

УДК 533.6.011 : 534.11

© 1994 г. С. А. ЕГОРУШКИН, А. Н. ТРОШКО

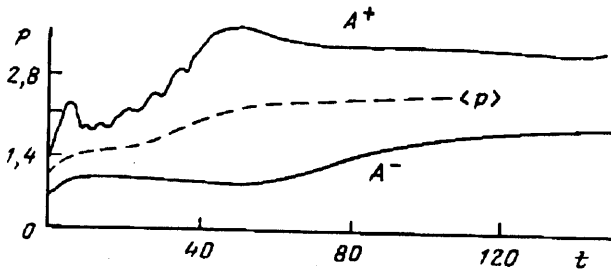
ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫЕ СИЛЬНОНЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ТРУБАХ

Численно исследуются околорезонансные сильнонелинейные колебания идеального совершенного газа в трубах с краевыми условиями различных типов. Колебания инициируются слабыми периодическими возмущениями на одном из концов трубы. В отличие от предыдущих работ [1—10] не делается предположений о малости амплитуды колебаний и учитывается рост энтропии в образующихся ударных волнах. Периодические режимы реализуются как пределы решения задачи Коши для системы уравнений одномерной, нестационарной газовой динамики.

Для разных типов краевых условий установлены амплитудно-частотные характеристики исследуемых колебаний. Показано, что в некоторых случаях выход решения на периодический режим сопровождается появлением длинноволновых модуляций. Обнаружен эффект «повторного резонанса», связанный с изменением собственной акустической частоты трубы при нагреве находящегося в ней газа проходящими по нему ударными волнами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарное течение идеального газа, покоящегося в начальный момент времени $t = 0$ в трубе единичной длины, диаметр которой будем считать постоянным и малым по сравнению с длиной. Течение индуцируется периодическими возмущениями с амплитудой ε и частотой Ω , задаваемыми при $t > 0$ на левом конце трубы ($x = 0$), и считается одномерным. Это предположение может нарушаться только около концов трубы. Фактор неоднородности становится существенным в задачах об автоколебаниях [11—15], когда причина существования незатухающих пульсаций давления состоит в неравномерности набегающего на трубу потока и особенностях течения в окрестности входа в трубу. В изучаемом же в настоящей работе случае (вынужденные колебания в длинных трубах) влияние структуры потока около концевых сечений трубы может быть учтено посредством краевых условий, описывающих средний по сечению приток или отток энергии к системе.

Если $\varepsilon \ll 1$ и $\varepsilon\Omega \ll 1$, то задачу о вынужденных колебаниях газа можно решать в линейном приближении. Однако в случае, когда Ω совпадает с Ω_0 — собственной акустической частотой трубы (условие резонанса), в решении появляются «вековые» члены, амплитуда вынужденных колебаний линейно растет со временем, и линейное приближение становится непригодным [7]. Условие $\Omega = \Omega_0$ может быть выполнено только для действительных Ω_0 . Если в невозмущенном состоянии газ в трубе покоится, так что распространением энтропийных волн можно пренебречь, то Ω_0 действительно тогда и только тогда, когда отсутствует приток или отток энергии к газу через концы трубы. Последнее означает, что $|K_1 K_2| = 1$, где K_1, K_2 — коэффициенты отражения, при помощи которых обычно записывают краевые условия на концах трубы ($x = 0 : J_1 = K_1 J_2, x = 1 : J_2 = K_2 J_1, J_{1,2}$ — возмущения инвариантов Римана). В случае одновременного выполнения неравенств $||K_1 K_2| - 1| \ll 1$ и $|\Omega - \Omega_0| \ll 1$ вынужденные колебания называются околорезонансными. Для правильного описания резонансных и околорезонансных колебаний необходимо учитывать нелинейные члены. В слабонелинейном случае порядок учитываемых членов зависит от типа краевых условий [1, 6, 7], однако



Фиг. 1

влиянием энтропии всегда можно пренебрегать [8], так что решение имеет чисто акустическую природу. Основной особенностью нелинейных колебаний газа является существование разрывных периодических решений, содержащих ударные волны [1—10]. Это связано с особенностью устройства спектра волнового оператора, выражающейся в том, что совпадение частоты внешнего возмущения с одной из точек спектра приводит к тому, что все прочие кратные частоты, возбуждающиеся в силу нелинейности, также попадают на спектр и имеют тенденцию к усилению [9]. Тем самым разложение нелинейного периодического решения в ряд Фурье становится условно сходящимся, что равносильно появлению разрывов. Отметим, что при изучении колебаний движущегося газа на поведение решения существенное влияние могут оказывать энтропийные волны, но этот случай в литературе до сих пор не рассматривался.

