

УДК 532.59

© 1994 г. А. В. МАРЧЕНКО, А. Ю. СЕМЕНОВ

## КРАЕВЫЕ ВОЛНЫ В МЕЛКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ С ТРЕЩИНОЙ

Показано, что трещина в упругой пластине, плавающей на поверхности слоя мелкой жидкости, является волноводом, вдоль которого может переноситься энергия волновых движений жидкости. Скорость краевых волн меньше скорости изгибно-гравитационных волн. Существование антисимметричной моды краевых волн зависит от коэффициента Пуассона упругой пластины.

Волны, связанные с явлением открытого волновода, аналогичные краевым волнам, рассматриваемым в данной работе, хорошо известны в оптике (световод), акустике (звуковой канал), теории упругости (волны Релея и Лява), в гидродинамике (волны Стокса). Во всех этих случаях волновая энергия концентрируется в зонах, где скорость распространения волн минимальна.

Впервые решение, описывающее краевые волны, распространяющиеся вдоль наклонного берега и экспоненциально затухающие при удалении от него, было получено Стоксом [1]. В [2] дается обзор результатов по теории поверхностных и внутренних краевых волн, распространяющихся в мелкой жидкости вдоль наклонного берега с переменным углом наклона. В [3—5] исследовались волны, захваченные подводным хребтом и экспоненциально убывающие при удалении от него.

1. Линеаризованные уравнения мелкой воды, описывающие потенциальные движения в слое мелкой жидкости под упругой пластиной, в безразмерной форме имеют вид [6]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu \Delta \varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$\gamma^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \eta + D \mu^2 \Delta^2 \eta = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \mu = (Hk_y)^2 \ll 1, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)g\rho H^4}, \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2 H}{g}$$

Здесь  $\eta$  — возвышение поверхности жидкости над горизонтальным положением равновесия,  $\varphi$  — потенциал скоростей частиц жидкости,  $\rho, H$  — плотность и глубина жидкости,  $E, \nu, h$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина пластины. Размерные переменные, обозначаемые буквами со штрихами, связаны с безразмерными переменными формулами

$$t' = \omega^{-1}t, \quad (x', y') = k_y^{-1}(x, y), \quad \varphi' = a\omega H\varphi, \quad \eta' = a\eta$$

Здесь  $\omega^{-1}, k_y^{-1}$  — характерные временные и пространственные масштабы,  $a$  — характерная амплитуда волн. Далее рассматриваются периодические движения жидкости, при которых зависимость всех функций, входящих в задачу от  $t, y$ , выражается множителем  $\exp[i(t+y)]$ . Отсюда видно, что  $\omega$  и  $k_y$  — частота и волновое число в направлении  $y$ .

Условие  $\mu \ll 1$  соответствует приближению мелкой воды. Линеаризованные уравнения (1.1) описывают движения жидкости с малыми амплитудами, для которых выполняется  $a \ll H$ .

Подставляя в (1.1) решение в виде бегущих волн, пропорциональное  $\exp[i(t + y + kx)]$ , находим дисперсионное соотношение

$$\gamma^2 = \mu\lambda(1 + D\mu^2\lambda^2), \quad \lambda = 1 + k^2 \tag{1.2}$$

Корни дисперсионного уравнения находятся в использовании формул Кардано

$$\lambda_1 = (\alpha^+ - \alpha^-)/\mu, \quad \lambda_2 = [-\alpha^+ + \alpha^- + i\sqrt{3}(\alpha^+ + \alpha^-)]/(2\mu), \quad \lambda_3 = \lambda_2^* \tag{1.3}$$

$$\alpha^\pm = \left[ \left( \frac{\gamma^2}{2D^2} + \frac{1}{27D^3} \right)^{1/2} \pm \frac{\gamma^2}{2D} \right]^{1/3} > 0$$

Действительному корню  $\lambda_1$  в зависимости от  $\gamma$  соответствуют действительные или мнимые волновые числа  $\pm k_1$ . Именно при  $\gamma^2 \geq \gamma_*^2 = \mu(1 + D\mu^2)$  имеется решение в виде бегущих волн с действительными волновыми числами  $\pm k_1$  в направлении оси  $x$ . При  $\gamma^2 < \gamma_*^2$  волновое число  $k_1$  чисто мнимое и волны экспоненциально возрастают в положительном или отрицательном направлениях  $x$ . Волновые числа  $\pm k_2, \pm k_2^*$  комплексные при любых действительных значениях  $\gamma$ .

