

УДК 532.51.013.4:536.24:537.2

© 1994 г. И. Ю. МАКАРИХИН

## О ВЛИЯНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

Численно исследуется влияние на устойчивость течения в вертикальной полости таких факторов, как электризация жидкости и воздействие электрического поля. Для описания электрических эффектов использовалась модель объемной электризации неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости с линейной зависимостью проводимости от температуры. Влияние электрических факторов учитывается посредством двух параметров — электрических чисел Прандтля  $Pe$  и Грасгофа  $Ge$ .

При малых  $Pe$  для небольших значений  $Ge$  возникает стабилизация течения, выражающаяся в повышении критического числа Грасгофа  $G$ . Однако с ростом  $Ge$  стабилизация сменяется дестабилизацией и критическое  $G$  уменьшается до нуля при неограниченном увеличении  $Ge$ . При росте  $Pe$  начальная стабилизация может исчезнуть, но характер дестабилизации при больших  $Ge$  остается неизменным. Конкретный вид зависимости критического  $G$  от величины  $Ge$  определяется не только значением  $Pe$ , но и величиной числа Прандтля  $P$ .

Одномерное стационарное течение в вертикальном плоском слое жидкости, заключенном между твердыми неподвижными неодинаково нагретыми границами, становится неустойчивым относительно малых двумерных возмущений, если максимальное значение скорости течения превысит некоторое критическое значение [1]. Среди нарастающих возмущений есть такое, поведение которого слабо зависит от коэффициента температуропроводности жидкости. Возмущения термодинамических параметров при этом не оказывают влияния на устойчивость движения. Потеря устойчивости происходит за счет возмущения гидродинамических величин по типу неустойчивости двух встречных потоков жидкости, соприкасающихся друг с другом. Данный тип неустойчивости существует при любых термодинамических параметрах жидкости, но наиболее опасным он является при достаточно больших значениях температуропроводности. Электризация жидкости и воздействие на нее электрического поля могут привести к существенному изменению характера упомянутой неустойчивости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский вертикальный конденсатор, заполненный жидким диэлектриком, обладающим слабой проводимостью, линейно зависящей от температуры. Если на обкладках конденсатора поддерживать разные температуры и потенциалы, то может возникнуть стационарное движение жидкости. Для нахождения этого течения запишем систему уравнений термоэлектрोगравитационной конвекции, пренебрегая при этом джоулевым разогревом, силами, обусловленными неоднородной поляризацией, и считая жидкость несжимаемой [2, 3]

$$\gamma \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = - \nabla p + \gamma \Delta \mathbf{v} - \gamma \beta T \mathbf{g} + \rho \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma \mathbf{E} + \rho \mathbf{v}) = 0, \quad \sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma T)$$

$$\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

Здесь  $\gamma, \nu, \varepsilon, \sigma_0$  — соответственно плотность, вязкость, диэлектрическая проницаемость и средняя электропроводность жидкости,  $\beta$  и  $\beta_\sigma$  — коэффициенты температурной зависимости массовой плотности и плотности заряда,  $\rho$  — плотность заряда,  $\mathbf{E}$  и  $\varphi$  — напряженность и потенциал электрического поля. Считая границы твердыми, идеально тепло- и электропроводящими стенками, имеем

$$x = \mp h; \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = \pm \Theta, \quad \varphi = \mp U \quad (1.2)$$

где  $h$  — полуширина слоя жидкости,  $\Theta$  и  $U$  — соответственно половина разности температур и потенциалов между границами слоя,  $x$  — координатная ось, перпендикулярная к границе слоя и отсчитываемая от центра слоя.

Границы применимости указанных уравнений для решения задачи определяются критериями электрогидродинамического приближения [2]. Эти критерии следуют из предположения о малости магнитных эффектов по сравнению с электрическими

$$\sigma \ll \frac{1}{h} \left( \frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2}, \quad \frac{\omega}{2\pi} \ll \frac{c}{h} \quad (1.3)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $c$  — фазовая скорость электромагнитных волн в среде. Данные условия хорошо выполняются для диэлектрических жидкостей.

