели [23] выполнено в [41]. Полученные результаты согласуются с экспериментом [40] по характеру немонотонного изменения скорости течения на начальном участке, что не описывается алгебраическими моделями турбулентности.

4.2. Несимметричные течения в каналах. В качестве иллюстрации возможностей трехпараметрической модели [7] в [12, 13] рассмотрено развитое течение





Фиг. 9

в несимметричных каналах, в которых в отличие от симметричных каналов имеет место несовпадение координат с нулевыми значениями производной средней скорости  $du/dy$  и турбулентного напряжения сдвига  $\tau = -\langle u'v' \rangle$ . Это обстоятельство при расчетах по моделям турбулентности, использующим гипотезу Буссинеска  $\tau = \nu_t du/dy$ , может привести к появлению областей с «отрицательной» турбулентной вязкостью  $\nu_t$ .

Результаты расчета течения в кольцевом канале (сплошные линии на фиг. 9) с параметрами, соответствующими эксперименту ( $r_1/r_2 = 0,77$ ,  $Re = 2h\langle u \rangle/\nu = 2,5 \cdot 10^5$ ), описанному в [42], показали, что профили скорости  $U = u/\langle u \rangle$  и напряжения турбулентного сдвига,  $T = \tau/\langle u \rangle^2$ , а также энергии и масштаба турбулентности являются существенно несимметричными и заметно отличаются от характеристик течения в плоском канале (штриховые линии на фиг. 9 при том же числе Рейнольдса). Значения координат  $y = (r - r_1)/(r_2 - r_1)$ , соответствующие нулевому значению напряжения сдвига ( $y_0$ ) и максимальному значению средней скорости ( $y_m$ ), близки к полученным в эксперименте (стрелки на фиг. 9) и не совпадают между собой.

Течение в плоском канале с проницаемыми стенками, через которые нормально к основному потоку прокачивается жидкость, также относится к классу несимметричных течений. Результаты расчета подтвердили отсутствие симметрии в распределении профилей скорости и характеристик турбулентности и, как следствие этого, наличие зоны «отрицательной» вязкости.

**4.3. Течение в канале с шероховатой поверхностью.** В [25] показано, что однопараметрическая модель [23] с уравнением переноса для турбулентной вязкости  $\nu_t$  с успехом может быть использована для расчета течений в каналах с шероховатой поверхностью. Особенностью постановки задачи в этом случае является задание граничного условия для  $\nu_t$  на шероховатой стенке. На основании гипотезы о постоянстве  $\nu_t$  по высоте между элементами шероховатости реальная стенка заменяется эквивалентной гладкой поверхностью, на которой полагается  $d\nu_t/dy = 0$ .

Результаты расчета локальных и интегральных характеристик течения в круглой трубе правильно отражают эффекты влияния шероховатости: вытягивание профиля скорости с ростом параметра шероховатости, выход на постоянное значение коэффициента сопротивления с ростом числа Рейнольдса. Расчетное

значение  $\nu$ , на стенке отлично от нуля и возрастает с ростом параметра шероховатости, стремясь к некоторому постоянному значению.

4.4. Теплообмен в каналах. Для расчета течения и теплообмена сжимаемых сред с переменной плотностью в [8] уравнения для характеристик турбулентности трехпараметрической модели [7] были дополнены членами, учитывающими искривление потока и изменение плотности вида  $a_\varphi \Phi \partial u / \partial x$  и  $b_\varphi \Phi \partial \rho / \partial t$ , где  $a_\varphi$ ,  $b_\varphi$  — константы, которые определялись с помощью теории быстрой деформации, развитой в [18]. При расчете теплообмена для определения турбулентного потока тепла  $q_t = \rho c_p \langle v' T' \rangle$  в [8, 9] рассмотрены два подхода.

Первый подход [8] состоял в использовании турбулентного числа Прандтля  $Pr_t$  для связи  $q_t$  с характеристиками потока в соответствии с гипотезой Буссинеска  $q_t = -c_p (\nu_t / Pr_t) \partial T / \partial y$ . В предположении постоянства  $Pr_t$  выполнены расчеты теплообмена при течении жидкости с постоянными физическими свойствами для стабилизированного теплообмена на термическом начальном участке трубы. Численное исследование влияния переменности физических свойств среды проведено для дозвуковых и сверхзвуковых (до чисел Маха  $M = 4$ ) пограничных слоев и при течении газа в трубе с учетом теплообмена для значений температурного фактора  $T_w / \langle T \rangle = 0,1 - 3$ . Проведенное сравнение результатов расчета с известными экспериментальными данными в широком диапазоне чисел  $Re$  позволило установить диапазон чисел  $Pr_t = 10^{-3} - 10$ , в котором применима предложенная модель.

