

УДК 532.59

© 1994 г. А. Е. БУКАТОВ

## НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В БАССЕЙНЕ С БИТЫМ ЛЬДОМ

Рассмотрено нелинейное взаимодействие периодических бегущих волн первой и второй гармоник в покрытой битым льдом однородной жидкости постоянной конечной глубины. Методом многих масштабов получены равномерные асимптотические разложения до величин третьего порядка для потенциала скорости движения жидкости и возвышения поверхности бассейна. Выполнен анализ зависимости волновых возмущений от толщины льда и характеристик взаимодействующих гармоник.

В линейном приближении влияние льда на волновые возмущения исследовалось в [1—3]. Распространение нелинейных волн в ледовых условиях рассмотрено в [4] для бассейна малой и в [5] — произвольной постоянной глубины.

1. Пусть поверхность однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный бассейн конечной глубины  $H$ , покрыта плавающим льдом. Рассмотрим влияние льда на нелинейное взаимодействие периодических бегущих волн первой и второй гармоник. При этом пренебрежем трением льдин, а их размеры будем предполагать малыми по сравнению с длинами волн возмущений. Такие допущения позволяют считать лед битым [1, 6—8] и при исследовании колебаний учитывать из восстанавливающих сил только силу тягести. Тогда в предположении потенциальности движения жидкости в безразмерных переменных  $x = kx_1$ ,  $z = kz_1$ ,  $t = \sqrt{kg} t_1$ , где  $k$  — волновое число, задача сводится к следующей:

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H < z < \zeta \quad (1.1)$$

$$\zeta - \varphi_t + \kappa k \zeta_{tt} + 1/2 (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) = 0, \quad z = \zeta$$

$$\varphi_z = 0, \quad z = -H \quad (1.2)$$

$$\zeta = f(x), \quad \zeta_t = 0, \quad t = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\kappa = h\rho_1/\rho$ ,  $h$  и  $\rho_1$  — толщина и плотность льда,  $\rho$  — плотность жидкости. Потенциал скорости  $\varphi$  и возвышение поверхности бассейна  $\zeta$  связаны кинематическим соотношением

$$\zeta_t - \zeta_x \varphi_x + \varphi_z = 0 \quad (1.4)$$

При  $\kappa = 0$  из (1.2) следует динамическое условие на свободной от льда поверхности [9—14].

Решение задачи (1.1)—(1.4) найдем методом многих масштабов [15], позволяющих получить для  $\zeta$  и  $\varphi$  равномерно пригодные разложения и применяющимся к широкому кругу задач, в том числе и в теории волн на воде [11] и в атмосфере [16]. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с  $t = T_0$  переменные  $T_1 = \varepsilon t$  и  $T_2 = \varepsilon^2 t$ . Здесь  $\varepsilon$  — малое, но конечное. Предполагая справедливость разложений

$$\bar{u}\zeta_n, \varphi, fA = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \bar{u}\zeta_n, \varphi_n, f_n A + O(\varepsilon^4) \quad (1.5)$$

где  $f_n$  — функции от  $x$ , а  $\zeta_n, \varphi_n$  — от  $x, T_0, T_1, T_2$ , для приближений порядка  $\varepsilon^n$ ,  $n = 1, 2, 3$  из (1.1)–(1.4) получим соответственно

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H < z < 0 \quad (1.6)$$

$$\zeta_n - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} + \kappa \kappa \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial T_0^2} = p_n, \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n, \quad z = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -H \quad (1.8)$$

$$\zeta_n = f_n(x), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n, \quad t = 0 \quad (1.9)$$

$$p_1 = L_1 = G_1 = 0$$

$$p_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] - 2\kappa \kappa \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial T_0 \partial T_1}$$

$$L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}, \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}$$

$$p_3 = \zeta_1 N_1 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \kappa \kappa N_2$$

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}$$

$$N_2 = \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial T_0 \partial T_1} + 2 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial T_0 \partial T_2}$$

$$L_3 = \zeta_1 \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + N_3$$

$$N_3 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}, \quad G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}$$

