

УДК 532.59

© 1994 г. Р. А. ГРУНТФЕСТ, Е. В. ФИЛИМОНОВА

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ПОДВИЖНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ, ПРИЛОЖЕННЫМИ НА ПОВЕРХНОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Изучение генерации внутренних волн подвижными возмущениями представляет значительный интерес для подводного мореплавания, гидроакустики, морской сейсмологии и т. д. Основные результаты для возмущений постоянной интенсивности опубликованы в [1—3]. Настоящая статья продолжает исследования в данной области и рассматривает подвижные возмущения, интенсивность которых периодически меняется во времени. В качестве возмущений принимались изменения формы поверхности или внешнее давление на поверхности. Для заданной стратификации плотности получено вертикальное смещение частиц воды относительно положения равновесия в виде ряда по волновым модам. Разработаны вычислительный алгоритм и программа расчета каждой волновой моды. Построены границы волновых областей и линии постоянной фазы, рассчитаны амплитуды смещения. Показано существование резонансных зависимостей между частотой колебания и скоростью движения возмущений, при которых смещение для данной моды становится бесконечным (в линейной теории).

1. Введем систему координат xuz , жестко связанную с подвижным возмущением (плоскость xu совпадает со свободной поверхностью, ось z направлена вертикально вниз). Обозначим U — скорость движения возмущений, H — глубина моря, $\rho_0(z)$ — изменение плотности. В линейной теории движение воды описывается системой уравнений

$$\rho_0(z) \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \right) = \rho g - \text{grad } p$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_z \frac{d\rho_0(z)}{dz} = 0 \quad (1.1)$$

где $\mathbf{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$, p , ρ — возмущения скорости, давления и плотности относительно равновесного состояния, g — ускорение силы тяжести. Граничные условия для этой системы имеют вид

$$\zeta = \text{Re} \{f_0(x, y) e^{i\omega t}\}, \quad (x, y) \in S \quad (1.2)$$

или

$$p + \rho_0 g \zeta = \text{Re} \{f_1(x, y) e^{i\omega t}\}, \quad (x, y) \in S \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} = V_z, \quad z = 0 \quad (1.4)$$

$$V_z = 0, \quad z = H; \quad \mathbf{V} = 0, \quad p = 0, \quad \rho = 0, \quad |y| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Функция $z = \zeta(x, y, t)$ определяет свободную поверхность. В случае (1.2) задано изменение формы поверхности и выполняется условие «твердой крышки». Для случая (1.3) задано давление на поверхности и выполняется условие непрерывности давления. Оба возмущения периодические во времени, что вызывает

периодическое движение жидкости и позволяет избавиться от переменной t . Для единственности решения поставленной задачи следует добавить физический принцип излучения.

2. В результате исключения времени t , перехода к безразмерным величинам и применения преобразования Фурье по переменным x, y получаем

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + (\mu N(z) - \lambda) W = 0 \quad (2.1)$$

$$W(0) + \frac{k}{\mu} \frac{dW(0)}{dz} = \frac{F_k(\xi, \eta)}{\delta^k} \quad (2.2)$$

$$W(1) = 0, \quad \delta = \frac{gH}{U^2} \quad (2.3)$$

Здесь ξ, η — параметры преобразования Фурье, $W(\xi, \eta, z)$, $F_k(\xi, \eta)$ — Фурье-образы смещения воды и возмущений ($k = 0, 1$ соответственно для возмущения поверхности или давления). Решение неоднородной задачи (2.1)–(2.3) может быть представлено в виде ряда

$$W = - \sum_{n=0}^{\infty} W_n(z, \mu) \frac{W_n'(0, \mu)}{\lambda_n(\mu) - \lambda} \frac{F_k(\xi, \eta)}{\delta^k} \quad (2.4)$$