Упомянутое выше условие резонанса $|K_1 K_2| = 1$ выполняется, в частности, для акустически закрытых, открытых и полукрытых труб и соответствует условиям $u = U_0(t)$ — акустически закрытый конец трубы, и $p = P_0(t)$ — акустически открытый конец трубы. В соответствии с этим в работе рассматривались околорезонансные колебания четырех типов: (U, U) , (U, P) , (P, U) , (P, P) . Первая буква в каждой скобке соответствует типу краевого условия на левом конце трубы, а вторая — на правом. Периодические возмущения считались заданными всегда слева, при $x = 0$. При $x = 1$ задавались условия $u = 0$ или $p = \text{const}$ соответственно. Помимо типа краевых условий изучаемые колебания различались по амплитуде внешних возмущений ε и их частоте Ω , которая относилась к основному акустическому тону закрытого канала. В линейном приближении обезразмеренная таким образом резонансная частота Ω равняется 1 для резонансов типа (U, U) , (P, P) или 0,5 для резонансов типа (U, P) , (P, U) .

Основными характеристиками построенных решений являлись: закон изменения со временем давления в каком-либо сечении $x = \xi$ трубы $p_\xi(t)$; огибающие $A_\xi^+(t)$, $A_\xi^-(t)$ осциллирующих функций $p_\xi(t)$, описывающие изменения максимальных и минимальных значений давления в сечении $x = \xi$; амплитуда колебаний и изменение со временем среднего по периоду давления в сечении $x = \xi$ (фиг. 1 — резонанс (U, U) ; $\varepsilon = 0,2$; $\Omega = 1,3$):

$$A_\xi(t) = 0,5 (A_\xi^+ - A_\xi^-);$$

$$\langle p_\xi(t) \rangle = \left(\frac{1}{T} \right) \int_0^T p_\xi(t + \tau) d\tau$$

Везде в дальнейшем отсутствие индекса ξ означает, что рассматриваются сечения $x = 0$ для резонанса (U, P) , $x = 1$ для резонанса (U, U) , (P, U) и $x = 1/2$ для резонанса (P, P) .

Одномерные нестационарные уравнения Эйлера, описывающие вынужденные колебания газа, интегрировались численно. В начальном состоянии газ покоился, краевые условия подробно обсуждались выше. Расчеты велись методом Годунова на подвижных деформируемых сетках. Для проверки

точности полученных решений использовались сетки с 50, 100 и 200 ячейками на длине волны, число Куранта варьировалось от 0,9 до 0,225. В характерных случаях при переходе от 50 к 100 ячейкам при числе Куранта 0,9 амплитудная ошибка на 15 периодах составляла менее 1%, а фазовая достигала четверти периода. Последнее обстоятельство, однако, не представлялось существенным, так как все основные эффекты, связанные с фазами волн, происходили на первых трех-четыре периодах. Уменьшение числа Куранта от 0,9 до 0,225 при фиксированном числе ячеек не приводило к сколь-нибудь заметному изменению результатов. Подобной проверке на точность подвергались все наиболее интересные решения.

Проведенные расчеты показали, что сильная нелинейность существенно расширяет диапазон свойств изучаемой системы по сравнению с исследованным ранее слабонелинейным случаем [1—10].

В самой общей ситуации можно выделить три стадии временной эволюции решения: начальный участок, соответствующий выходу системы на периодический или близкий к нему режим, участок, где решение близко к периодическому или периодически, и, наконец, участок медленной эволюции периодического режима. В некоторых случаях, о которых будет подробно сказано ниже, на последнем участке возможен повторный резонанс, после которого в системе реализуются медленно затухающие квазипериодические колебания (фиг. 1).