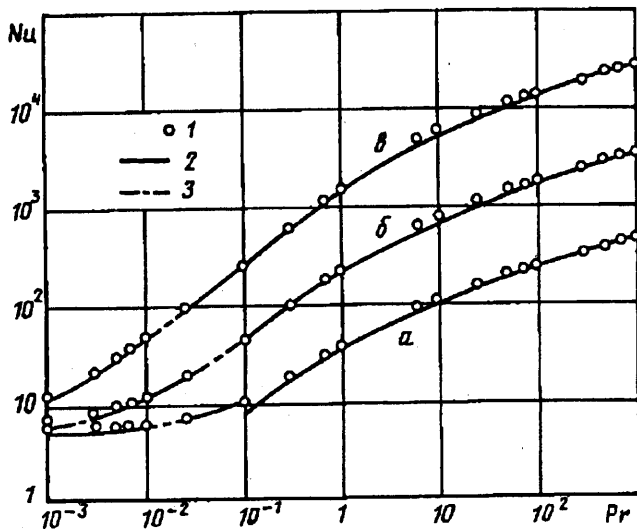
Во втором подходе [9] для определения  $q_t$  записывалось уравнение переноса, которое позволяло отказаться от использования предположения о постоянстве  $Pr_t$ . Константы в уравнении для  $q_t$  определялись из анализа экспериментальных и аналитических результатов для течения за решеткой с постоянным сдвигом скорости и температуры и развитого теплообмена в трубе, а также посредством численной оптимизации. Использование уравнения для турбулентного потока тепла совместно с трехпараметрической моделью турбулентности в расчетах теплообмена при течении в трубе позволило расширить диапазон чисел  $Pr_t$  до  $10^3$ . На фиг. 10 представлено сравнение результатов расчета чисел Нуссельта  $Nu(Pr, Re)$  (точки 1) с зависимостями, аппроксимирующими экспериментальные данные в диапазоне чисел Прандтля  $10^{-1} < Pr \leq 10^3$  (линии 2) и  $10^{-3} < Pr \leq 10^{-1}$  (линии 3), для трех значений числа Рейнольдса:  $a - Re = 10^4$ ,  $b - 10^5$ ,  $b - 10^6$ . Расчеты показали также, что предположение о постоянстве  $Pr_t$  хорошо выполняется в большей части трубы и нарушается в пристеночной области и вблизи оси трубы.

С использованием однопараметрической модели [23] в [43] выполнено численное исследование турбулентного течения воздуха в круглой трубе при высоких температурах и течения с теплообменом на начальном участке круглой трубы при различных значениях температурного фактора, а также при наличии шероховатости.

Полученные в [8, 9, 43] результаты хорошо согласуются с экспериментом, что подтверждает эффективность использования дифференциальных моделей [7, 23] для расчета неавтономных течений при наличии теплообмена.

4.5. Течение электропроводных сред в магнитном поле. Эффект воздействия магнитного поля на турбулентность в проводящей жидкости в наиболее «чистом» виде проявляется в случае течения в продольном (относительно направления потока) поле, когда среднее течение не взаимодействует с магнитным полем.

Одними из первых теоретических работ по исследованию течения в продольном магнитном поле были [18, 44, 45], основанные на гипотезе локального равновесия турбулентности. В упомянутых работах используются уравнения для энергии пульсаций по различным осям, содержащие члены с генерацией, диссипацией и обменом энергии между компонентами, приводящими в случае течения в магнитном поле к анизотропии турбулентности. Полученные результаты расчетов по вырождению однородной турбулентности и неоднородным течениям в погра-



