

УДК 532.59

© 1994 г. Э. Л. АМРОМИН, А. Н. ИВАНОВ, Д. Ю. САДОВНИКОВ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ СТОКСА В ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Численным методом решена задача о предельных прогрессивных волнах Стокса, характеризующихся углом при гребне 120° , распространяющихся в невязкой несжимаемости жидкости ограниченной глубины. Получены формы волн и определен диапазон чисел Фруда, построенных по глубине жидкости и фазовой скорости, в котором существуют решения.

Форма предельных прогрессивных волн Стокса, имеющих углы 120° при гребнях, для жидкости бесконечной глубины давно известна [1]. В данной работе решается задача о влиянии конечной глубины горизонтального слоя жидкости на форму и длину таких волн.

Рассматривается плоское установившееся безвихревое движение идеальной несжимаемой весомой жидкости, которая в неподвижном невозмущенном состоянии имела глубину H . По жидкости распространяются волны со скоростью U_∞ . Исследование проводим в обращенном движении, когда волновой профиль неподвижен в пространстве. Во всей занимаемой жидкостью области потенциал скорости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа. На свободной поверхности S и на дне S_H выполняется условие непротекания, а на S , кроме того, условие постоянства давления

$$\Delta\Phi = 0 \quad (1)$$

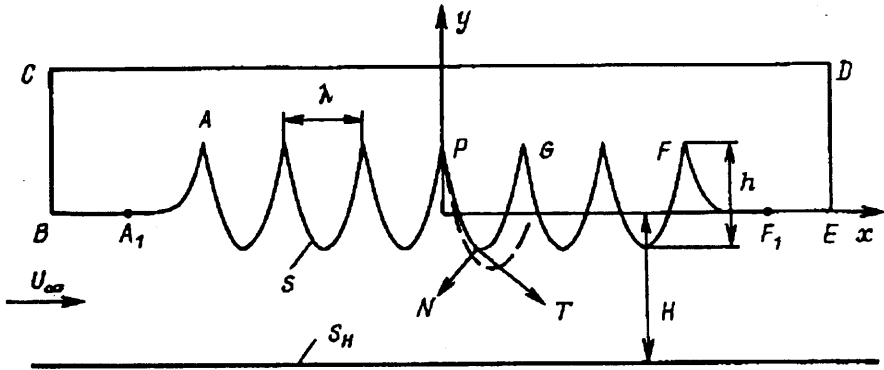
$$N\nabla\Phi = 0, \quad (xy) \in S \cup S_H \quad (2)$$

$$(\nabla\Phi)^2 = 1 - y_s, \quad (xy) \in S \quad (3)$$

Здесь и далее все соотношения записаны в безразмерном виде, U_∞ принята за единицу скорости, $U_\infty^2/(2g)$ — за единицу длины (g — ускорение свободного падения), y_s — ордината S , N — орт нормали к S и S_H . Корректность этой задачи была доказана только [1] для случаев бесконечной жидкости и бесконечной длины волн.

Для решения задачи (1)–(3) использовалась модификация [2, 3] итеративного метода [4]. Каждая итерация состоит из двух этапов. На первом из них решается задача (1), (2) для потока с двумя известными границами — дном и пробной формой свободной поверхности, которая на данной итерации отождествляется с S . В результате решения этой задачи определяются $U = |\nabla\Phi|$ на S и невязка в условии (3). Если она где-либо на S недопустимо велика, то на втором этапе для ее уменьшения корректируется форма S с помощью линейризованных на S условий (2), (3). Откорректированная форма используется в качестве S на следующей итерации и т. д.

Задача определения U в течении с бесконечной системой волн сведена к краевой задаче для замкнутого контура с ограниченной длиной границ в соответствии с предложенной в [4] схемой (фиг. 1). Это позволяет использовать проверенные методы гидродинамических особенностей. Граница S , включаемая



