

УДК 532.5.031

© 1994 г. О. В. ИЛЬИН

О ПОСТРОЕНИИ ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ В КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Получено общее решение краевой задачи построения тонких профилей в канале с проницаемыми стенками по заданному распределению давления. Это решение при соответствующем выборе коэффициентов проницаемости позволяет построить тонкие профили в канале с непротекаемыми стенками, в струе и т. д. Проведен анализ влияния проницаемости стенок канала на форму построенных профилей.

В [1—5] рассматривались задачи обтекания тонких тел потоком идеальной несжимаемой жидкости в канале с перфорированными стенками, на которых выполнялось условие пропорциональности касательной и нормальной к стенке компонент возмущенной скорости [6]. Коэффициенты пропорциональности на верхней и нижней стенках канала предполагались равными [1—4] и решение задачи сводилось к известной задаче сопряжения теории аналитических функций [1, 2] или к решению сингулярных интегральных уравнений [3, 4]. В [5] при произвольных коэффициентах получено аналитическое решение, которое в качестве частного случая содержит в себе результаты [1—4].

1. Постановка и решение задачи. Пусть требуется определить контур профиля, имеющего максимальную хорду l , по заданному распределению давления на нижней и верхней сторонах тонкого профиля при его обтекании потоком идеальной невесомой несжимаемой жидкости. Поток ограничен параллельными стенками, расстояние между которыми равно H . Передняя кромка профиля удалена от верхней стенки канала на расстояние h . Проницаемости верхней и нижней стенок канала характеризуются коэффициентами проницаемости k_1 и k_2 . Считается известной скорость набегающего потока в бесконечно удаленной точке слева от канала v_∞ .

Пусть задано распределение давления потока вдоль границы тонкого профиля

$$x \in (0, l): p_1 = p_\infty + \rho v_\infty^2 U_1(x), \quad p_2 = p_\infty + \rho v_\infty^2 U_2(x) \quad (1.1)$$

где p_∞ — давление на бесконечности, ρ — плотность потока; индекс 1 относится к верхней стороне профиля, индекс 2 — к нижней.

Функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$ считаются всюду на интервале $(0, l)$ однозначными и малыми порядка α , за исключением передней кромки профиля $x = 0$, где они могут иметь интегрируемые особенности, а на задней кромке справедливо равенство $U_1(l) = U_2(l)$.

Требуется определить границы тонкого профиля по известным функциям (1.1). Гидродинамические характеристики профиля можно вычислить по известному распределению давления (1.1)

$$Y = \rho v_\infty^2 \int_0^l \{U_2(x) - U_1(x)\} dx, \quad M_0 = \rho v_\infty^2 \int_0^l \{U_2(x) - U_1(x)\} x dx$$

Существование малого параметра α позволяет сносить граничные условия в

области течения на границы полосы с горизонтальным разрезом длины l . Решение задачи строится на каноническом прямоугольнике со сторонами π и $\pi|\tau|/2$, на который конформно отображается эта полоса. Конформно-отображающая функция дается формулой [7]

$$z(\zeta) = \frac{H}{\pi} \ln \frac{\vartheta_4(a-c)\vartheta_4(\zeta+c)}{\vartheta_4(a+c)\vartheta_4(\zeta-c)}, \quad c = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{h}{H}\right) \quad (1.2)$$

где $\vartheta(\zeta)$ — тэта-функции Якоби [8]. Параметры $|\tau|$, a конформного отображения определяются как решения следующей системы уравнений:

$$\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(a+c) - \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(a-c) = 0, \quad \frac{\vartheta_4(a-c)}{\vartheta_4(a+c)} = \exp\left(\frac{\pi l}{2H}\right)$$

Введем в рассмотрение комплексно-сопряженную скорость возмущенного потока

$$F(\zeta) = u - iv \quad (1.3)$$

действительная и мнимая части которой связаны с компонентами вектора скорости потока соотношениями $u = v_x/v_\infty - 1$ и $v = v_y/v_\infty$.