Фиг. 10

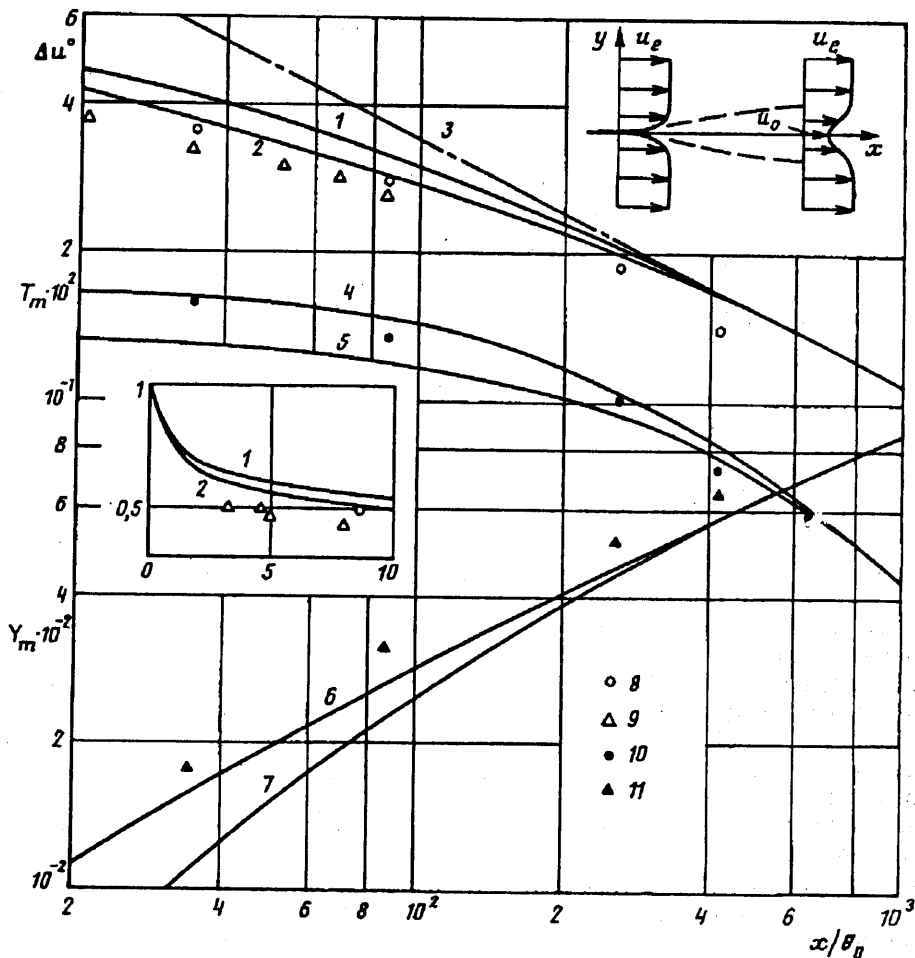
нических слоях и каналах находятся в хорошем соответствии с имеющимися экспериментальными данными.

Для случаев, когда приближение локального равновесия турбулентности несправедливо, следует использовать уравнения переноса для характеристик турбулентности. Одной из первых работ этого направления была [31], в которой однопараметрическая модель [23] обобщена на случай течения проводящих сред в магнитном поле. В упомянутой работе в уравнение для турбулентной вязкости вводился дополнительный член с джоулевой диссипацией, содержащей функцию, обеспечивающую хорошее совпадение с экспериментом по течению и теплообмену в трубе в продольном магнитном поле.

В [11] трехпараметрическая модель [7] также обобщена на случай течения проводящей жидкости в магнитном поле. В уравнения переноса для характеристик турбулентности введены дополнительные члены, учитывающие джоулеву диссипацию и анизотропию турбулентности в магнитном поле, вид и структура которых определены из соображений размерности и анализа уравнений переноса для компонент энергии турбулентности. Константа, входящая в модель, определена из условия совпадения результатов расчета с экспериментальными данными по коэффициенту сопротивления для развитого течения в трубе. Полученная при этом зависимость нижнего критического числа Рейнольдса от числа Гартмана соответствует эксперименту.