Сформулированная задача имеет стационарное решение, существующее при всех значениях параметров:

$$T_0 = -\Theta \xi, \quad \xi = \frac{x}{h}, \quad v_0 = v_0(0, 0, v_0), \quad v_0 = \frac{\beta g \Theta h^2}{\sigma \nu} \xi (\xi^2 - 1) \quad (1.4)$$

$$E_0 = E_0(E_0, 0, 0), \quad E_0 = \frac{2U\beta_\sigma\Theta}{h \ln A} \frac{1}{1 - \beta_\sigma\Theta\xi}$$

$$\rho_0 = \frac{2\beta_\sigma^2\Theta^2\varepsilon U}{h^2 \ln A} \frac{1}{(1 - \beta_\sigma\Theta\xi)^2}, \quad A = \ln \frac{1 - \beta_\sigma\Theta}{1 + \beta_\sigma\Theta}$$

Вследствие допущения о независимости стационарного движения от координат вдоль слоя жидкости характеристики механического течения и электрические параметры не влияют друг на друга. Поэтому распределение скорости такое же, как и в случае течения без электрического поля [1]. Характерное распределение возникшего электрического заряда линейно.

Воспользуемся безындукционным приближением, предполагая неоднородность электропроводности малой. Линеаризуем систему уравнений (1.1) около стационарного решения (1.4). Кроме того, поскольку наиболее опасными в отсутствие электрического поля являются плоские вихревые возмущения, ограничимся двумерными возмущениями, зависящими только от координат  $x$  и  $z$ . Безразмерная линеаризованная задача (1.1)—(1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + G \left( v_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= \Delta \Delta \psi + \frac{\partial \theta}{\partial x} - \\ - G \varepsilon \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} - E_0 \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + G \left( v_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= \frac{1}{P} \Delta \theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} + G \left( v_0 \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{1}{Pe} \left( S \frac{\partial E_0}{\partial x} \theta + \right.$$

$$+ SE_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sigma(T_0) \Delta \Phi - \frac{\partial \sigma(T_0)}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$G = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu^2}, \quad Ge = \frac{\varepsilon U^2}{\gamma g\beta\Theta h^3}, \quad S = \beta_e \Theta, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad Pe = \frac{\varepsilon \nu}{\sigma_0 h^2}$$

$$x = \mp 1: \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \theta = \Phi = 0$$

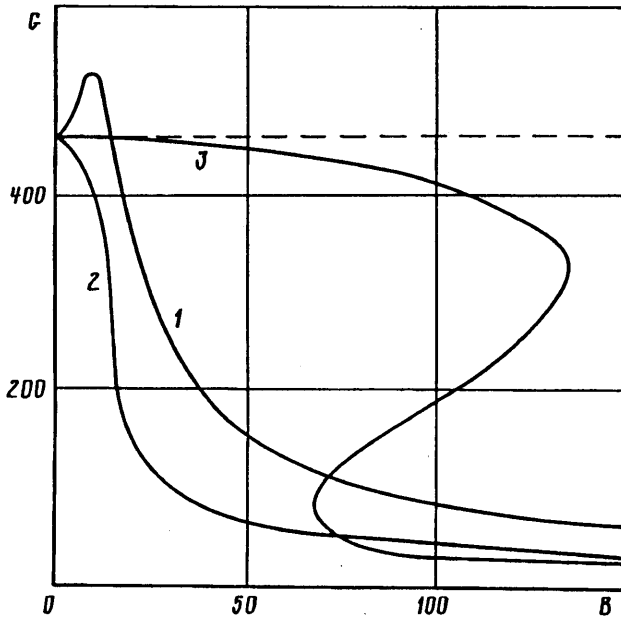
В качестве единиц измерения выбраны: длины —  $h$ , времени —  $h^2/\nu$ , скорости —  $g\beta\Theta h$ , температуры —  $\Theta$ , давления —  $\gamma g\beta\Theta h$ , потенциала —  $U$ ;  $G$  и  $P$  — числа Грасгофа и Прандтля,  $Ge$  — электрическое число Грасгофа, показывающее соотношение кулоновских и вязких сил,  $Pe$  — электрическое число Прандтля, показывающее соотношение токов смещения и проводимости,  $S$  — безразмерный параметр неоднородности электропроводности. Возмущения скорости и электрического поля определяются через функцию тока и электрический потенциал традиционным образом.

После исключения старшей производной потенциала из первого уравнения системы (1.5) число  $Ge$  будет входить в уравнение только в произведении с числом  $S$ . Число  $B = Ge S$  имеет смысл отношения кулоновской силы к силе Архимеда.