Если упругая пластина однородная, то экспоненциально растущие волны не представляют интереса, так как имеют бесконечную энергию. В случае неоднородной пластины такие волны могут образовывать собственные функции, локализованные вблизи неоднородности и экспоненциально затухающие при удалении от нее.

2. В качестве примера рассмотрим пластину с прямолинейной трещиной. Предполагается, что на берегах трещины выполняются контактно-граничные условия, имеющие смысл равенства нулю изгибающих моментов и перерезывающих сил [7]

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu \right) \eta = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} - \nu \right) \eta = 0 \tag{2.1}$$

Кроме (2.1) при  $x = 0$  должны быть непрерывны давление и расход жидкости. Отсюда следует

$$\lim_{x \rightarrow +0} \varphi = \lim_{x \rightarrow -0} \varphi, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{2.2}$$

Положим, что все функции, входящие в задачу, пропорциональны  $\exp[i(t + y)]$ , т. е. рассматриваются волновые движения, периодические вдоль трещины. Этот множитель далее опускается.

Решение уравнений (1.1), (2.1), (2.2) при  $\gamma^2 < \gamma_*^2$ , ограниченное при  $|x| \rightarrow \infty$ , представим в виде

$$\varphi = \varphi^+, \quad x > 0; \quad \varphi = \varphi^-, \quad x < 0 \tag{2.3}$$

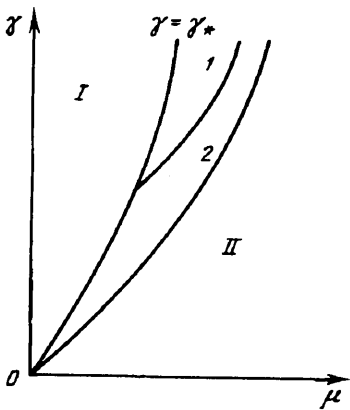
$$\varphi^\pm = a_1^\pm e^{\pm ik_1 x} + a_2^\pm e^{\pm ik_2 x} + a_3^\pm e^{\mp ik_2^* x}$$

Полагается, что волновые числа  $k_{1,2}$  лежат в верхней полуплоскости комплексного переменного  $k$ . Постоянные  $a_i^\pm$  ( $i=1, 2, 3$ ) находятся из (2.1), (2.2).

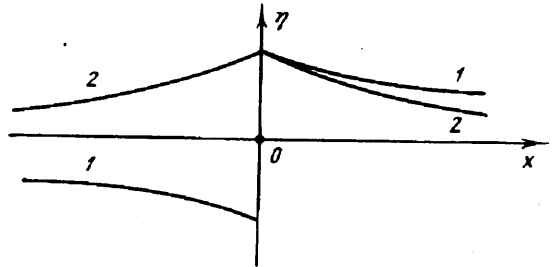
При  $\gamma^2 > \gamma_*^2$  решение уравнений (1.1), (2.1), (2.2) представляется в форме

$$\varphi = \varphi^+ + C^+ e^{-ik_1 x}, \quad x > 0 \quad \varphi = \varphi^- + C^- e^{ik_1 x}, \quad x < 0 \tag{2.4}$$

Если положить  $k_1 < 0$ , то постоянные  $C^\pm$  находятся из асимптотических



Фиг. 1



Фиг. 2

условий при  $|x| \rightarrow \infty$  и пропорциональны амплитудам волн, приносящих энергию из бесконечности к трещине. Постоянные  $a_i^\pm$  находятся из (2.1), (2.2).