Фиг. 1

в состав обтекаемого однородным потоком со скоростью $U_\infty = 1$ замкнутого контура, отождествлялась с его частью AF . Размеры других частей контура выбраны так, чтобы индукция на участке A_1F_1 от распределенных на BC и DE гидродинамических особенностей была пренебрежимо мала; тогда почти всюду на CD , BA_1 и F_1E можно принять $U = 1$. Использование дополнительного контура, являющегося зеркальным отражением основного относительно дна, дает возможность учесть ограниченность глубины. Располагая на контурах вихревые особенности, для вычисления U получаем интегральное уравнение

$$U(S) - \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} U(s') \left[\frac{\cos(N, r)}{r} - \frac{\cos(N, r_1)}{r_1} \right] \frac{ds'}{dx} dx = \frac{I + I_1}{\pi} N_y - \frac{J + J_1}{2\pi} N_x \quad (4)$$

Здесь s, s' — дуговая координата, отсчитываемая вдоль участка контура A_1F_1 ; x_1 и x_2 — абсциссы точек A_1 и F_1 ; r — расстояние от контрольной точки до произвольной точки на участке контура A_1F_1 ; r_1 — расстояние до произвольной точки аналогичного участка на симметричном A_1F_1 относительно дна контура; N_x, N_y — компоненты орта N , являющегося нормалью к участку контура A_1F_1

$$I = \text{sign}(y) \left[\text{arctg} \frac{R_1}{|y|} + \text{arctg} \frac{R_2}{|y|} - \pi \right]$$

$$I_1 = \pi - \text{arctg} \frac{R_1}{R_3} - \text{arctg} \frac{R_2}{R_3}$$

$$J = \ln \frac{R_2^2 + y^2}{R_1^2 + y^2}; \quad J_1 = \ln \frac{R_1^2 + R_3^2}{R_2^2 + R_3^2}$$

$$R_1 = x - x_1; \quad R_2 = x_2 - x; \quad R_3 = y + 2H$$

Здесь используются только главные значения арктангенсов.

На втором этапе итерационного процесса, заключающегося в корректировке формы взволнованной поверхности жидкости, предполагаем, что S для двух смежных итераций близки, т. е. справедливы соотношения

$$\|(N_{i-1}, N_i) - 1\| \ll 1; \quad \|l\| \ll \lambda$$

Здесь i — номер приближения, l — расстояние по нормали между сходственными точками на S_{i-1} и S_i , λ — длина волны, а разность значений $\nabla\Phi$ в сопоставляемых точках по модулю много меньше единицы. Введя φ — потенциал

источников плотности q , являющийся возмущением потенциала Φ , ли-
неаризованные по l и q граничные условия (2), (3) на S_{l-1} запишем в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} + \frac{\partial (lU)}{\partial T} = 0 \quad (5)$$

$$U^2 - 2U \frac{\partial \Phi}{\partial T} = 1 - y_s - lN, \quad (6)$$

Здесь T — орт касательной к S . Систему (5), (6) достаточно решать только для одной (средней) волны. Тогда вопрос о невязке в (3) на дугах A_1A и FF_1 окажется несущественным. Уравнение (6) после исключения l с помощью (5) можно свести к сингулярному интегральному уравнению второго рода относительно q и регуляризовать [5] обращением интеграла Коши в классе функций, неограниченных на одном из концов промежутка их определения

$$q(s) - \frac{1}{2\pi R(s)} \int_{s_p}^s \frac{R(\xi) N_y(\xi)}{[\xi - s] U^2(\xi)} \int_{s_p}^{\xi} q(\xi) d\xi d\xi = \frac{\alpha}{\pi R(s)} \int_p^s \left[U(\xi) - \frac{1 - y_s(\xi)}{U(\xi)} \right] \frac{d\xi}{\xi - s} \quad (7)$$

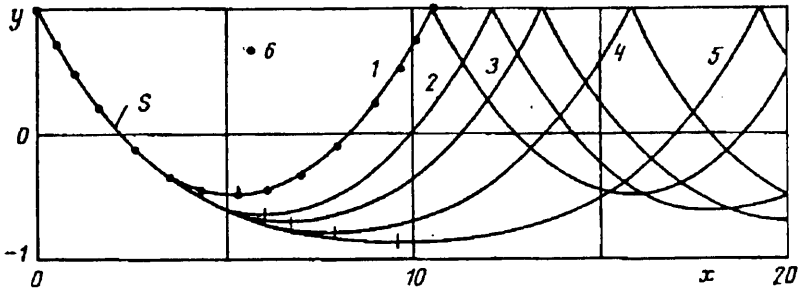
$$R(\xi) = (\xi - s_p)^{1/2} (s_s - \xi)^{-1/2}$$