## 5. СТРУИ И СЛЕДЫ

Расчетам с помощью рассмотренных в настоящем обзоре моделей свободных турбулентных течений посвящено значительное количество работ. Однако на свободные турбулентные течения оказывают большое влияние факторы, не учитываемые в рассмотренных моделях, а именно развитие в таких течениях крупномасштабных пульсационных движений, связанных с неустойчивостью этих течений к длинноволновым возмущениям. Следствием этого является чувствительность свободных течений к условиям на входе, например, к пульсационным движениям выделенных частот, вызываемых акустическими колебаниями. Это приводит к большому разбросу экспериментальных данных для характеристик свободных течений. Поэтому сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными возможно для свободных течений, развитие которых определяется



Фиг. 11

эволюцией турбулентности во входном сечении, а пульсационные движения выделенных частот не оказывают существенного влияния на развитие этих течений. К таким течениям относится, например, начальный участок следа за тонкой пластиной, на которой имеются турбулентные пограничные слои [13, 23].

Схема течения изображена на фиг. 11. На плоской пластине, помещенной в набегающий однородный поток жидкости со скоростью  $u_e$ , образуется пограничный слой. Этот слой развивается вниз по потоку до того места, где пластина оканчивается и начинается свободное течение в следе. Поместим начало координат на задней кромке пластины (в расчете — нулевой толщины, в эксперименте — минимально возможной). В качестве начальных условий в расчете следа использованы распределения, полученные в расчете пограничного слоя на пластине

$$u = u(y), \quad E = E(y), \quad \omega = \omega(y), \quad \tau = \tau(y), \quad p = \text{const} \quad (x = 0)$$

В качестве характерных масштабов задачи приняты скорость набегающего потока  $u_e$  и толщина потери импульса на задней кромке пластины

$$\theta_0 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \frac{u}{u_e} dy$$

которая не меняется вниз по потоку. Это следует непосредственно из уравнений движения и служит хорошим способом контроля правильности расчетов.

Расчеты [13], результаты которых представлены на фиг. 11, проведены для чисел Рейнольдса, определенных по начальной толщине потери импульса  $Re_{\theta_0} = 1400$  (кривые 1, 4, 6) и 6100 (кривые 2, 5, 7). Этим вариантам соответствуют условия в набегающем потоке для характеристик турбулентности:  $\sqrt{E}/u_* = 0,029-0,26$  и  $0,01-0,006$ ;  $Re_* = 1100$  и  $110$ ;  $\tau = 0$ . Первому варианту соответствуют более высокий уровень интенсивности турбулентности и большой масштаб. Сравнение расчетных профилей скорости с экспериментом [46, 47] показывает их хорошее соответствие. Расчетные зависимости для дефекта скорости  $\Delta u^0 = (u_* - u_0)/u_*$  (кривые 1, 2 на фиг. 11) близки к экспериментальным данным [46] (точки 8), [47] (точки 9), а при больших  $x/\theta_0$  выходят на автомодельную зависимость  $\Delta u^0 \sim (x/\theta_0)^{-1/2}$  (линия 3). Изменение по длине таких характеристик потока, как толщина вытеснения, скорость на оси следа и полуширина, также хорошо согласуется с экспериментом [45, 46].

На фиг. 11 представлены также расчетные зависимости максимального значения напряжения сдвига  $T_m = \tau_m/u_*^2$  (кривые 4, 5) и соответствующие ему значения координаты  $Y_m = y_m/\theta_0$  (кривые 6, 7), которые удовлетворительно согласуются с экспериментом [45] (точки 10, 11).

В последние годы были опубликованы работы по исследованию поведения закрученных следов на основе двухпараметрической модели турбулентности [48] и расчету переноса импульса и тепла в турбулентных газодисперсных струйных течениях [49].

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в обзоре дифференциальные модели, в которых для описания характеристик турбулентности используются уравнения переноса, представляют собой целый спектр современных неравновесных моделей турбулентности от однопараметрических [16, 18, 23] до двухпараметрических [18, 19, 28] и трехпараметрической моделей [6, 7]. Опыт применения этих и более сложных моделей показал, что увеличение числа дифференциальных уравнений (например, использование уравнений для третьих моментов), по-видимому, не приведет к увеличению точности и универсальности моделей турбулентности, поскольку результаты расчетов по рассмотренным в обзоре моделям совпадают с экспериментальными данными в пределах их разброса.

Для отдельных течений удовлетворительного совпадения с экспериментальными данными удается добиться при использовании однопараметрических и двухпараметрических моделей. Однако согласия результатов расчетов с экспериментом во всех типах пристеночных турбулентных пограничных слоев и течений в каналах при неизменном наборе констант, определенных из анализа эталонных течений, к настоящему времени удалось достигнуть только для трехпараметрической модели [6, 7], использующей уравнения переноса для  $E$ ,  $\tau$  и  $E/L^2$ .