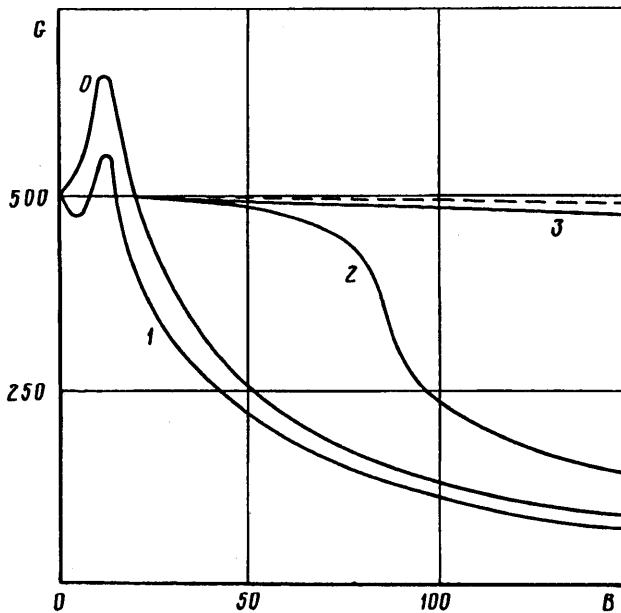
Если рассмотреть плоские нормальные возмущения, периодические по  $z$  с волновым числом  $k$ , то получим краевую задачу для функций, зависящих только от поперечной координаты. Полученная система исследовалась численными методами. В связи с наличием потенциально малого параметра при одной из старших производных был использован метод дифференциальной прогонки со стыковкой внутри интервала интегрирования. Алгоритм позволяет определить собственные числа задачи и выявить связь между различными параметрами задачи.

**2. Результаты расчета.** В отсутствие электрического поля стационарное течение становится неустойчивым при достижении числом Грасгофа некоторого критического значения. Поэтому целесообразно изучить зависимость этого значения от параметра  $B$  для различных значений чисел  $P$  и  $Pe$ . Большинство полученных результатов представлены в виде разных вариантов такой зависимости. В расчетах с электрическим полем по преимуществу полагалось  $k = 1,4$ , что соответствует наиболее опасным без поля возмущениям. Выбранный подход приемлем по крайней мере при небольших значениях  $B$  и  $Pe$ . Такой способ представления результатов удобен для сравнения с экспериментальными данными, поскольку число  $G$  пропорционально перепаду температур, а число  $B$  зависит от напряжения. Это означает совпадение с точностью до масштабных множителей графика зависимости критической температуры от квадрата напряжения с графиком зависимости  $G$  от  $B$ .

Электрическое число Прандтля по аналогии с числом  $P$  будем трактовать как соотношение времен релаксации электрического заряда и гидродинамического импульса. Для изучения были выбраны различные комбинации чисел  $P$  и  $Pe$ , позволяющие устанавливать произвольные соотношения для времен релаксации импульса, температуры и заряда. На фиг. 1 представлен случай  $P = 0,1$ , когда характерное гидродинамическое время (время релаксации импульса) много больше характерного теплового времени (времени релаксации температуры); такие возмущения условно считают «изотермическими». Штриховая линия показывает критическое число Грасгофа в отсутствие электрического поля. При существенном превосхождении характерного теплового времени над электрическим (временем релаксации заряда), например при  $Pe = 0$  (кривая 1), с ростом  $B$  сначала наблюдается стабилизация стационарного течения, сменяющаяся затем дестабилизацией при больших значениях  $B$ . Если тепловое время сравнимо с электрическим ( $Pe = P = 0,1$ , кривая 2), то начальной стабилизации уже не