При  $\gamma^2 < \gamma_*^2$  амплитуды  $a_i^\pm$  являются решением однородной системы линейных алгебраических уравнений, вытекающей из (2.1), (2.2). При  $\gamma^2 > \gamma_*^2$  постоянные  $a_i^\pm$  удовлетворяют неоднородной системе линейных алгебраических уравнений, правые части которых пропорциональны  $C^\pm$ . Определитель этой системы пропорционален произведению  $\Delta_1 \Delta_2$ , где  $\Delta_{1,2}$  определители систем уравнений, вытекающих из (2.1), (2.2) для амплитуд антисимметричных и симметричных волн соответственно

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\lambda_2 \lambda_2^* (k_2 + k_2^*) (\lambda_2 + \chi) (\lambda_2^* + \chi) + \lambda_1 \lambda_2^* (k_1^* + k_2^*) (\lambda_1 + \chi) \times \\ &\times (\lambda_2^* + \chi) + \lambda_1 \lambda_2 (-k_1 + k_2) (\lambda_1 + \chi) (\lambda_2 + \chi) \\ \Delta_2 &= -k_1 \lambda_2 \lambda_2^* (k_2 + k_2^*) (\lambda_2 + \chi) (\lambda_2^* + \chi) + k_2 \lambda_1 \lambda_2^* (k_1 + k_2^*) \times \\ &\times (\lambda_1 + \chi) (\lambda_2^* + \chi) - k_2^* \lambda_1 \lambda_2 (-k_1 + k_2) (\lambda_1 + \chi) (\lambda_2 + \chi), \quad \chi = \nu - 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

При  $\gamma^2 > \gamma_*^2$  определители  $\Delta_{1,2}$  — комплексные величины с неравными нулю действительными или мнимыми частями. Поэтому для любых значений  $\mu$  существует ненулевое решение задачи (1.1), (2.1), (2.2), описывающее дифракцию проходящих из бесконечности волн на трещине. Область непрерывного спектра  $\gamma^2 > \gamma_*^2$  на плоскости  $(\gamma, \mu)$  обозначена на фиг. 1 цифрой I.

При  $\gamma^2 > \gamma_*^2$  для существования нетривиальных решений должно выполняться  $\Delta_1 = 0$  или  $\Delta_2 = 0$ . В этом случае из (2.5) следует, что определитель  $\Delta_1$  действительный, а  $\Delta_2$  чисто мнимый. Равенство нулю  $\Delta_1$  или  $\Delta_2$  выделяет на плоскости  $(\gamma, \mu)$  дисперсионные кривые для краевых волн, распространяющихся вдоль трещины и экспоненциально затухающих при удалении от нее. Таким образом, для каждого значения  $\mu$  может существовать не более чем счетное число значений  $\gamma$ , при которых существует ограниченное решение уравнений (1.1), (2.1), (2.2). Поэтому область, ограниченную на плоскости  $(\gamma, \mu)$  кривой  $\gamma = \gamma_*$  и прямой  $\gamma = 0$ , можно назвать областью дискретного спектра. На фиг. 1 она обозначена цифрой II.

3. Рассмотрим подробнее вопрос о существовании краевых волн. Для этого достаточно показать, что величины  $\Delta_1(\gamma, \mu)$ ,  $\text{Im} \Delta_2(\gamma, \mu)$  меняют знак в области дискретного спектра. На границах этой области выполняется  $\lambda_1 = 0$ ,  $k_1 = 0$  при  $\gamma = 0$  и  $\gamma_1 = 1$ ,  $k_1 = 0$  при  $\gamma = \gamma_*$ . Отсюда находим

$$\Delta_1 = -\lambda_2 \lambda_2^* (k_2 + k_2^*) (\lambda_2 + \chi) (\lambda_2^* + \chi) + \nu [k_2 \lambda_2 (\lambda_2 + \chi) + K. C.] \quad (3.1)$$

$$\Delta_2 = \nu k_2 k_2^* [\lambda_2^* (\lambda_2^* + \chi) - K. C.], \quad \gamma = \gamma^*$$

Упростим выражение для  $\Delta_2$

$$\Delta_2 = i \frac{2\sqrt{3}}{\mu} k_2 k_2^* (2 - \nu) \left( \alpha^* (\gamma^*) - \frac{\mu}{2} \right)$$

Отсюда следует, что  $\text{Im} \Delta_2 > 0$  при  $\gamma = \gamma^*$ .