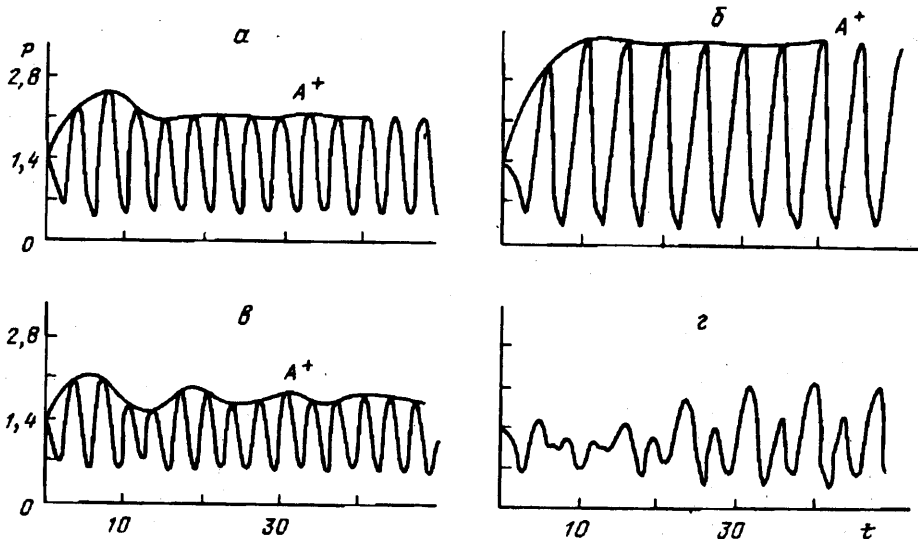
2. Выход на квазипериодический режим. Решение задачи Коши позволяет проследить основные закономерности выхода системы на квазипериодический режим. Термин «квазипериодический» употребляется здесь в связи с тем, что во многих случаях сильнонелинейных периодических решений задачи о вынужденных колебаниях не существует, хотя существование слабонелинейных периодических решений строго доказано [1—10]. Тем не менее всегда можно выделить большой по сравнению с $1/\Omega$ промежуток времени τ , на котором функции $A^+(t)$, $A^-(t)$, $A(t)$, $\langle p(t) \rangle$ будут меняться слабо, т. е. решение будет близко к периодическому.

Расчеты показали, что выход на квазипериодический режим происходит, как правило, немонотонным образом: на первых двух-трех периодах происходит быстрый рост функции $A^+(t)$ по закону, близкому к $A^+(t) = t \cdot \text{const}$, что соответствует «вековым» членам в линейном приближении [7]. Затем, в силу нелинейной стабилизации, $A^+(t)$ начинает убывать и выходит на асимптотику, близкую к константе (см. фиг. 2, а — резонанс (U, P) ; $\varepsilon = 0,2$; $\Omega = 0,55$). Иногда (резонансы (P, U) и (U, P) , частоты Ω , близкие к Ω_0) возможен монотонный выход на периодический режим (фиг. 2, б — резонанс (U, P) ; $\varepsilon = 0,2$; $\Omega = 0,45$).

При удалении системы от резонанса, стадия «линейного роста» может становиться менее заметной, зато на огибающих $A^+(t)$, $A^-(t)$, как правило, появляются длинноволновые модуляции и увеличивается время выхода на квазипериодический режим (фиг. 2, в — резонанс (U, P) ; $\varepsilon = 0,2$; $\Omega = 0,6$). Иногда поведение решения на начальном участке становится достаточно сложным, сильно отличаясь от «квазисинуса» (фиг. 2, г — резонанс (U, P) ; $\varepsilon = 0,2$; $\Omega = 0,25$). Тем не менее в большинстве случаев эволюция решения как функции параметра Ω протекает по следующей схеме.

Для каждого типа резонанса и значения амплитуды внешних возмущений ε существует величина $\Omega_*(\varepsilon)$, такая, что с ростом разности $\Omega - \Omega_*$ увеличивается отношение A_m/A , где A_m — амплитуда модуляций, $A = 0,5(A^+ - A^-)$ — амплитуда колебаний давления, увеличивается частота модуляций Ω_m и уменьшается декремент их затухания. Величина Ω_* совпадает с точкой экстремума, соответствующей амплитудно-частотной характеристике (см. разд. 3).

Появление затухающих модуляций можно объяснить следующим образом. В линейном приближении общее решение задачи о колебаниях газа в трубе представляется суперпозицией двух мод, одна из которых соответствует собственной акустической частоте трубы и отвечает за эволюцию начальных возмущений, а вторая имеет частоту внешних возмущений и описывает вынужденные колебания. Нелинейное взаимодействие этих волн и приводит к появлению модуляций,



Фиг. 2

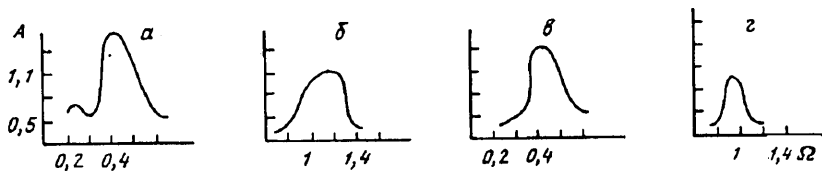
постепенное затухание которых связано с тем, что с течением времени система «подстраивается» под внешнюю частоту.