На основании закона Дарси [6] и уравнения Бернулли вдоль стенок канала приходим к следующим краевым условиям:

$$\eta = \pi|\tau|/2, \quad \xi \notin (c, \pi - c) : v(\xi) + k_1 u(\xi) = 0 \quad (1.4)$$

$$\eta = \pi|\tau|/2, \quad \xi \in (c, \pi - c) : v(\xi) + k_2 u(\xi) = 0 \quad (1.5)$$

На границах тонкого профиля из уравнения Бернулли находим

$$\eta = 0, \quad \xi \notin (\pi - a, a) : u(\xi) = -U_1(\xi) \quad (1.6)$$

$$\eta = 0, \quad \xi \in (\pi - a, a) : u(\xi) = -U_2(\xi) \quad (1.7)$$

Краевую задачу Гильберта (1.4)–(1.7) будем рассматривать в классе функций, имеющих простые полюса на концах интервала $(\pi - a, a)$. Отметим, что данный класс функций включает в себя решения задач обтекания тонких кавитационных полостей. Последнее утверждение легко проверить, так как на основании линейной теории [9] в точках замыкания свободных границ, ограничивающих область постоянного давления, функция $F(z)$ в физической области течения имеет особенность вида $(z-l)^{-1/2}$, а производная конформно-отображающей функции $z(\zeta)$ — нули первого порядка.

Согласно [5], решение задачи (1.4)–(1.7) ищется в виде

$$F(\zeta) = i \frac{\vartheta_4(\zeta - e)}{\vartheta_4(\zeta - e + p)} \left[\frac{\vartheta_4(\zeta + c)}{\vartheta_4(\zeta - c)} \right]^\beta X(\zeta) \quad (1.8)$$

где $X(\zeta) = \mu - iv$ — некоторая аналитическая функция, мнимая часть которой на верхнем основании прямоугольника равна нулю, т. е.

$$\eta = \pi|\tau|/2, \quad \xi \in (0, \pi) : v(\xi) = 0 \quad (1.9)$$

Краевые условия (1.4) и (1.5) будут выполнены, если

$$\beta = \gamma_1 - \gamma_2, \quad p = \pi \left[\gamma \frac{h}{2H} + \gamma_1 \left(1 - \frac{h}{H}\right) - \frac{1}{2} \right]$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\pi} \arctg k_1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\pi} \arctg k_2 \quad (1.10)$$

В силу ограниченности на бесконечности слева и справа от канала комплекс-

сно-сопряженной скорости возмущенного потока, параметр e выбирается следующим образом:

$$\varepsilon = c, \quad (\beta > 0);$$

$$\varepsilon = \pi - c, \quad (\beta \leq 0) \quad (1.11)$$

Краевые условия (1.6) и (1.7) для функции $X(\zeta)$ примут вид

$$\eta = 0, \quad \xi \notin (\pi - a, a): v(\xi) = -U_1(\xi) g(\xi)$$

$$\eta = 0, \quad \xi \in (\pi - a, a): v(\xi) = -U_2(\xi) g(\xi) \quad (1.12)$$

При этом функция $X(\zeta)$ в точках $\zeta = \pi - a$ и $\zeta = a$ должна иметь простые полюса.

Решение задачи Шварца (1.9)—(1.12) в указанном классе функций дается формулой [10]

$$X(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi-a}^a U_2(t) g(t) \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(t-\zeta) dt + \frac{1}{\pi} \int_a^{2\pi-a} U_1(t) g(t) \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(t-\zeta) dt + \\ + A + B \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta-a) + C \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta+a), \quad g(\xi) = \frac{\vartheta_4(\xi-e+p)}{\vartheta_4(\xi-e)} \left[\frac{\vartheta_4(\xi-c)}{\vartheta_4(\xi+c)} \right]^\beta \quad (1.13)$$