где $\lambda_n(\mu)$, $W_n(z, \mu)$ ($n = 0, 1, \dots$) — собственные числа и функции соответствующей однородной задачи Штурма со спектральным параметром λ . При $N(z) \geq 0$ существует счетное число собственных значений и функций, свойства которых изучены в монографии [4]. Здесь отметим равенство

$$\frac{d\lambda_n}{d\mu} = \int_0^1 N(z) W_n^2(z, \mu) dz + kW_n^2(0, \mu), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

которое может служить основой эффективного расчета собственных функций и значений для заданной кусочно-непрерывной функции $N(z)$. Методом Рунге — Кутты решается дифференциальное уравнение (2.1) с начальными условиями

$$W(0, \mu) = k, \quad \frac{dW(0, \mu)}{dz} = -\mu \quad (2.6)$$

которые обеспечивают выполнение однородного граничного условия (2.2). Затем интегрируется дифференциальное уравнение (2.5) с начальными условиями

$$\lambda_n(0) = -\pi^2(n + k/2)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

При этом граничное условие (2.3) будет выполнено автоматически. Отметим также монотонное возрастание $\lambda_n(\mu)$, существование значений μ_n , для которых $\lambda_n(\mu_n) = 0$, и асимптотическую оценку

$$\lambda_0 \sim \mu^2, \quad \lambda_n \sim \mu N_{\max}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \mu \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

Собственная функция W_0 существует только для случая $k=1$ и вызывает появление поверхностных волн, амплитуда которых имеет максимум на поверхности и быстро убывает с увеличением глубины. Остальные собственные функции W_n ($n = 1, 2, \dots$) приводят к возникновению внутренних волн, которые имеют ровно n экстремальных точек внутри жидкости.

3. Нахождение смещения сводится к применению обратного преобразования Фурье для ряда (2.4). Начнем с обращения по параметру ξ

$$W = - \frac{1}{2\pi\delta^k} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_n} W_n(z, \mu) \frac{W_n'(0, \mu)}{\lambda_n(\mu) - \lambda} F_k(\xi, \eta) e^{-kx} d\xi \quad (3.1)$$

Правильный выбор контуров γ_n связан с исследованием полюсов подынтегральных функций, которые определяются уравнениями

$$\lambda_n(\mu) = \xi^2 + \eta^2, \quad \mu = \delta \frac{\xi^2 + \eta^2}{(s - \xi)^2}, \quad s = \frac{\omega H}{U} \quad (3.2)$$

Явное нахождение зависимости $\xi_n(\eta)$ для произвольной стратификации невозможно, но справедливо параметрическое представление

$$\xi_n(\mu) = s \pm \sqrt{\frac{\delta \lambda_n(\mu)}{\mu}}, \quad \eta_n^2(\mu) = \lambda_n(\mu) \left(1 - \frac{\delta}{\mu}\right) \mp 2s \sqrt{\frac{\delta \lambda_n(\mu)}{\mu}} - s^2 \quad (3.3)$$

Учитывая отмеченные выше свойства собственных значений, можно показать, что для верхних знаков формулы (3.3) дают один вещественный полюс $\xi_{n1}(\mu)$, $\eta_{n1}(\mu)$ ($\alpha_{n1} < \mu < \infty$) при любых s, δ . Аналогично для нижних знаков формулы (3.3) дают один вещественный полюс $\xi_{n4}(\mu)$, $\eta_{n4}(\mu)$ ($\alpha_{n4} < \mu < \infty$), если $\delta < \mu_n$. В случае $\delta > \mu_n$ возможны три различные ситуации. Для $s < s_{n1}(\delta)$ существуют три вещественных полюса: $\xi_{n4}(\mu)$, $\eta_{n4}(\mu)$ ($\alpha_{n4} < \mu < \beta_{n1}$), $\xi_{n3}(\mu)$, $\eta_{n3}(\mu)$ ($\beta_{n1} < \mu < \alpha_{n3}$) и $\xi_{n2}(\mu)$, $\eta_{n2}(\mu)$ ($\alpha_{n2} < \mu < \infty$). Если $s_{n1}(\delta) < s < s_{n2}(\delta)$, то также существуют три полюса, но расположенные соответственно в интервалах ($\alpha_{n4} < \mu < \beta_{n1}$), ($\beta_{n1} < \mu < \beta_{n2}$) и ($\beta_{n2} < \mu < \infty$). При $s > s_{n2}(\delta)$ имеем один вещественный полюс $\xi_{n4}(\mu)$, $\eta_{n4}(\mu)$ ($\alpha_{n4} < \mu < \infty$). Числа α_{nk}, β_{nk} удовлетворяют следующим уравнениям, а зависимости $s = s_{nk}(\delta)$ ($k = 1, 2$) определяются условиями (3.4)