3. Квазипериодический режим. Основной характеристикой квазипериодического режима является зависимость амплитуды колебаний давления A от частоты Ω и амплитуды ε внешнего возмущения $A = A(\varepsilon, \Omega)$, называемой, обычно, амплитудно-частотной характеристикой. В линейном случае при $|K_1 K_2| = 1$ (K_i — коэффициенты отражения) функция $A(\Omega) \rightarrow \infty$, при $\Omega \rightarrow \Omega_0$ — собственной акустической частоты трубы. Термин «собственная частота» означает, что однородная краевая задача о распространении акустических волн в трубе имеет нетривиальное периодическое решение (собственную функцию) с периодом $T_0 = 2\pi/\Omega_0$.

В случае слабой нелинейности ($0 < \varepsilon \ll 1$), $A \sim \sqrt{\varepsilon}$ для резонансов (U, U) , (P, P) и $A \sim \sqrt[3]{\varepsilon}$ для резонансов (U, P) и (P, U) [1—10]. При этом $\max [A(\Omega)] = A(\Omega_0)$ и $(\Omega - \Omega_0)(dA/d\Omega) < 0$, т. е. амплитуда вынужденных колебаний монотонно падает с ростом $\Omega - \Omega_0$. Можно показать [9], что однородная краевая задача о распространении в трубе слабонелинейных акустических волн также может иметь нетривиальное периодическое решение. Условием его существования, по крайней мере для краевых условий типа (U, U) , является выполнение неравенства $k = |K_1 K_2| - 1 > 0$ (приток энергии к газу). Амплитуда этого решения определяется величиной k , а частота в точности совпадает с Ω_0 . Нетривиальные периодические решения с частотами $\Omega \neq \Omega_0$ не существуют [9].

Основное отличие сильнонелинейного случая состоит в том, что $\max [A(\Omega)] = A(\Omega_*)$, причем $\Omega_* = \Omega_*(\varepsilon) \neq \Omega_0$. Для резонансов типа (U, U) $\Omega_*(\varepsilon) > \Omega_0$, а во всех прочих случаях $\Omega_*(\varepsilon) < \Omega_0$; при этом всегда $\Omega_*(\varepsilon) \rightarrow \Omega_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

На фиг. 3 представлены амплитудно-частотные характеристики резонансов различных типов, построенные при $\varepsilon = 0,2$. Невозмущенное давление полагалось равным $p(0) = 1,0$. Фигура 3, а соответствует резонансу (U, P) , когда $\Omega_0 = 0,5$; $\Omega_* = 0,4$; $A(0,25) = 0,75$; $A(0,40) = 1,68$; $A(0,50) = 1,23$. Фигура 3, б соответствует резонансу (U, U) , когда $\Omega_0 = 1,0$; $\Omega_* = 1,2$; $A(1,00) = 0,91$; $A(1,20) = 1,11$; $A(1,30) = 0,95$. Фигура 3, в соответствует резонансу (P, U) , когда $\Omega_0 = 0,5$; $\Omega_* = 0,4$; $A(0,35) = 0,59$; $A(0,40) = 1,37$; $A(0,55) = 0,86$. Фигура 3, г соответствует резонансу (P, P) , когда $\Omega_0 = 1,0$; $\Omega_* = 0,95$; $A(0,80) = 0,44$; $A(0,95) = 0,94$; $A(1,10) = 0,35$.