Действительные постоянные A , B и C определяются из уравнений

$$B + C = \frac{1}{\pi} \int_{\pi-a}^a U_2(t) g(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_a^{2\pi-a} U_1(t) g(t) dt \quad (1.14)$$

$$A + B \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(e-p-a) + C \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(e-p+a) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi-a}^a U_2(t) g(t) \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(t-e+p) dt - \frac{1}{\pi} \int_a^{2\pi-a} U_1(t) g(t) \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(t-e+p) dt \quad (1.15)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \oint F(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \right\} = 0 \quad (1.16)$$

Уравнение (1.14) следует из (1.9), уравнение (1.15) получено из условия ограниченности функции $F(\zeta)$ в точке $\zeta = \pi\tau/2 + e - p$, а (1.16) является условием замкнутости каверны.

Нетрудно получить параметрические уравнения верхней и нижней границ тонкого профиля

$$x(\xi) = \int_a^\xi \frac{dx}{dt} dt, \quad y(\xi) = -\int_a^\xi v(t) \frac{dx}{dt} dt \quad (\xi \in (0, \pi))$$

2. Примеры построения тонких профилей. Анализ результатов численных расчетов. Пусть распределение давления на контуре имеет вид

$$U(\xi) = U_1(x(\xi)) = U_2(x(\xi)) \quad (\xi \in (0, \pi))$$

Тогда функция (1.13) преобразуется так

$$X(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U(t) g(t) \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(t-\zeta) dt + A + B \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta-a) + C \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta+a) \quad (2.1)$$

Рассмотрим различные законы распределения давления по тонкому профилю.

а) Пусть $U(\xi) = -\sigma/2 = \text{const}$, где $\sigma = 2(p_\infty - p_0)/(\rho v_\infty^2)$ — число кавитации,

p_0 — давление в кавитационной полости. В этом случае параметры A , B , C определяются из следующей системы линейных уравнений:

$$B + C = -\frac{\sigma}{2\pi} \int_0^\pi g(t) dt,$$

$$A + B \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (e - p - a) + C \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (e - p + a) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^\pi g(t) \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (t - e + p) dt \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{\vartheta_1(\xi - a) \vartheta_1(\xi + a) \vartheta_4(\xi - e)}{\vartheta_4(\xi - c) \vartheta_4(\xi + c) \vartheta_4(\xi - e + p)} \left[\frac{\vartheta_4(\xi + c)}{\vartheta_4(\xi - c)} \right]^\beta X(\xi) d\xi = 0$$

Отметим, что формулы (2.1), (2.2) имеют безкватратурные выражения при равных коэффициентах проницаемости верхней и нижней стенок канала, т. е. когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$

$$X(\zeta) = \frac{\sigma}{2 \sin p} \left(\frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_1'(0)} \left[\operatorname{ctg} p - \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta + c) \right] - g(\zeta) e^{i\theta} \right) + A + B \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta - a) + C \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta + a) \quad (2.3)$$

$$B + C = -\frac{\sigma}{2 \sin p} \frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_1'(0)}, \quad A - B \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(c + p + a) - C \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(c + p - a) = \\ = \frac{\sigma}{2 \sin p} \frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_1'(0)} \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(p) - \operatorname{ctg} p \right] \quad (2.4)$$

$$A + (B - C) \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(c - a) = \frac{\sigma}{2 \sin p} \frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_1'(0)} \left[\frac{\vartheta_1(2c + p) \vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(p) \vartheta_1(2c)} - \right. \\ \left. - \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(2c) - \operatorname{ctg} p \right]$$

Нетрудно заметить, что формулы (2.3) и (2.4) справедливы только при $p \neq 0$. С помощью предельного перехода при $p \rightarrow 0$ получаем решение задачи о построении кавитационной полости в струе

$$X(\zeta) = -\frac{\sigma}{4} \left\{ 2i + \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta - a) + \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta + a) \right\}$$

Как показывают результаты численных расчетов, влияние проницаемости стенок канала на форму кавитационной полости незначительно.