При разработке упомянутых моделей турбулентности проанализированы основные идеи конструирования моментных дифференциальных уравнений и с использованием их проведены широкие исследования самых различных сложных турбулентных течений, которые показали хорошую точность и универсальность моделей и позволили обнаружить в исследованных течениях ряд новых интересных особенностей и эффектов.

Рассмотренные дифференциальные модели турбулентности были впервые использованы для расчета перехода к развитой турбулентности в пограничном слое и каналах при большом уровне внешних возмущений. Они позволили правильно описать характер перехода и с приемлемой для практики точностью получить

количественную информацию как по интегральным, так и по локальным характеристикам перехода.

Для течений в пограничных слоях с разнообразными граничными условиями получены экспериментально подтвержденные результаты расчетов в широком диапазоне параметров, вплоть до экстремальных (отсос и ускорение потока — до ламинаризации, торможение — до отрыва пограничного слоя), что имеет важное значение для практики и свидетельствует об универсальности разработанных моделей турбулентности.

При расчете течений в каналах впервые описаны такие эффекты, как монотонность развития характеристик течения на входном участке трубы, несовпадение нулевых значений турбулентного трения и градиента скорости в несимметричном течении в кольцевом канале. Обобщение моделей на случай течений сжимаемых и электропроводных сред с теплообменом также подтвердило их возможности описания процессов в широком диапазоне чисел Прандтля, температурного фактора, параметров шероховатости и МГД-взаимодействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16364).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Computation of Turbulent Boundary Layers. AFOSR — IFP — Stanford Conf. Stanford, 1968. Proc. Stanford, 1969. V. 1. 590 p. V. 2. 519 p.
2. Kline S. J., Cantwell B. J., Lilley G. M. (Eds.). 1980-81 AFOSR — HTTM — Stanford Conf. on Complex Turbulent Flows. Mech. Eng. Dept. Stanford Univ. 1981.
3. Bradshaw P. Turbulence: the chief outstanding difficulty of our subject//The third Stewartson lecture Sympos. on Numer. and Phys. Aspects Aerodynam. Flows. Long Beach, CA. 1992.
4. Bradshaw P. Final Report on AFOSR 90 — 0154 «Collaborative Testing of Turbulence Models»//Mech. Eng. Dept. Stanford Univ. 1992.
5. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. № 1—2. С. 56—58.
6. Павельев А. А. Развитие решеточной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С. 38—47.
7. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13—25.
8. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40—52.
9. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 42—50.
10. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Исследование перехода к турбулентности в пограничном слое при большой интенсивности внешних возмущений с помощью трехпараметрической модели//Проблемы современной механики. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 127—138.
11. Луцки В. Г., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет течения в продольном магнитном поле//Магнит. гидродинам. 1987. № 3. С. 30—38.
12. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Управление турбулентными пограничными слоями: результаты экспериментов и расчетные модели//Механика и научно-технический прогресс. Т. 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. С. 67—89.
13. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Уравнение переноса для характеристик турбулентности: модели и результаты расчетов//Итоги науки и техники. ВИНТИ. МЖГ. 1988. Т. 22. С. 3—61.
14. Ковалев В. И., Луцки В. Г., Сизов В. И., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: численное исследование пограничного слоя в сопле с завесным охлаждением//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 48—57.
15. Луцки В. Г., Сизов В. И., Стернин Л. Е., Якубенко А. Е. Потери удельного импульса из-за трения и рассеяния в сопле ЖРД с завесным охлаждением//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 82—93.