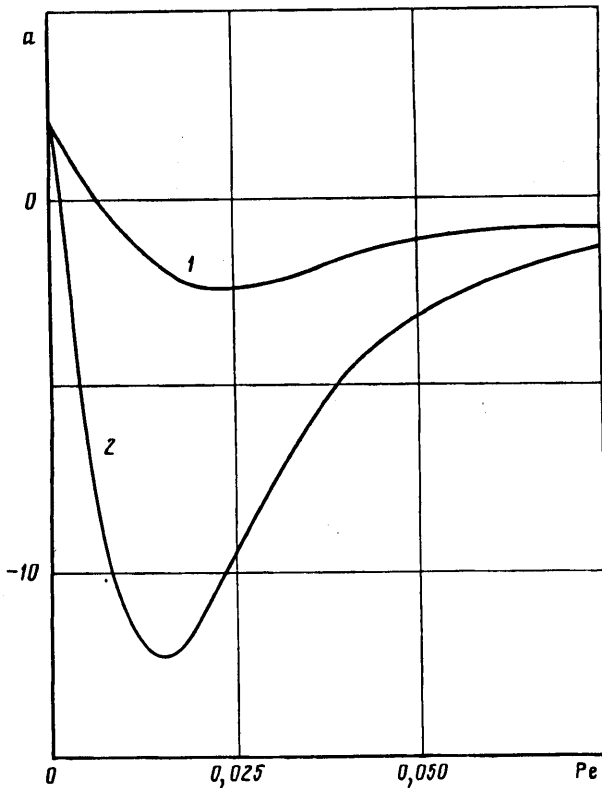
Фиг. 1



Фиг. 2

наблюдается; электрическое поле монотонно уменьшает устойчивость течения при своем возрастании. При электрическом времени, существенно превосходящем гидродинамическое время ( $Pe = 1$ , кривая  $\mathcal{J}$ ), также существует дестабилизация, но уже не монотонно усиливающаяся, а имеющая более сложный вид. Во всех случаях неустойчивость приобретает колебательный характер, причем при малых  $B$  частота  $\omega$  зависит от значения  $B$ .

При равенстве гидродинамического и теплового времени вид зависимостей несколько меняется. Например, для  $P = 1$  (фиг. 2) даже при большом превышении



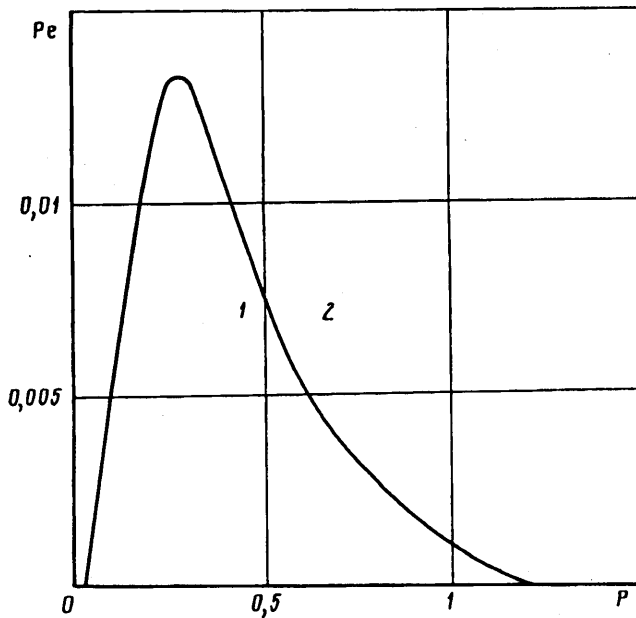
Фиг. 3

теплового времени над электрическим ( $Re = 0,005$ , кривая 1) при достаточно малых  $B$  сначала появляется дестабилизация, сменяющаяся стабилизацией, переходящей вновь в понижение утойчивости. График для  $Re = 0$  качественно соответствует аналогичному графику на фиг. 1. При равенстве всех времен ( $P = Re = 1$ , кривая 2) в области небольших  $B$  зависимость критического  $G$  от  $B$  слабая. С дальнейшим ростом  $Re$  (например,  $Re = 10$ , кривая 3) интервал параметра  $B$ , в котором устойчивость практически не зависит от его величины, существенно расширяется. Для данного значения числа  $P$  срыв устойчивости происходит через колебания, однако в отличие от предыдущего значения  $P$  частота может изменить свой знак при росте  $B$ . Это означает наличие некоторого значения числа  $B$ , при котором неустойчивость носит монотонный характер. Такое значение определяется числом  $Re$  и, вообще говоря,  $P$ . Штриховая линия на фигуре соответствует критическому  $G$  без воздействия электрического поля.

Анализ всех видов зависимостей  $B$  от  $G$  выявил следующие общие закономерности. При  $B$ , меньшем 4—5 единиц, все графики имеют вид квадратичной параболы:  $G = G_0 + aB^2$ , где  $G_0$  — критическое значение числа Грасгофа без электрического поля,  $a$  — число, зависящее только от  $P$  и  $Re$ . График зависимости  $a$  от  $Re$  представлен на фиг. 3. Здесь значениям  $P = 0,1$  и 1 соответствуют кривые 1 и 2. Положительные  $a$  указывают на область  $Re$ , в которой существует стабилизация. В этой же области  $B$  частота растет линейно при увеличении  $B$ .