Фиг. 3

Зависимость знака $\Omega_* - \Omega_0$ от типа краевых условий может быть истолкована следующим образом. Естественно предполагать, что максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний достигается тогда, когда период внешних возмущений T совпадает со временем $T_*(\epsilon)$, которое тратит нелинейная волна на прохождение трубы в обе стороны (резонансы (U, U) , (P, P)), или равен $2T_*$ для резонансов (U, P) и (P, U) . На значение T_* влияют два основных фактора: ненулевая скорость течения, за счет которой T_* увеличивается, и большая, по сравнению со звуковой, скорость распространения по трубе образующихся в ней ударных волн, что приводит к уменьшению T_* . Для резонанса типа (U, U) , когда ударные волны отражаются от концов трубы в виде ударных волн, преобладающим является второй фактор. Поэтому $T_* < T_0$ — времени прохождения трубы акустическими волнами, а $\Omega_* > \Omega_0$. Для резонансов остальных типов, когда ударные волны отражаются от конца трубы с краевым условием типа $p = P_0(t)$ в виде волн Римана, преобладает первый фактор. Поэтому в этих случаях $\Omega_0 > \Omega_*$. Знак производной $d(1\Omega_* - \Omega_0)/d\epsilon$ определяется тем, что с увеличением ϵ растет интенсивность распространяющихся по трубе волн, что, в свою очередь, приводит к увеличению скоростей газа и ударных волн.

Таким образом, действие каждого из упомянутых факторов усиливается, увеличивая разность $|\Omega_* - \Omega_0|$. В экспериментах по изучению автоколебаний в полуоткрытых трубах [12, 13] наблюдалось уменьшение частоты пульсаций давления, происходящее с ростом их интенсивности. Это соответствует установленному выше неравенству $\Omega_* < \Omega_0$ для резонанса типа (P, U) и говорит о том, что по аналогии со слаболинейным случаем величину Ω_* можно трактовать как частоту собственной функции однородной нелинейной задачи с краевыми условиями, обеспечивающими подвод энергии к системе, т. е. усиление отражающихся от концов трубы волн.

Для резонанса (U, P) левая ветвь амплитудно-частотной характеристики является немонотонной и имеет локальный максимум при $\Omega = 0,3$ (фиг. 3, а), что может быть истолковано как резонанс второй кратной гармоники, возникающей вследствие нелинейного взаимодействия исходной волны с собой.

Проведенные вычисления показали, что для резонансов типа (U, U) и (U, P) характеристики квазипериодического режима существенно зависят не только от амплитуды ϵ и частоты Ω , а также и от начальной фазы φ внешних возмущений (колебаний поршня). А именно если при $t=0$ $x_p(0) = 0$, а при $t > 0$ $u_p(t) = \epsilon \sin(\pi\Omega t + \varphi)$, то величины A^+ , A^- , A являются непрерывными, периодическими с периодом, равным 2π функциями φ .

Для прояснения сути вопроса проинтегрируем уравнение движения поршня $dx_p/dt = u_p$, $u_p = \epsilon \sin(\pi\Omega t + \varphi)$, $x_p(0) = 0$. Тогда $\langle x_p(t) \rangle = \epsilon \cos(\varphi)/(\pi\Omega)$, т. е. при разных φ колебания развиваются в трубах, с различной средней длиной $L(\varphi) = 1 - \epsilon \cos(\varphi)/(\pi\Omega)$. В слаболинейном случае ($\epsilon \ll 1$) изменение средней длины трубы, связанное с движением поршня, не входит в уравнение для периодических решений [1—6], так как представляет собой малую величину более высокого порядка по сравнению с учитываемыми членами.

В сильнонелинейном случае зависимость параметров вынужденных колебаний

от изменения средней длины трубы оказалась довольно сильной. Пусть $\rho(\varphi, \varepsilon, \Omega)$ есть среднее по достаточно большому, по сравнению с Ω^{-1} , промежутку времени отношения $A^+(\varphi, \varepsilon, \Omega, t)/A^+(0, \varepsilon, \Omega, t)$, характеризующее различие квазипериодических режимов, на которые выходит система при разных φ . Пусть также $\rho_+ = \max[\rho(\varphi)]$, $\rho_- = \min[\rho(\varphi)]$, а $\varphi_{+,-}$ определяются из соотношений $\rho(\varphi_{+,-}) = \rho_{+,-}$. Тогда, например, для резонанса типа (U, U) при $\varepsilon = 0,2$, $\Omega = 1,0$, $\varphi_- = 0$, $\varphi_+ = \pi$, $d\rho/d\varphi > 0$, $\rho_+ = 1,25$, $\rho_- = 1$; а для резонанса типа (U, P) при $\varepsilon = 0,2$, $\Omega = 0,5$, $\varphi_- = \pi$, $\varphi_+ = 0$, $d\rho/d\varphi < 0$, $\rho_+ = 1$, $\rho_- = 0,4$. Последнее равенство означает, что максимальные значения пульсаций давления, достигаемых в трубе, различаются в 2,5 раза при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. В обоих случаях при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\rho_{+,-} \rightarrow 1$, кроме того, величины $\rho_{+,-}$, $\varphi_{+,-}$ зависят от Ω . Так, например, для резонанса (U, P) при $\Omega = 0,4$ $\varphi_+ = \pi$, а $\varphi_- = 0$ и $d\rho/d\varphi > 0$, так же как для резонанса (U, U) при $\Omega = 1,0$.