16. Глушко Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости//Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 4. С. 13—23.
17. Rotta J. C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz//Z. Phys. 1951. 1. Mitt. V. 129. № 6. S. 547—572; 2 Mitt. V. 131. № 1. S. 51—77.
18. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
19. Глушко Г. С. Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине//Турбулентные течения. М.: Наука, 1970. С. 37—44.
20. Глушко Г. С. Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом//Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 4. С. 128—136.
21. Глушко Г. С. Переход к турбулентному режиму течения в пограничном слое плоской пластины при различных масштабах турбулентности набегающего потока//Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 68—70.
22. Глушко Г. С., Солопов В. А. Процесс переноса тепла в турбулентных течениях//Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 4. С. 18—24.
23. Секундов А. Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений//Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 114—127.
24. Абрамович Г. Н., Кузьмич В. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Экспериментальное и расчетное исследование сверхзвуковой пристеночной струи в спутном сверхзвуковом потоке//Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 4. С. 25—32.
25. Лебедев А. Б., Секундов А. Н. Применение уравнения для турбулентной вязкости при описании течения вблизи шероховатой поверхности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 40—44.
26. Кузьмич В. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Исследование сжимаемого турбулентного пограничного слоя при наличии тангенциального вдува и положительного градиента давления//Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 6. С. 38—43.
27. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтономности. М.: Машиностроение, 1975. 94 с.
28. Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Расчет турбулентного диффузионного факела горения с учетом пульсаций концентрации и архимедовых сил//Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 30—40.
29. Козлов В. Е., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Модели турбулентности для описания течения в струе сжимаемого газа//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 38—44.
30. Wells C. S. Effects of freestream turbulency on boudary-layer transition//AIAA Journal. 1967. V. 5. № 1. P. 172—174.
31. Холщевникова Е. К. Исследование развитого течения несжимаемой проводящей жидкости в круглой трубе с помощью уравнения для турбулентной вязкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 60—69.
32. Навознов О. И., Павельев А. А. Влияние начальных условий на течение осесимметричных спутных струй//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 18—24.
33. Simpson R. L., Moffat R. J., Kays W. M. The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental skin friction with variable injection and suction//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1969. V. 12. № 7. P. 771—789.
34. Julien H. L., Kays W. M., Moffat R. J. Experimental hydrodynamics of the accelerated turbulent boundary layer with and without mass injection//Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1971. V. 93. № 4. P. 373—379.
35. Simpson R. L., Strickland J. H., Barr P. W. Features of a separating turbulent boundary layer in the vicinity of separation//J. Fluid Mech. 1977. V. 79. № 3. P. 553—594.
36. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя//Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 12. С. 68—85.
37. Гиневаский А. С., Иоселевич В. А., Колесников А. В. и др. Методы расчета турбулентного пограничного слоя//Итоги науки и техники. ВИНТИ. МЖГ. 1978. Т. 11. С. 155—304.
38. Холщевникова Е. К. Расчет пограничных слоев в соплах с теплообменом при высоких параметрах торможения//Тр. ЦИАМ. 1990. № 1252. С. 51—59.
39. Klein A. Review: Turbulent developing pipe flow//Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1981. V. 103. № 2. P. 243—249.
40. Волнистова Л. П., Габрианович Б. Н., Левченко Ю. Д., Трубаков Ю. П. Турбулентные харак-

- теристики потока на входном участке круглой трубы//Вопр. атом. науки и техники. Сер. Реакторостроение. 1977. № 4. С. 27—31.
41. Холщевникова Е. К. Численное исследование развития течения на начальном участке круглой трубы при смешанном пограничном слое//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 3. С. 95—101.
  42. Hanjalić K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows//J. Fluid Mech. 1972. V. 52. № 4. P. 609—638.
  43. Холщевникова Е. К. Турбулентное течение воздуха в круглой трубе при высоких температурах//Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 162—166.
  44. Ковнер Д. С., Луцкич В. Г. О турбулентном течении проводящей жидкости в продольном магнитном поле//Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 1. С. 10—17.
  45. Иевлев В. М., Сон Э. Е. Полуэмпирическая теория турбулентности неоднородных течений с объемными силами//Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 33—40.
  46. Chevray R., Kovasznyai L. S. G. Turbulence measurement in the wake of a thin flat plate//AIAA Journal. 1969. № 8. P. 1641—1643.
  47. Andreopoulos J., Bradshaw P. Measurement of interacting turbulent shear layers in the near wake of a flat plate//J. Fluid Mech. 1980. V. 100. № 3. P. 639—668.
  48. Гумилевский А. Г. Исследование безимпульсных закрученных следов на основе двухпараметрической модели турбулентности//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 3. С. 35—41.
  49. Винберг А. А., Зайчик Л. И., Перцуков В. А. Расчет переноса импульса и тепла в турбулентных газодинамических струйных течениях//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 3. С. 69—80.

Москва

Поступила в редакцию  
28.IX.1993