При  $B$ , превышающем по крайней мере 500, закон изменения хорошо аппроксимируется следующей формулой:  $G = b/B$ , где  $b$  — число, определяемое значениями  $P$  и  $Re$ . При больших  $B$  частота нейтральных колебаний стабилизируется и не зависит ни от  $G$ , ни от  $B$ .

В промежуточной области изменения параметра  $B$ , соответствующей не очень



Фиг. 4

большим и не очень малым значениям, при больших  $Pe$  наблюдается S-образный изгиб нейтральной кривой. Этот вид кривой означает возможность трехкратного перехода границы устойчивости одной и той же моды при фиксированном  $B$  и плавно увеличивающемся от нуля  $G$ . При минимизации нейтральной кривой по волновому числу  $k$  ширина изгиба несколько уменьшается, но возможность перехода из области неустойчивости в область устойчивости принципиально сохраняется. Под термином «ширина» подразумевается расстояние между крайними левым и правым выступами изгиба. С ростом числа  $Pe$  изгиб расширяется и перемещается в область больших  $B$ , причем величина сдвига гораздо больше увеличения ширины. Это приводит к расширению участка слабой изменчивости  $G$  в области малых  $B$ .

В случае малых  $P$ ,  $Pe$  и  $B$  минимизация по  $k$  нейтральной кривой в области наибольшего стабилизирующего эффекта (например, для кривой, соответствующей  $Pe = 0$  при  $B = 10$  на фиг. 1 и 2) приводит к небольшому уменьшению стабилизации, которая тем не менее остается. Однако аналогичная процедура для участка стабилизации, расположенного после участка локальной дестабилизации (например, кривая 1 на фиг. 2 при  $B = 11$ ), приводит к уничтожению эффекта повышения устойчивости из-за воздействия электрического поля.

В качестве одного из вариантов объяснения стабилизирующего эффекта можно привлечь следующие рассуждения. Повышение устойчивости течения происходит вследствие воздействия дополнительных объемных сил электрической природы. Поле этих сил является существенно неоднородным по причине неравномерности распределения заряда в жидкости (неоднородность напряженности поля в случае безындукционного приближения менее существенна). Объемный заряд, возникающий из-за зависимости проводимости от температуры, является однородным. Объемная плотность заряда у более горячей стенки меньше, нежели у противоположной стенки, так как проводимость возле этой стенки выше. Отсюда следует, что при стационарном течении электрические силы направлены от горячей стенки к холодной и при этом они возрастают в том же направлении.

Такое поведение электрических сил при отсутствии других сил соответствует абсолютной устойчивости стационарного состояния рассматриваемой системы. В

этом случае спектр собственных функций краевой задачи представляет набор затухающих колебательных возмущений. Прямой аналогией в данном случае является пример конвективной устойчивости механического равновесия бесконечного горизонтального слоя, подогреваемого сверху [1]. Релаксация заряда при этом должна быть несущественной, что возможно при достаточно малых значениях  $P$  и  $Re$ .

Это предположение подтверждается графиком фиг. 4. При  $P > 1,20$  и  $Re > 0,013$  стабилизация не существует ни при каких значениях параметров задачи. Область 1 на фиг. 4 соответствует стабилизации, область 2 — отсутствию стабилизации. Дестабилизацию при  $P$ , меньшем 0,01, можно объяснить возрастанием отношения  $Re/P$ , но не исключена ошибка счета, связанная с видом уравнения релаксации заряда.

В области больших  $V$  неустойчивость характеризуется числом  $b$ . Этот параметр является произведением  $G$  и  $V$  и поэтому не зависит от гравитационных параметров задачи. Из этого следует, что неустойчивость при больших напряжениях имеет негравитационный электротермический характер.

Таким образом, влияние электрических сил, вызванных неоднородной электропроводностью жидкости, приводит к понижению устойчивости стационарного подъемно-опускного течения по крайней мере при достаточно больших  $V$ .

Автор выражает благодарность Н. И. Лобову и Е. Л. Тарунину за ценные советы и плодотворное обсуждение результатов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г. Э., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Болога М. К., Гросу Ф. П., Кожухарь И. А. Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 319 с.
3. Саранин В. А. Об устойчивости равновесия плоского горизонтального слоя неоднородно нагретой жидкости в электрическом поле // Конвективные течения. Пермь, 1983. С. 46—52.

Пермь

Поступила в редакцию  
2.XI.1992