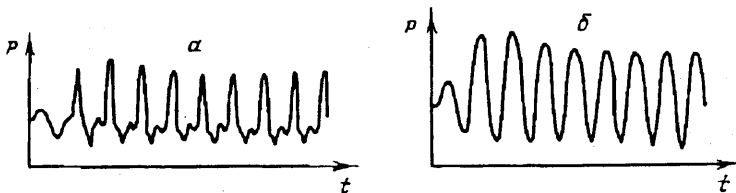
Различие в значениях величины ρ_+/ρ_- для резонансов (U, U) и (U, P) обусловлены тем, что относительная разница в средних длинах труб при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, определенная как $\delta_L = 2 [L(\pi) - L(0)] / [L(\pi) + L(0)] = 2\varepsilon/(\pi\Omega)$, достигает значения $\delta_{L_U} = 0,127$ при $\varepsilon = 0,2$, $\Omega = 1$ в резонансе (U, U) и $\delta_{L_P} = 0,254$ при $\varepsilon = 0,2$, $\Omega = 0,5$ в резонансе (U, P) . Именно в силу того, что $\delta_{L_P} = 2\delta_{L_U}$ зависимость характеристик квазипериодического режима от значения φ в резонансе (U, P) оказывается существенно сильнее, чем в резонансе (U, U) . Так как $\delta L(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, в расчетах величины $\rho_{+,-}(\varphi, \varepsilon, \Omega) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Найденные выше амплитудно-частотные характеристики позволяют объяснить качественный вид функции $\rho(\varphi, \varepsilon, \Omega)$, связанный с изменением собственных акустических частот трубы при изменении ее средней длины.

4. Эволюция квазипериодического режима. Одним из существенных отличий, приносимых сильной нелинейностью, является возможность несуществования периодических решений задачи о вынужденных колебаниях. Это связано с ростом энтропии в образующихся ударных волнах, что приводит к изменениям со временем средних параметров течения. В слаболинейном случае изменением энтропии в ударных волнах можно пренебрегать с точностью до порядка учитываемых нелинейных членов в асимптотических разложениях [8].

Наиболее ярко влияние роста энтропии на характер течения проявляется в резонансах типа (U, U) , когда ударные волны отражаются от концов трубы в виде ударных волн и постоянно присутствуют в решении. Рост энтропии приводит к увеличению средней температуры газа и, в силу сохранения средней плотности (масса газа и средний объем трубы постоянны), к росту среднего давления. Тем самым возрастает средняя скорость звука и основная акустическая частота трубы Ω_0 . Одновременно с Ω_0 увеличивается и Ω_* , соответствующая точке максимума амплитудно-частотной характеристики. Если при $t = 0$ частота внешних возмущений $\Omega > \Omega_*$, то с ростом t разность $\Delta\Omega = (\Omega - \Omega_*) \rightarrow 0$. Характерное время T изменения $\Delta\Omega$ оказывается, как правило, много больше времени τ выхода системы на квазипериодический режим. Чем меньше $\Delta\Omega$, т. е. чем ближе частота Ω к точке максимума амплитудно-частотной характеристики, тем больше интенсивность образующихся в решении ударных волн, тем быстрее растут энтропия и средняя температура и тем больше скорость изменения $\Delta\Omega$. Таким образом, после стадии медленной эволюции происходит быстрая перестройка квазипериодического режима, сопровождающаяся ростом амплитуды колебаний давления. Это явление и было названо повторным резонансом (фиг. 1 — резонанс (U, U) ; $\varepsilon = 0,2$; $\Omega = 1,3$).

В последующие моменты времени величина $\Delta\Omega$ становится отрицательной, а $|\Delta\Omega|$ начинает возрастать. При этом система «уходит от резонанса». Возникает второй квазипериодический режим, в котором амплитуда колебаний медленно



Фиг. 4

убывает со временем (фиг. 1). Отметим, что при $\Omega < \Omega_*$ повторного резонанса нет ($\Delta\Omega < 0$ уже при $t = 0$), а имеет место монотонное убывание амплитуды колебаний, связанное, как правило, с ростом величины A^- при сохраняющихся значениях A^+ .