$$\eta_n(\alpha) = 0, \quad \frac{d\eta_n(\beta)}{d\mu} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.4)$$

$$s_{n1} = \max_{\mu_n \leq \mu \leq \delta} \sqrt{\lambda_n(\mu)} \left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}} - 1 \right)$$

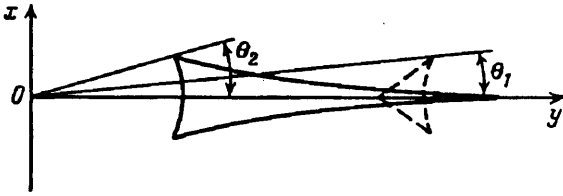
$$s_{n2} = \max_{\mu} \sqrt{\frac{\delta \lambda_n(\mu)}{\mu}} \left(1 - \frac{\lambda_n'(\mu) \mu^2}{\delta (\mu \lambda_n'(\mu) - \lambda_n(\mu))} \right)$$

Уравнения (3.2) содержат также счетное число комплексных полюсов. Наличие вещественных полюсов и выполнение принципа излучения Зоммерфельда заставляет выбирать контуры γ_n так, чтобы полюса ξ_{nk} ($k = 1, 2, 4$) обходились сверху, а полюс ξ_{n3} — снизу в комплексной плоскости ξ . Аналитичность подынтегральных функций в формулах (3.1) позволяет деформировать контуры γ_n и получить асимптотику интегралов при больших $|x|$ с помощью теории вычетов. Далее проводится обращение Фурье по переменной η . При этом оказывается полезным сделать в интегралах замены $\eta = \eta_n(\mu)$, что позволяет в полной мере использовать параметрическое представление для полюсов (3.3). Окончательные формулы для вертикального смещения частиц жидкости имеют вид

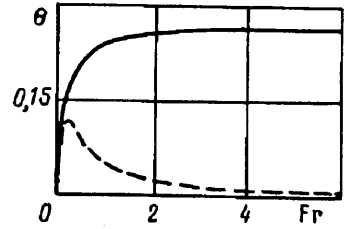
$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} (\zeta_n(x, y, z) e^{i\omega t}) \quad (3.5)$$

$$\zeta_n = \sum_{m=1}^2 \int_{\alpha_{nm}}^{\infty} L_n(\mu) e^{-i \xi_{nm} x} \cos(\gamma \eta_{nm}) d\mu + \int_{\alpha_{n4}}^{\beta_{n1}} L_n(\mu) e^{-i \xi_{n4} x} \cos(\gamma \eta_{n4}) d\mu, \quad x \rightarrow +\infty \quad (3.6)$$

$$\zeta_n = \int_{\beta_{n1}}^{\alpha_{n3}} L_n(\mu) e^{-i \xi_{n3} x} \cos(\gamma \eta_{n3}) d\mu, \quad x \rightarrow -\infty \quad (3.7)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$L_n = \frac{2}{\pi \mu \delta^4 \eta_n(\mu)} F_k(\mu) W_n(z, \mu) W_n'(0, \mu) (\xi_n - s) \quad (3.8)$$