Здесь s_p, s_s — координаты точек P и G , являющихся вершинами двух соседних волн; α — меньший единицы коэффициент релаксации, введенный для обеспечения устойчивости счета. После определения q из (7), с помощью (5) при начальном условии $l(s_p) = 0$ определяются l , служащие для вычисления координат s следующего приближения (штриховая линия на фиг. 1). При этом определяется также новое значение длины волны по точке минимума y_s этого приближения. Форма волны между этой точкой и следующей вершиной определяется зеркальным отражением найденной полуволны относительно вертикальной оси, проходящей через точку минимума y_s . Остальные волны на AF перед началом новой итерации повторяют эту волну.

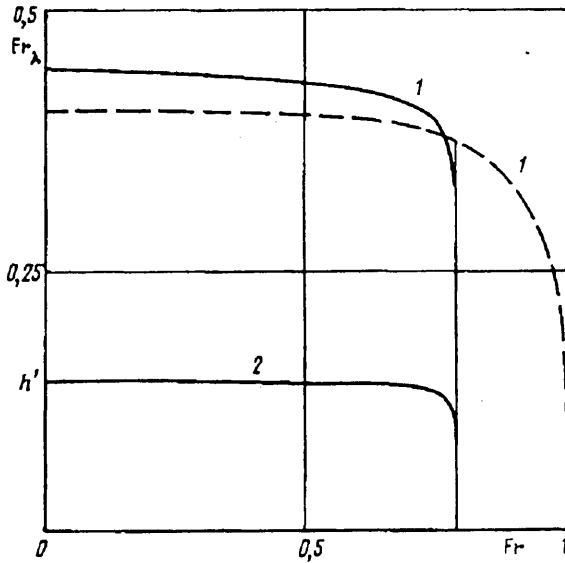
Периодичность функции $U(x)$, т. е. отличие скорости на центральной волне от скорости на соседней в однофазных точках менее чем на 0,005, была достигнута при размещении на S шести волн.

Угол при вершине предельной волны Стокса независимо от глубины жидкости равен 120° [1], и в качестве начального приближения использовалась поверхность, состоящая из шести пробных волн с ординатами вершин $y_s = 1$ и углами при гребнях 120° , крайние из которых плавно сопрягались с прямолинейными границами отрезками кубических парабол (см. фиг. 1). Для повышения точности вычисления U вблизи вершин волн при решении уравнения (4) в этих районах использовалось асимптотическое представление $U(x_1)/U(x_2) = [(x_1 - x_p)/(x_2 - x_p)]^{1/2}$, следующее из уравнения Бернулли, а в (5), (6) в этой малой окрестности гребня подставлялось непосредственно $U = (1 - y_s)^{1/2}$. Несмотря на приближенный характер корректировки S на каждом шаге итерационного процесса, основанного на решении уравнений (5), (6), решение задачи в целом удовлетворяет точным граничным условиям (2) и (3), так как способ вычисления U принципиально точен.

Результаты расчетов представлены на фиг. 2 и 3. На первой из них приведены формы волн Стокса для различных значений числа Фруда $Fr = U_\infty (gH)^{-1/2} = (2/H)^{1/2}$. Кривые 1—4 соответствуют $Fr = 0, 0,71, 0,76, 0,78, 0,79$ — предельное значение. При больших значениях Fr (т. е. при меньших глубинах $H = 2/Gr^2$) вычисления расходятся при любых $\alpha > 0$. Нанесены служившие для тестирования метода классические результаты Дж. Митчела и А. И. Некрасова [1] для $Fr = 0$, т. е. для бесконечной глубины жидкости. На фиг. 3 приведены зависимости



Фиг. 2



Фиг. 3

$Fr_\lambda = U_\infty (g\lambda)^{-1/2} = (2/\lambda)^{1/2}$ от Fr ; сплошная линия 1 соответствует представленной теории и имеет асимптоту $Fr = 0,79$, штриховая — линейной теории [1.] и имеет асимптоту $Fr = 1$. Кривой 2 на фиг. 3 представлено $h' = h/\lambda$, где h — разность ординат гребня и подошвы волны. Для линейной волны из закона сохранения массы имеем $\max h = 2H(1 - Fr)^2$. Отношение h к глубине B жидкости под подошвой для $Fr = 0,79$ равно здесь $0,785$ и близко к аналогичному значению $0,75$, полученному в [3] для солитона Стокса в плоском течении со стоком на дне жидкости.