2. Предположим, что в начальный момент времени возмущение поверхности бассейна в первом приближении имеет вид  $\zeta_1 = \cos x + a_1 \cos 2x$ , где  $a_1$  — постоянная порядка единицы. Тогда, учитывая взаимосвязь волновых характеристик через граничные условия задачи (1.6)–(1.8), для периодических бегущих волн при  $n = 1$  найдем

$$\zeta_1 = \cos \theta + a_1 \cos 2\theta \quad (2.1)$$

$$\theta = x + \tau T_0 + \beta_1(T_1, T_2), \quad \beta_1(0) = 0$$

$$\varphi_1 = \tau \left[ \frac{\operatorname{ch}(z+H)}{\operatorname{sh} H} \sin \theta + a_1 \frac{\operatorname{ch} 2(z+H)}{\operatorname{sh} 2H} \sin 2\theta \right]$$

$$\tau^2 = \tau_0^{-1} \operatorname{th} H, \quad \tau_0 = 1 + \kappa \kappa \operatorname{th} H$$

Амплитуду  $a_1$  и фазовый сдвиг  $\beta_1$  определим из последующих приближений.

Подставив  $\zeta_1$ ,  $\varphi_1$  в правые части условий (1.7) для второго приближения и решив задачу (1.6)—(1.8) при  $n = 2$  с учетом требования отсутствия первой и второй гармоник в частном решении, получим

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta + \sum_{n=3}^4 a_{2n} \cos n\theta \quad (2.2)$$

$$\varphi_2 = \tau^2 b_{20} t + \tau \sum_{n=1}^4 b_{2n} \operatorname{ch} n(z+H) \operatorname{sh}^{-1} nH \sin n\theta$$

$$a_{2n} = -a_1 \tau^2 F_n \mu_n^{-1}, \quad \mu_n = (1 - n^2 \kappa \tau^2) \operatorname{th} nH - n\tau^2, \quad n = 3, 4$$

$$F_3 = 1/2 [3(2 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H) + (2 \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - 7) \operatorname{th} 3H]$$

$$F_4 = [4 \operatorname{cth} 2H + (\operatorname{cth}^2 2H - 3) \operatorname{th} 4H] a_1$$

$$b_{20} = 1/4 [\operatorname{cth}^2 H + 1 + 4a_1^2 (\operatorname{cth}^2 2H - 1)]$$

$$b_{21} = -1/2 a_1 (2 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H) + \sigma_1, \quad b_2 = a_2 + a_0, \quad \sigma_1 = \tau_1 \tau^{-1}$$

$$b_{23} = a_{23} - 1/2 a_1 (2 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H), \quad b_{24} = a_{24} - a_1^2 \operatorname{cth} 2H$$

$$a_0 = a_1 \sigma_1 - 1/2 \operatorname{cth} H, \quad \tau_1 = 1/4 a_1 \tau \tau_0^{-1} [4 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H - 3 \operatorname{th} H]$$

$$a_1 = \pm 1/2 [\tau_0 \tau_*^{-1} \operatorname{cth} H \operatorname{th} 2H]^{1/2}, \quad \tau_* = 1 + 2\kappa \operatorname{th} 2H$$

$$\beta_1 = \varepsilon \tau_1 t + \beta_2 (T_2)$$

а выражения для  $a_2$  и  $\beta_2$  определим из третьего приближения.

Полученные решения для первого (2.1) и второго (2.2) приближений определяют правые части динамического и кинематического условий (1.7) при  $n = 3$ . Исключив в них слагаемые, порождающие секулярность, найдем

$$a_2 = 1/2 \omega_1^{-1} (\omega_2 - \delta), \quad \beta_2 = \varepsilon^2 \tau_2 t, \quad \tau_2 = \omega_2 - \omega_1 a_2$$

$$\omega_1 = -\frac{\tau_1}{a_1}, \quad \omega_2 = \frac{\tau}{2\tau_0} (\gamma_1 - q \operatorname{th} H), \quad \delta = \frac{\tau}{4a_1 \tau_*} (\gamma_2 - q_2 \operatorname{th} 2H)$$

$$\gamma_1 = 1/2 a_1 (b_{21} \operatorname{cth} H + 3b_{23} \operatorname{cth} 3H) + (a_0 + a_1 a_{23}) \operatorname{cth} 2H + 9/4 a_1^2 + 3/8$$

$$\gamma_2 = (b_{21} + a_{23}) \operatorname{cth} H + a_1 (2a_{24} \operatorname{cth} 2H + 4b_{24} \operatorname{cth} 4H + 3) + 3(b_{23} \operatorname{cth} 3H + a_1^3)$$

$$q_1 = \sum_{n=1}^3 q_{1n}, \quad q_2 = \sum_{n=1}^3 q_{2n}$$

$$q_{11} = a_1 (5/2 \sigma_1 - 1/2 b_{21} + 2a_{23}) + a_0 + \kappa \sigma_1^2$$

$$q_{12} = (\sigma_1 b_{21} - 7/4 a_1^2 - 5/8) \operatorname{cth} H - 5a_1^2 \operatorname{cth} 2H$$