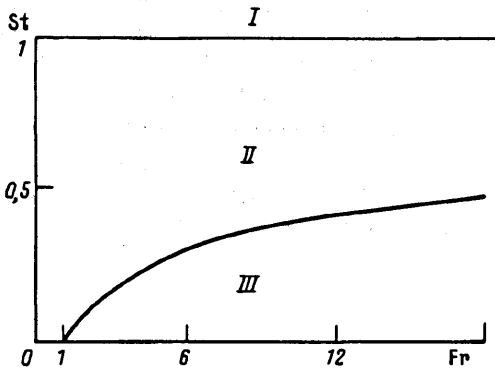
Интегралы, связанные с 3-м и 4-м полюсами, в области $s > s_{n2}(\delta)$ отсутствуют. Ряд (3.5) дает разложение полного смещения на сумму счетного числа волновых мод ζ_n , причем нулевая волновая мода ζ_0 существует при выполнении условия (1.3) и вызывает поверхностные волны. Каждая мода состоит из двух волновых следов позади области подвижного возмущения (корабельные волны), которые существуют при любых значениях параметров (s, δ) и связаны с 1-м и 2-м полюсами. Для $s < s_{n1}(\delta)$ возникает также замкнутая волновая система, распространяющаяся во всех направлениях от области возмущения и вызываемая 3—4 полюсами. При выполнении равенства $s = s_{n1}(\delta)$ подынтегральные функции (3.8) имеют неинтегрируемую особенность, что приводит к бесконечным смещениям (резонанс n -й волновой моды). Интегралы (3.6)—(3.7) вычисляются методом стационарной фазы.

4. Традиционно в качестве примера рассматривается равномерная стратификация, для которой $N(z) = \text{const}$. В этом случае собственные функции и значения находятся в явном виде и все дальнейшие действия становятся прозрачными, хотя и требуют проведения расчетов на ЭВМ. Методически это оправдано, тем более что все качественные результаты сохраняются и в более общем случае. Удобными определяющими параметрами в этом случае являются $Fr = gHN/(\pi nU)^2$ — число Фруда n -й моды, $St = \omega\sqrt{H}/gN$ — число Струхаля.

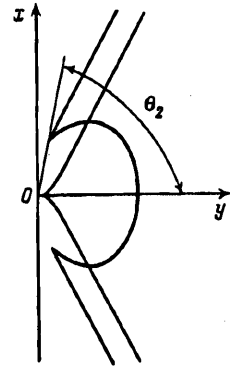
Применение метода стационарной фазы к интегралам (3.6)—(3.7) приводит к следующим результатам. На фиг. 1 показаны линии постоянной фазы поля смещений для волнового следа, соответствующего 1-му полюсу (штриховая линия, $St = 1,2$, $Fr = 0,3$). Зависимость угла раскрытия волнового клина $\theta_1(Fr)$ для $St = 1,2$ приведена на фиг. 2 (штриховая линия). Для волнового следа, образуемого 2—4 полюсами, в плоскости параметров (Fr, St) существуют три области, которым соответствуют различные волновые картины (фиг. 3). В области I ($St > 1$) линии постоянной фазы для поля смещений показаны на фиг. 1 (сплошная линия, $St = 1,2$, $Fr = 0,3$). Волновой след расположен позади области возмущения и имеет угол раскрытия θ_2 , зависимость которого дана на фиг. 2 (сплошная линия, $St = 1,2$). В области II ($s_{n1} < St < 1$) линии постоянной фазы представлены на фиг. 4, а зависимость угла раскрытия волновой области $\theta_2(Fr, St)$ — на фиг. 5 (сплошная линия, $St = 0,2$). Особенностью данного случая является уход линий постоянной фазы на бесконечность под углом

$$\varphi = \arcsin \left(\sqrt{\frac{St}{s_{n1}(Fr)}} \right) \quad (4.1)$$

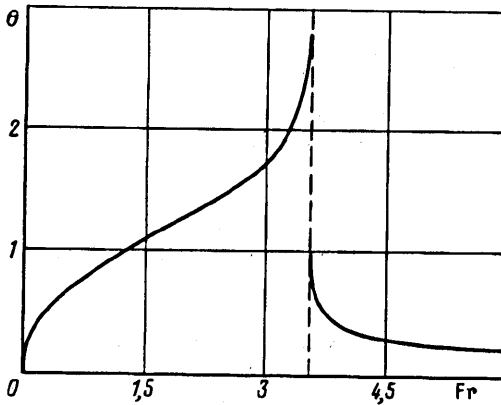
причем отраженная волна имеет противоположное значение фазы. Наконец, линии постоянной фазы для области III ($St < s_{n1}(Fr)$, $Fr > 1$) изображены на фиг. 6. Кроме узкого волнового следа позади области возмущения с углом раскрытия