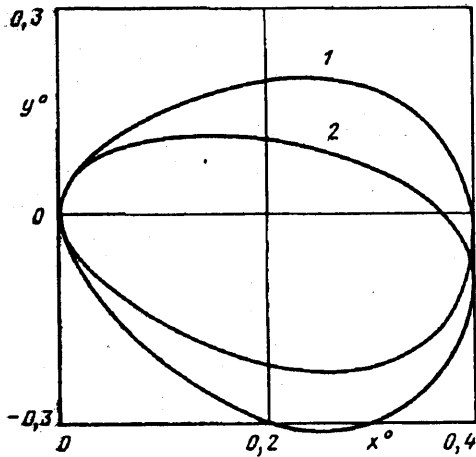
б) Пусть $U(\xi) = -\alpha/g(\xi)$, где α — некоторый малый параметр. Тогда (2.1) упростится

$$X(\zeta) = -\alpha i + A + B \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta - a) + C \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta + a)$$

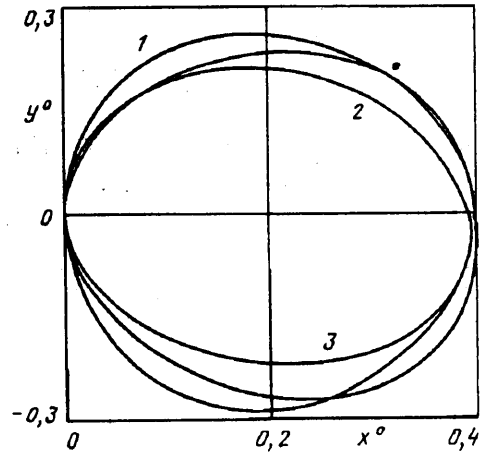
Уравнения (1.14)–(1.16) примут вид

$$B + C = -\alpha, \quad A + B \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(e - p - a) + C \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(e - p + a) = 0$$

$$\int_0^\pi \frac{\vartheta_1(\xi - a) \vartheta_1(\xi + a) \vartheta_4(\xi - e)}{\vartheta_4(\xi - c) \vartheta_4(\xi + c) \vartheta_4(\xi - e + p)} \left[\frac{\vartheta_4(\xi + c)}{\vartheta_4(\xi - c)} \right]^\beta \times$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$x \left\{ A + B \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\xi - a) + C \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\xi + a) \right\} d\xi \quad (2.5)$$

Параметры A , B и C могут быть найдены в явном виде, если коэффициенты проницаемости стенок канала равны. В этом случае последнее уравнение (2.5) преобразуется к виду

$$A + (B - C) \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (c - a) = \alpha \operatorname{ctg} p \left\{ 1 - \frac{\vartheta_4 (c - a + p) \vartheta_4 (c + a + p)}{\vartheta_4 (c - a) \vartheta_4 (c + a)} \right\}$$

которое справедливо при $p \neq 0$. Путем предельного перехода при $p \rightarrow 0$ получим решение задачи посторения тонкого профиля в струе

$$A = 0, \quad B = C = -\frac{\alpha}{2}$$

На фиг. 1 приведены формы тонких профилей для значения $\gamma_2 = 0,3$. При этом $\gamma_1 = 0,4$ (кривая 1) и $0,2$ (кривая 2). Относительное удаление передней кромки от верхней стенки равно $0,75$. Вблизи нижней стенки канала получают профили с тупыми кромками. Отметим, что утолщение профиля идет в сторону этой стенки. Здесь и ниже приняты обозначения $x^\circ = x/H$, $y^\circ = y/H$, относительная длина максимальной хорды профиля $l/H = 0,4$.