$$q_{13} = a_1 b_{23} (3/2 - 3 \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} 3H) - (a_0 + a_1 b_{21}) \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H$$

$$q_{21} = (2a_0 \sigma_1 - 5a_1^3 + a_1) \operatorname{cth} 2H - 5/2 a_1 \operatorname{cth} H$$

$$q_{22} = 4a_1 b_{24} (1 - \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} 4H) + b_{21} (1 - 1/2 \operatorname{cth}^2 H) + 3/2 b_{23} (2 - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 3H)$$

$$q_{23} = 2a_1 (a_{24} + 2\kappa \sigma_1^2) + 1/2 (a_{23} + \sigma_1)$$

Тогда решение задачи (1.5)—(1.7) для третьего приближения имеет вид

$$\zeta_3 = a_3 \cos 2\theta + \sum_{n=3}^6 a_{3n} \cos n\theta$$

$$\varphi_3 = \tau^2 b_{30} t + \tau \sum_{n=1}^6 b_{3n} \operatorname{ch} n(z+H) \operatorname{sh}^{-1} nH \sin n\theta$$

$$a_{3n} = \tau^2 (q_n \operatorname{th} nH - \gamma_n) \mu_n^{-1}, \quad n = 3, 4, 5, 6$$

$$\gamma_3 = \gamma_{31} + \gamma_{32}, \quad \gamma_{31} = 27/8 a_1^2 - 3a_{23} \sigma_1 + 3/8$$

$$\gamma_{32} = 3/2 (b_{21} a_1 + a_2 + a_{24}) \operatorname{cth} H + 3 (a_0 + a_2) \operatorname{cth} 2H + 6b_{24} \operatorname{cth} 4H$$

$$\gamma_4 = 2a_{23} \operatorname{cth} H + a_1 [4 (2a_2 + a_0) \operatorname{cth} 2H + 3] + 6b_{23} \operatorname{cth} 3H - 4a_{24} \sigma_1$$

$$\gamma_5 = 5/2 a_{24} \operatorname{cth} H + a_1 (5a_{23} \operatorname{cth} 2H + 15/2 b_{23} \operatorname{cth} 3H) + 10b_{24} \operatorname{cth} 4H + 45/8 a_1^2$$

$$\gamma_6 = a_1 (6a_{24} \operatorname{cth} 2H + 12b_{24} \operatorname{cth} 4H) + 3a_1^2$$

$$q_3 = \sum_{n=1}^3 q_{3n}, \quad q_4 = \sum_{n=1}^2 q_{4n}, \quad q_5 = \sum_{n=1}^2 q_{5n}$$

$$q_6 = a_1 [4b_{24} (3 - \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} 4H) + a_1^2 \operatorname{cth} 2H + 2a_{24}]$$

$$q_{31} = a_2 (7/2 - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H) + 3 (b_{23} \operatorname{cth} 3H + 6\kappa a_{24}) \sigma_1$$

$$q_{32} = a_1 [b_{21} (3/2 - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H) + 5/2 \sigma_1] - a_1^2 (11/8 \operatorname{cth} H - 1/2 \operatorname{cth} 2H)$$

$$q_{33} = 2b_{24} (3 - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 4H) + a_0 (3 + \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H) + 1/8 \operatorname{cth} H + 1/2 a_{24}$$

$$q_{41} = 2\sigma_1 [2 (b_{24} \operatorname{cth} 4H + 8\kappa a_{24}) + a_1^2] + 3/2 b_{23} (4 - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 3H)$$

$$q_{42} = 2a_1 [a_2 (3 - \operatorname{cth}^2 H) + a_0 (2 - \operatorname{cth}^2 2H) + 3/4 \operatorname{cth} 2H - 1/8 \operatorname{cth} H] + 1/2 a_{23}$$

$$q_{51} = 2b_{24} (5 - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 4H) + 1/2 a_{24} - a_1^2 (3/8 \operatorname{cth} H - 5/2 \operatorname{cth} 2H)$$

$$q_{52} = 2a_1 [a_{23} + 3/4 b_{23} (5 - 2 \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} 3H)]$$

$$b_{30} = 1/2 [\sigma_1 (1 + 4a_1^2) - b_{21} \operatorname{cth}^2 H] - 2a_1 [b_{22} \operatorname{cth}^2 2H + 1/8 (5 \operatorname{cth} H + 2 \operatorname{cth} 2H) - a_2]$$

$$b_{3n} = (1/n) (na_{3n} + \gamma_n), \quad a_{31} = -\sigma_2 + a_2 \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H$$

$$a_{32} = a_3 + (a_1 \sigma_2 + a_2 \sigma_1), \quad \sigma_2 = \tau_2 \tau^{-1}$$

а величина  $a_3$  может быть определена из уравнений для четвертого приближения.