Выражение для  $\Delta_1$  имеет более сложный вид. Поэтому проведем асимптотические оценки для малых и больших значений  $\mu$

$$\Delta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\mu^{3/2} D^{3/4}} (1 + O(\mu^2)) < 0, \quad \mu \ll 1$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right)^{1/2} \Delta, \quad \Delta = -\nu^2 2\sqrt{3} (\sqrt{3} - 1) + \nu (13 - 4\sqrt{3}) - 6(2 - \sqrt{3}) + O(\mu^{-1}), \quad \mu \gg 1, \quad \gamma = \gamma^*$$

Отсюда следует, что возможность перемены знака  $\Delta_1$  зависит от величины коэффициента Пуассона  $\nu$ , который может изменяться в интервале  $(-1, 1/2)$ . При  $\nu \in (\nu', 1/2)$ ,  $\nu' \approx 0,303$  выполняется  $\Delta > 0$ . Численные исследования для различных значений  $\mu$  из этого интервала и  $D$  показывают, что в этом случае имеется одна ветвь дисперсионной кривой, соответствующая антисимметричным краевым волнам, выходящая при некотором значении  $\gamma > 0$  из граничной кривой  $\gamma = \gamma^*$ .

При  $\gamma = 0$

$$\Delta_1 = \text{Im} \Delta_2 = -\lambda_2 \lambda_2^* (k_2 + k_2^*) (\lambda_2 + \chi) (\lambda_2^* + \chi) < 0$$

Отсюда следует, что на плоскости  $(\gamma, \mu)$  имеется ветвь дисперсионной кривой, соответствующая симметричным краевым волнам, начинающаяся в точке  $\gamma = \mu = 0$ . Численный анализ для различных значений  $\nu$ ,  $D$  показывает, что эта ветвь единственная. В нуле она имеет высокий порядок касания с граничной кривой  $\gamma = \gamma^*$ . Качественная картина дисперсионных кривых для краевых волн при  $\nu = 0, 4$ ,  $D \approx 1$  представлена на фиг. 1. Цифры 1 и 2 обозначают ветви кривой, соответствующие антисимметричным и симметричным волнам. Область существования антисимметричных краевых волн не соответствует приближению мелкой воды. При  $\nu \rightarrow \nu'$  точка пересечения дисперсионной кривой 1 с кривой  $\gamma = \gamma^*$  стремится с бесконечности по  $\gamma$  и  $\mu$ .

Подставляя (2.3) в (1.1), легко найти профиль возвышения поверхности жидкости, соответствующий краевым волнам. Расчеты показывают, что профиль волн является монотонно убывающей при увеличении  $|x|$  функцией. При одинаковых частотах и амплитудах при  $|x| = 0$  амплитуда антисимметричных волн больше амплитуды симметричных волн при  $|x| \neq 0$ . Амплитуда антисимметричных волн имеет скачок при  $|x| = 0$ . Типичные профили симметричных и антисимметричных краевых волн одинаковой частоты, обозначенные цифрами 2 и 1 соответственно, приведены на фиг. 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17355).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stokes G. G.* Report on recent researches in hydrodynamics//Rep. 16th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci. L.: Murray, 1846. P. 1—20.
2. *Ефимов В. В., Куликов Е. А., Рабинович А. Б., Файн И. В.* Волны в пограничных областях океана. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 280 с.
3. *Grimshaw R.* The solitary wave in water of variable depth. Pt 2//J. Fluid Mech. 1971. V. 46. № 3. P. 611—622.
4. *Куликовский А. Г.* О влиянии подводного хребта на расходящуюся от точки нелинейную волну на поверхности жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 4. С. 100—105.
5. *Бахолдин И. Б.* Распространение уединенных волн над подводным хребтом//Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 86—93.
6. *Марченко А. В., Шрира В. И.* К теории двумерных нелинейных волн в жидкости под ледяным покровом//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 125—133.
7. *Марченко А. В.* Дифракция поверхностных волн на трещине в ледяном покрове//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 93—102.

Москва

Поступила в редакцию  
19.X.1993