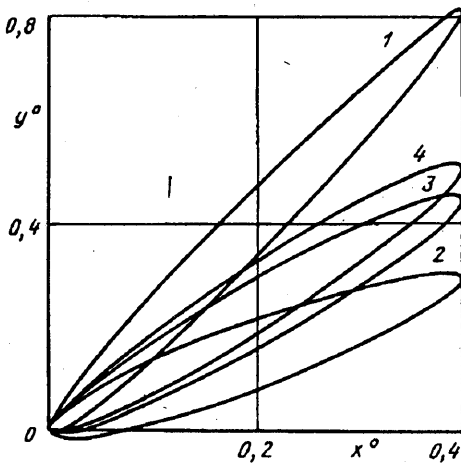
в) Пусть $U(\xi) = -\alpha [\vartheta_4(\xi + c)/\vartheta_4(\xi - c)]^p$, где α — малый параметр. В этом случае функция (2.1) равна

$$X(\xi) = \frac{\alpha}{\sin p} \frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_1'(0)} \left[\operatorname{ctg} p + \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (\xi - e) - e^p \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_4(\xi - e + p)}{\vartheta_1(p) \vartheta_4(\xi - e)} \right] + A + B \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\xi - a) + C \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\xi + a)$$

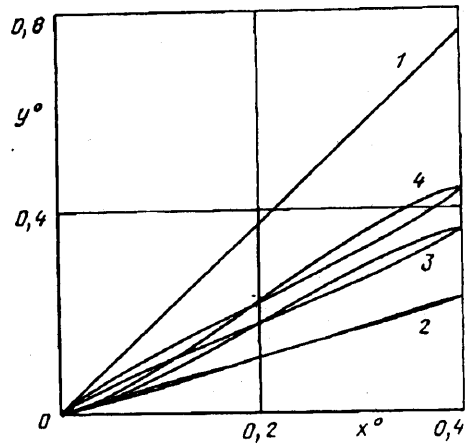
Система уравнений (1.14) и (1.15) запишется в виде

$$B + C = -\frac{\alpha}{\sin p} \frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_1'(0)},$$

$$A + B \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (e - p - a) + C \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (e - p + a) = \frac{\alpha}{\sin p} \frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_1'(0)} \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(p) - \operatorname{ctg} p \right]$$



Фиг. 3



Фиг. 4

а уравнение (1.16) сохранит свой вид. Эти уравнения справедливы при $p \neq 0$. Если $p = 0$, то, совершая предельный переход, получим

$$X(\zeta) = -\alpha i - \frac{\alpha}{2} \left\{ \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\zeta - a) + \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\zeta + a) \right\}$$

Результаты расчетов представлены для $h/H = 0,75$, $\gamma_1 = 0,25$ на фиг. 2. При этом $\gamma_2 = 0,5$ (кривая 1), $0,25$ (кривая 2), 0 (кривая 3). Профиль с максимальной толщиной получается в случае, когда нижняя граница является свободной струей (кривая 1). Если нижняя граница непроницаемая, то профиль имеет минимальную толщину (кривая 3).

2) Пусть $U(\xi) = -\alpha \vartheta_1(\xi + a) / \vartheta_1(\xi - a) / g(\xi)$, где α — некоторый малый параметр. Так же как и в предыдущих пунктах, получим аналитическое решение данной задачи

$$X(\zeta) = -\frac{\alpha}{\sin 2a} \left[\frac{\vartheta_1(\zeta + a)}{\vartheta_1(\zeta - a)} e^{2ia} - \frac{\vartheta_1(2a)}{\vartheta_1'(0) \sin 2a} - \frac{\vartheta_1(2a)}{\vartheta_1'(0)} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\zeta - a) \cos 2a \right] +$$

$$+ A + B \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\zeta - a) + C \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\zeta + a)$$