Таким образом, возмущение покрытой битым льдом поверхности бассейна конечной глубины при нелинейном взаимодействии периодических прогрессивных волн первой и второй гармоник до величин третьего порядка определяется выражением, справедливым при любом значении  $k$

$$\zeta = \varepsilon \cos \theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos 2\theta + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \sum_{j=3}^4 a_{n,j} \cos j\theta + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^6 a_{3n} \cos n\theta \quad (2.4)$$

$$\theta = kx + \sigma t, \quad \sigma = \tau \sqrt{kg} (1 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2)$$

$$n (1 + n\kappa \operatorname{th} H) \operatorname{th} H \neq (1 + \kappa \operatorname{th} H) \operatorname{th} nH, \quad n = 2, 3, \dots$$

Величина  $\varepsilon$  представляет здесь безразмерную малую, но конечную амплитуду первой гармоники. Соответствующее выражение на основании формул (1.5),

(2.1)—(2.3) можно записать и для потенциала скорости. Фазовую скорость волновых возмущений определим из формулы

$$v = v_1 (1 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2), \quad v_1 = \tau \sqrt{g/k}$$

Из полученных соотношений следует, что частота  $\sigma$  и фазовая скорость  $v$  зависят не только от толщины льда, но и от амплитуды взаимодействующих гармоник. Причем влияние амплитуд в ледовых условиях и при отсутствии льда сказывается как в первом, так и втором приближениях. В случае  $a_1 = 0$  частота и фазовая скорость распространения волн в бассейне со свободной поверхностью [9—14] и покрытом льдом [4, 5] зависят от амплитуды начальной гармоники только во втором приближении. Величина амплитуды  $a_1$  второй начальной гармоники, как видно из формулы (2.2), может изменяться в пределах от  $1/2$  до  $1/\sqrt{2}$  при отсутствии льда. В покрытом льдом бассейне ее значения для коротких ( $a_1^{(s)}$ ) и длинных ( $a_1^{(l)}$ ) волн найдем соответственно из формул

$$a_1^{(s)} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \kappa k}{1 + 2\kappa k}}, \quad a_1^{(l)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + \kappa k^2 H}{1 + 4\kappa k^2 H}}$$

При аналогичных условиях выражение  $\sigma_0 = \tau \sqrt{kg} \sigma_1$ , характеризующее фазовый сдвиг в приближении порядка  $\varepsilon$ , примет вид

$$\sigma_0^{(s)} = \pm \frac{1}{4(1 + \kappa k)} \sqrt{\frac{kg}{1 + 2\kappa k}}, \quad \sigma_0^{(l)} = \pm \sqrt{\frac{g}{2H}} \frac{3 - (kH)^2}{4(1 + \kappa k^2 H) \sqrt{1 + 4\kappa k^2 H}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_0^{(s)} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \sigma_0^{(l)} = \pm \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

При отсутствии льда

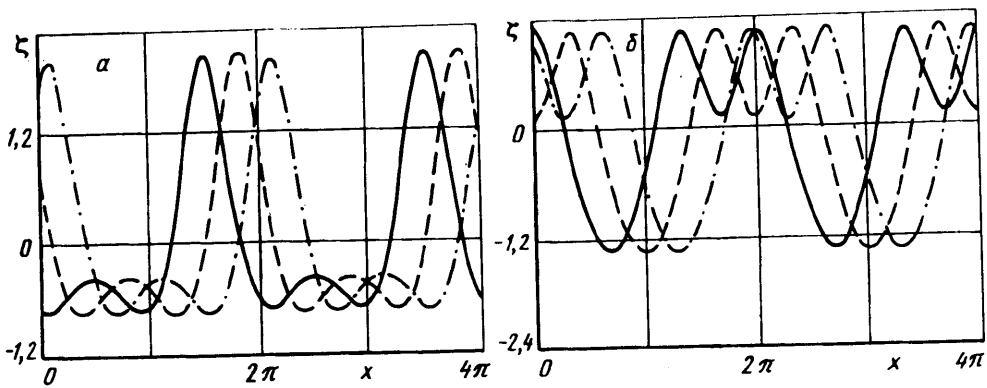
$$\sigma_0^{(s)} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{kg}, \quad \sigma_0^{(l)} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{2H}} [3 - (kH)^2]$$

Направленность фазового сдвига определяется знаком амплитуды  $a_1$ .