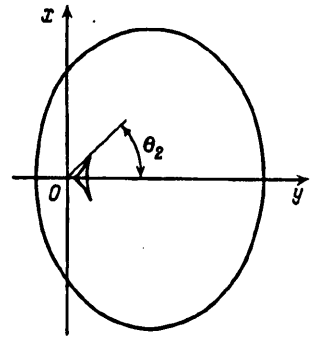
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

$\theta_2(Fr, St)$ (фиг. 5) здесь возникает замкнутая линия постоянной фазы, охватывающая область возмущений. Равенство

$$St = s_{n1}(Fr), \quad s_{n1} = (1 - Fr^{-1/3})^{3/2}, \quad Fr > 1 \quad (4.2)$$

соответствует резонансу n -й моды.

Представленные на фигурах линии постоянной фазы движутся с постоянной во времени скоростью в направлении радиусов-векторов каждой точки, сохраняя гомотетичность всей картины относительно начала координат. В рамках метода стационарной фазы линии постоянной фазы не зависят от конкретного возмущения, но амплитуда смещения частиц жидкости связана с заданием возмущения. В расчетах рассматривались два случая задания возмущения

$$f_k(x, y) = f_k \exp\left(-\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}\right) \quad (4.3)$$

$$F_k = 2\pi f_k \frac{ab}{(1 + c^2)^{3/2}}, \quad c = \sqrt{(\xi a)^2 + (\eta b)^2}$$

$$f_k(x, y) = f_k \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad F_k = \frac{2\pi f_k ab}{c^2} \left(\frac{\sin(c)}{c} - \cos(c)\right) \quad (4.4)$$

В обоих случаях линиями уровня возмущений являются эллипсы с полуосями

$\nu a, \nu b$ ($\nu > 0$). Не приводя подробного анализа результатов расчета, отметим, что для конечной области действия возмущений при специальном выборе параметра a , можно устранить резонанс (бесконечность смещений) любой волновой моды. На резонансе уравнение $\gamma_n^2(\mu) = 0$ имеет двукратный корень $\mu = \alpha_{n2} = \alpha_{n3} = \alpha_n$, что приводит к неинтегрируемой особенности подынтегральных функций (3.8), которая устраняется при $F_k(\alpha_n) = 0$. В случае (4.4) задания возмущений это условие принимает вид $a \xi_m(\alpha_n) = c_m$ ($m = 1, 2, \dots$), где c_m — корни уравнения $\operatorname{tg}(c) = c$. Для равномерной стратификации плотности и условия «твердой крышки» имеем

$$a_{nm} = \frac{c_m (1 - \operatorname{St}^{23})^{1/2}}{\pi n \operatorname{St}^{1/3}}, \quad \operatorname{St} < 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

Для сравнения заметим, что в случае (4.3) задания возмущения (бесконечная область действия) устранение резонанса не может быть выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грунтфест Р. А., Черкесов Л. В. Внутренние волны в стратифицированной жидкости, вызываемые движением тонкого тела // Аннот. докл. 6-й Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике, Ташкент, 1986. Ташкент, 1986. С. 226—227.
2. Санников В. Ф. Дальнее поле установившихся волн, создаваемых локальными источниками возмущений в потоке стратифицированной жидкости // ПММ. 1986. Т. 50. № 6. С. 987—995.
3. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана 1984. Т. 20. № 6. С. 526—532.
4. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
6.VII.1992