где A , B и C определяются из уравнений

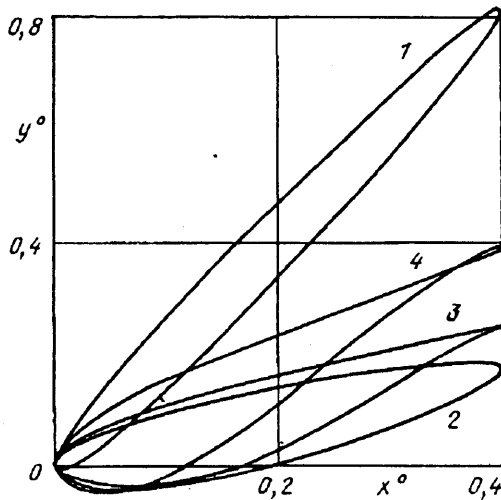
$$B + C = -\alpha \frac{\vartheta_1(2a)}{\vartheta_1'(0)} \operatorname{ctg} 2a, \quad A + B \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (e - p - a) + C \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (e - p + a) =$$

$$= \frac{\alpha}{\sin 2a} \left[\frac{\vartheta_4(e - p + a)}{\vartheta_4(e - p - a)} - \frac{\vartheta_1(2a)}{\vartheta_1'(0) \sin 2a} - \frac{\vartheta_1(2a)}{\vartheta_1'(0)} \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (e - p - a) \cos 2a \right]$$

При этом условии замкнутости (1.16) сохраняет свой вид.

На фиг. 3—5 показаны формы профилей при $\gamma_1 = 0,5$ и $h/H = 0,25, 0,5$ и $0,75$. Кривая 1 соответствует значению $\gamma_2 = 0,5$, кривая 2 — $0,4$, кривая 3 — $0,1$ и кривая 4 — 0 .

В случае, когда поток ограничен проницаемым дном, то вблизи свободной поверхности по заданному распределению давления можно построить однолистные тонкие профили (фиг. 3). Если профили удалены от свободной границы, то они могут быть и неодностными (фиг. 4 и 5). Отметим, что если нижняя стенка является свободной поверхностью (струя), то данному распределению давления



Фиг. 5

соответствует наклонная пластина (фиг. 4, кривая 1) или симметричные профили (фиг. 3 и 5, кривые 1). При некоторых значениях коэффициента проницаемости нижней стенки γ_2 могут получиться профили с острой задней кромкой (например, кривая 3 на фиг. 5).

Распределение давления в разд. б) и г) не определяется в явном виде в физической области течения, а для пункта в) имеем

$$U(x) = \alpha \left[\frac{\vartheta_4(a-c)}{\vartheta_4(a+c)} \right]^{\beta} \exp\left(-\frac{\pi\beta x}{H}\right)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lo. C. F. Wind — tunnel wall interference reduction by streamwise porosity distribution // AIAA Journal. 1972. V. 10. No. 4. P. 547—550. Лоу. Уменьшение влияния стенок аэродинамической трубы с использованием перфорированных стенок // Ракетная техника и космонавтика. 1972. Т. 10. № 4. С. 231—234.
2. Маревцева Н. А. Обтекание тонкого профиля в канале с проницаемыми стенками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 2. С. 111—117.
3. Галанин А. В., Гусев В. А. Линейные задачи об индукции перфорированных каналов // Актуальные задачи гидродинамики. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1989. С. 52—61.
4. Галанин А. В., Ильин О. В. Граничные задачи обтекания гидродинамических особенностей в каналах с перфорированными стенками. Чебоксары, 1991. 20 с. — Деп. в ВИНТИ. 18.07.1991. № 3055-B91.
5. Васильев В. Н., Ильин О. В. Влияние проницаемости стенок канала на гидродинамические характеристики пластины. Чебоксары, 1992. 16 с. — Деп. в ВИНТИ. 03.08.1992. № 2515-B92.
6. Гродзовский Г. Л., Никольский А. А., Свищев Г. П., Таганов Г. И. Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах. М.: Машиностроение, 1967. 144 с.
7. Галанин А. В., Терентьев А. Г. Влияние границ потока на гидродинамические характеристики тонкого профиля // Вопросы прикладной математики и механики. Вып. 3. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1974. С. 40—65.
8. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
9. Терентьев А. Г. К решению линейной задачи кавитационного обтекания криволинейной дуги // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 1. С. 34—38.
10. Терентьев А. Г. К решению смешанной краевой задачи // Докл. ДАН СССР. 1971. Т. 196. № 1. С. 57—60.