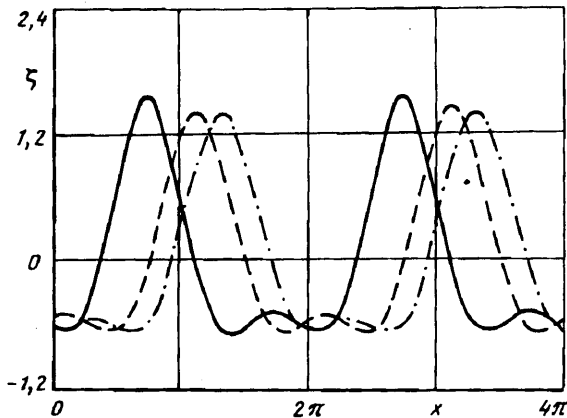
3. Для количественной оценки зависимости волнового возмущения от ледовых условий и характеристик взаимодействующих гармоник проводились численные расчеты при  $\kappa = 0,87h$ . Некоторые из результатов расчетов для наглядности изображены графически. Пространственные профили  $\zeta$  поверхности бассейна даны на фиг. 1 и 2 сплошными, штриховыми, штрихпунктирными линиями для толщин льда 0, 5, 10 м и 0, 3, 5 м при  $\varepsilon = (2/\pi) \cdot 10^{-3}$ ,  $t = \varepsilon^{-2}$ ,  $k = 10^{-4} \text{ м}^{-1}$  и  $\varepsilon = 10^{-1}$ ,  $t = \varepsilon^{-1}$ ,  $k = 10^{-1} \text{ м}^{-1}$  соответственно. Верхние графики на фиг. 1 отражают результат взаимодействия гармоник при положительном значении  $a_1$ , а нижние — при отрицательном.

Из анализа результатов следует, что нелинейность проявляет влияние льда даже на длинные волны, практически отсутствующее в линейной постановке [1—3]. При этом оно, усиливаясь со временем, выражается главным образом в фазовом сдвиге пространственного распределения волновых возмущений, обусловленного тормозящим воздействием льда. Чем большие длины волн начальных гармоник, тем позднее обнаруживаются фазовые отличия при равных значениях  $h$ . В частности, профили  $\zeta(x)$  в случае  $k = 10^{-4} \text{ м}^{-1}$  и  $\varepsilon \cdot 10^3$ , равных 1, 2, 3, одинаковые для  $h = 0$  и для  $h = 3$  м, если  $t = \varepsilon^{-1}$ , и заметно смещены в пространстве при аналогичных условиях, если  $t = \varepsilon^{-2}$ .

На коротких волнах влияние льда проявляется в уменьшении не только фазовой скорости, но и амплитуды (фиг. 2). Причем оно ярче выражено при положительном значении  $a_1$ , чем при отрицательном. Изменение знака  $a_1$  деформирует пространственный профиль возвышений и количественно и качест-