Время T выхода системы на повторный резонанс растет с увеличением разности $\Omega - \Omega_*$ и уменьшением ε . Это связано с тем, что при увеличении Ω растет и значение средней температуры, при которой выполняется условие $\Omega = \Omega_*$, т. е. достигается повторный резонанс. Уменьшение же ε приводит к уменьшению интенсивности ударных волн и, следовательно, к увеличению времени нагрева газа до нужной температуры. Отметим также, что эффект нагрева газа при автоколебаниях неоднократно наблюдался в различных экспериментах [11, 12].

В подтверждение высказанных соображений о «тепловой» природе повторного резонанса проводились расчеты с учетом теплоотвода в стенки трубы. Поток тепла в стенки был пропорционален разности температуры газа и температуры стенок, которая считалась постоянной. Оказалось, что теплоотвод стабилизирует колебания, делая их периодическими. При этом в зависимости от теплопроводности стенок и их температуры выход на периодический режим происходит как после повторного резонанса, так и до (вместо) него. Одновременно уменьшается амплитуда колебаний по сравнению с теплоизолированным случаем.

Амплитуда колебаний и качественный вид функции $p_\xi(t)$ могут меняться по длине трубы, что связано с нелинейным взаимодействием распространяющихся по трубе волн. В промежуточных сечениях функция $p_\xi(t)$ имеет, как правило, более сложную структуру (фиг. 4 — резонанс (P, U); $\varepsilon = 0,2$; $\Omega = 0,5$; фиг. 4, а соответствует $\xi = 0,25$, а фиг. 4, б — $\xi = 1,0$). Однако все основные отмеченные выше закономерности остаются справедливыми для любого сечения.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. Г. Куликовскому и А. А. Бармину за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17355).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chester W. Resonant oscillations in closed tubes//J. Fluid Mech. 1964. V. 18. № 1. P. 44—64.
2. Keller J. Resonant oscillations in closed tubes: The solutions of Chester's equation//J. Fluid Mech. 1976. V. 2. P. 279—304.
3. Keller J. J. Nonlinear acoustic resonances in shock tubes with varying cross-sectional area//ZAMP. 1977. Bd 28. № 1. S. 107—122.
4. Seymour B. R., Mortell M. P. Resonant acoustic oscillations with damping: small rate theory//J. Fluid Mech. 1973. V. 58. № 2. P. 353—373.
5. Mortell M. P., Seymour B. R. A finite-rate theory of quadratic resonance in closed tubes//J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 411—431.
6. Jimenez J. Nonlinear gas oscillations in pipes. Pt. 1. Theory//J. Fluid Mech. 1973. V. 59. № 1. P. 23—46.

7. *Collins W. D.* Forced oscillations of systems governed by one-dimensional non-linear wave equations//*Quart J. Mech. and Appl. Math.* 1971. V. 24. № 2. P. 129—153.
8. *Keller J. J.* Third order resonances in closed tubes//*ZAMP.* 1976. Bd 27. № 3. S. 303—334.
9. *Крайко А. Н., Ни А. Л.* О приближении нелинейной акустики в задачах о колебаниях газа в трубах//*ПММ.* 1980. Т. 44. № 1. С. 77—88.
10. *Ни А. Л.* Нелинейные резонансные колебания газа в трубе под воздействием периодически изменяющегося давления//*ПММ.* 1983. Т. 47. № 4. С. 607—618.
11. *Егорушкин С. А.* Околорезонансные колебания газа, движущегося в канале переменного сечения//*Изв. АН СССР. МЖГ.* 1984. № 4. С. 107—115.
12. *Ни А. Л.* Нелинейные субрезонансные колебания газа в трубе под воздействием периодически изменяющегося давления//*Изв. АН СССР. МЖГ.* 1988. № 2. С. 151—157.
13. *Cox E. A., Mortell M. P.* The evolution of resonant acoustic oscillation with damping // *Elast. Wave Propag.: Proc. 2-nd IVTAMIUPAP Symp. Galway, Way, Mach 20—25, 1988. Amsterdam etc, 1989.* P. 173—178.

Москва

Поступила в редакцию
18.11.1993