Наибольшая длина представленных на фиг. 2 волн Стокса равна 19 , и ей соответствует Fr , практически совпадающий с предельным значением $0,79$. Предполагая, что наибольшему Fr должны бы соответствовать неограниченные длины волн, это решение для $Fr = 0,79$ уместно сравнить с результатами [6] для солитона Стокса. Для такого солитона невозмущенный уровень жидкости совпадает с ее уровнем в подошве волны, по которому строят $Fr_B = (2h/B)^{1/2}$. Г. Ю. Степанов провел оценку данных результатов для $Fr = 0,79$ и сопоставление их с [6], используя приведенные на фиг. 2, 3 данные и закон сохранения массы в виде $B U_B = H U$. Он отметил, что погрешность в выполнении этого закона в данной работе оказалась менее $0,004$, чем подтверждается корректность использованных математических экспериментов. Однако разница между Fr_{\max} для определенных здесь периодических волн Стокса и данными [6] для солитона

Fr = 0		0,76		0,79	
x	y _s	x	y _s	x	y _s
0	1	0	1	0	1
0,423	0,761	0,423	0,761	0,474	0,733
0,869	0,531	0,870	0,533	1,014	0,462
1,337	0,318	1,336	0,315	1,629	0,191
1,827	0,124	1,824	0,116	2,331	-0,063
2,340	-0,049	2,381	-0,080	3,131	-0,294
2,879	-0,199	3,016	-0,264	4,043	-0,487
3,445	-0,326	3,740	-0,431	5,083	-0,643
4,039	-0,416	4,565	-0,566	6,268	-0,751
4,663	-0,470	5,505	-0,662	7,619	-0,817
5,251	-0,493	6,715	-0,721	9,596	-0,871

Стокса оказалась на порядок больше. Г. Ю. Степанов вычислил для [6] $Fr = 0,763-0,767$, а для данной работы $Fr_{pmax} = 1,251$ (в [6]—1,2898). Формы волн иллюстрируются также данными, представленными ниже и в таблице:

x'	0	0,1	1	2	3	4	5
Y _{s1}	1,815	1,735	1,350	1,130	1,040	1,000	—
Y _{s2}	1,832	1,775	1,378	1,150	1,055	—	1,006

Здесь $x' = x/B$ $Y_{si} = (y_s + H)/B$ ($i = 1, 2$), $i = 1$ соответствует результатам для $Fr = 0,79$, $i = 2$ — для солитона Стокса [6].

Имеющиеся расхождения между данными настоящей работы для $Fr = 0,79$ и результатами [6] для солитона Стокса свидетельствуют не о недостоверности какого-либо из этих результатов, а скорее о том, что солитон Стокса не может быть вычислен как предел периодических волн Стокса. Весьма совершенный метод расчета волн большой амплитуды без изломов на гребнях [7] в свою очередь не дал возможности вычислить волны Стокса как предел близких к ним по амплитуде «гладких» волн. Авторы сомневаются, что решение с одной критической точкой на свободной поверхности может быть пределом семейства решений с бесконечным числом таких точек.

Авторы признательны Г. Ю. Степанову за существенные улучшения и дополнения текста статьи, а В. А. Бушковскому за помощь в отладке программы для ПЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. Амромин Э. Л., Басин М. А., Бушковский В. А. Два решения пространственной задачи о предельных волнах на поверхности весомой жидкости // ПММ. 1990. Т. 54. № 1. С. 162—165.
3. Амромин Э. Л., Бушковский В. А., Садовников Д. Ю. Уединенные волны Стокса при течении весомой жидкости в щель // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 6. С. 173—176.
4. Иванов А. Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. Л.: Судостроение, 1980. 236 с.
5. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
6. Гузевский Л. Г. Обтекание препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины // Динамика сплошной среды с границами раздела. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1982. С. 61—69.
7. Маклаков Д. В. Нелинейная теория докритических течений. Предельные режимы обтекания: Препринт № 2. Казань: ИММ им. Чеботарева, 1992.