Фиг. 1

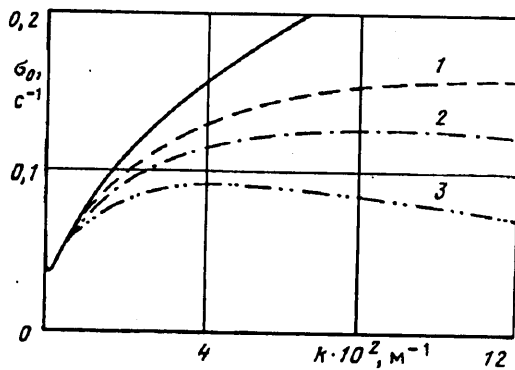


Фиг. 2

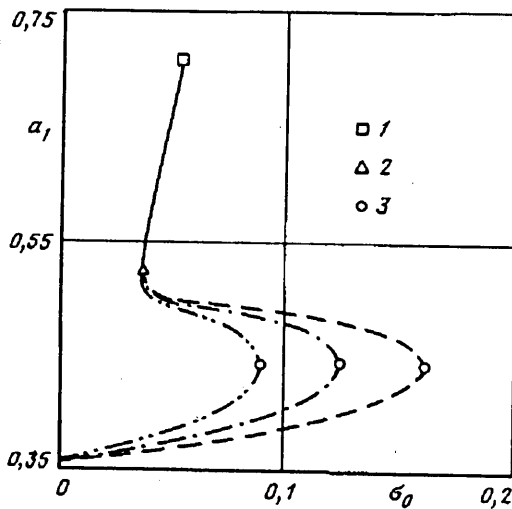
венно. Направленность фазовых изменений за счет ледяного покрова при этом сохраняется. В случае  $a_1 > 0$  максимальные смещения поверхности бассейна проявляются в виде всплесков, в то время как при  $a_1 < 0$  — в виде впадин. Это видно из сопоставления графиков на фиг. 1а и б.

Напомним, что величина  $a_3$ , имеющая одинаковый порядок с  $a_{3n}$  ( $n = 3-6$ ) и определяющая вместе с ними решение в третьем приближении, может быть найдена только из четвертого приближения. Поэтому при численных расчетах профилей  $\zeta(x)$  она не учитывалась. Однако с целью ориентировочной оценки допускаемой при этом ошибки (величины вклада третьего приближения) расчеты проводились как при  $a_{3n} = 0$ , так и при  $a_{3n} \neq 0$ . Их сопоставление не выявило принципиальных качественных отличий полученных результатов. Пренебрежение величинами  $a_{3n}$  привело лишь к незначительному (в пределах 7%) уменьшению экстремальных значений  $\zeta$  и слабому сглаживанию вершин поднятий и оснований впадин. Причем это влияние убывает с уменьшением длин волн начальных гармоник.

Влияние льда на  $\sigma_0(k)$  и  $a_1(\sigma_0)$  иллюстрируют графики на фиг. 3, 4. Сплошные линии отвечают здесь свободной поверхности ( $h=0$ ), а штриховые и штрихпунктирные 1—3 соответствуют толщинам льда 3, 5, 10 м. На фиг. 4 точкой 1 отмечена величина  $a_1$  при  $\sigma_0 = \frac{3}{4} \sqrt{g/2H}$ , а точки 2, 3 соответствуют значениям  $a_1$  в точках локального минимума и максимума  $\sigma_0(k)$ . В



Фиг. 3



Фиг. 4

коротковолновом приближении максимальные значения  $\sigma_0(k)$  для ледовых условий достигаются при  $k = (\sqrt{17} - 1)/(8x)$  и определяются выражением

$$2 \sqrt{g} u(\sqrt{17} - 1) / [2x(3 + \sqrt{17})] A^2 (7 + \sqrt{17})^{-1}$$

Ледяной покров ограничивает интервал смещения частоты в первом приближении. Величина этого интервала убывает с ростом толщины льда. Одному значению  $\sigma_0$  могут соответствовать три различных значения амплитуды  $a_1$  второй взаимодействующей гармоники. Функция  $\sigma^* = \tau \sqrt{kg} \sigma_2$ , характеризующая сдвиг частоты в приближении  $\epsilon^2$ , и функция  $a_1(\sigma^*)$  обладают аналогичными свойствами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
2. Букатов А. Е. О влиянии ледяного покрова на неустановившиеся волны // Мор. гидрофиз. исслед. 1970. № 3. С. 64—77.
3. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Влияние ледяного покрова на волновые движения // Мор. гидрофиз. исслед. 1971. № 2. С. 113—144.

4. Ильичев А. Т., Марченко А. В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88—95.
5. Букатов А. Е., Букатова О. М. Поверхностные волны конечной амплитуды в бассейне с битым льдом//Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 3. С. 421—425.
6. Паундер Э. Р. Физика льда. М.: Мир, 1967. 189 с.
7. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед: Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 384 с.
8. Тимохов Л. А., Хейсин Д. Е. Динамика морских льдов: Мат. модели. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 272 с.
9. Stokes G. G. On the theory of oscillatory waves//Math. and Phys. Papers. Camb: Univ. Press, 1847. V. 1. P. 197—229.
10. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
11. Carrier G. F. Gravity waves on water of variable depth//J. Fluid Mech. 1966. V. 24. № 4. P. 641—659.
12. Нестеров С. В. Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давлений//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1968. Т. 4. № 10. С. 1123—1125.
13. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
14. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 196 с.
15. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
16. Stone P. H. The meridional structure of baroclinic waves//J. Atmos. Sci. 1969. V. 26. P. 376—389.

Севастополь

Поступила в редакцию  
15.VI.1993